PAA
Archi

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

9

Neunter Theil.

Mit zehn lithographirten Tafeln.

Greifswald.
C. A. Koch's Separat-Conto.

1847.

Inhaltsverzeichniss des neunten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Literarische Berichte*).

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Ein paar goniometrische Sätze.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Es scheint bisher noch nicht bemerkt worden zu sein, dass es Reihen von der Form

$$A_0\cos^n x\cos nx+A_1\cos^{n-1}x\cos(n-1)x+A_2\cos^{n-2}x\cos(n-2)x+\ldots$$
$$\ldots+A_{n-1}\cos x\cos x,$$

$$B_0\cos^n x\sin nx+B_1\cos^{n-1}x\sin(n-1)x+B_2\cos^{n-2}x\sin(n-2)x+\ldots$$
$$\ldots+B_{n-1}\cos x\sin x$$

giebt, deren Summen sehr einfach durch eine Potenz des Cosinus ausgedrückt werden können, und daher möge hier ein kleiner Beitrag zu einer Untersuchung darüber folgen.

Bezeichnen wir wie gewöhnlich die Binomialkoeffizienten des Exponenten m mit $m_0, m_1, m_2, \ldots m_m$, so ist nach dieser Bezeichnung

$$\frac{n}{1}=n_1,\ \frac{n(n+1)}{1.2}=(n+1)_2,\ \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}=(n+2)_3,\ldots.$$

Es sei nun die folgende Reihe zu summiren:

$$(2\cos x)^n\cos nx+n_1(2\cos x)^{n-1}\cos(n-1)x$$
$$+(n+1)_2(2\cos x)^{n-2}\cos(n-2)x+\ldots+(2n-2)_{n-1}(2\cos x)\cos x.$$

Der erste Schritt zur Lösung dieser Aufgabe besteht darin, dass wir die Reihe selbst in eine andere transformiren, welche keine Cosinuspotenzen mehr enthält. Diess geschieht leicht mittelst des bekannten Satzes

$$\left(2\cos\frac{z}{2}\right)^m\cos\frac{m}{2}z=m_0+m_1\cos z+m_2\cos 2z+\ldots+m_m\cos mz,$$

aus welchem für $z=2x$ bei umgekehrter Anordnung der Reihenglieder und unter der Bemerkung, dass $m_m=m_0$, $m_{m-1}=m_1$, $m_{m-2}=m_2$ etc., leicht der folgende entspringt:

$$(2\cos x)^m \cos mx =$$
$$m_0 \cos 2mx + m_1 \cos(2m-2)x + m_2 \cos(2m-4)x + \ldots + m_{m-1}\cos 2x + m_m.$$

Wenden wir diese Formel in jedem Gliede unserer zu summirenden Reihe für $m=n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots 1$ an, und bezeichnen zur Abkürzung

$$\cos 2nx,\ \cos(2n-2)x,\ \cos(2n-4)x,\ \ldots \cos 2x$$

mit

$$y_0 \quad , \quad y_1 \quad , \quad y_2 \quad , \ldots y_{n-1};$$

so geht die fragliche Reihe in die folgende über:

$$\begin{aligned} & n_0 y_0 + n_1 y_1 + n_2 y_2 + \ldots + n_{n-1} y_{n-1} + n_n \\ & + n_1 \{(n-1)_0 y_1 + (n-1)_1 y_2 + \ldots + (n-1)_{n-2} y_{n-1} + (n-1)_{n-1}\} \\ & + (n+1)_2 \{(n-2)_0 y_2 + \ldots + (n-2)_{n-3} y_{n-1} + (n-2)_{n-2}\} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (2n-2)_{n-1} \{1_1 y_{n-1} + 1_0\}, \end{aligned}$$

die im Allgemeinen von folgender Form ist:

$$\left. \begin{aligned} & y_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_{n-1} y_{n-1} \\ & + 1 + n_1 + (n+1)_2 + (n+2)_3 + \ldots + (2n-2)_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wenn wir nämlich

$$C_1 = n_1 + n_1 (n-1)_0,$$
$$C_2 = n_2 + n_1 (n-1)_1 + (n+1)_2 (n-1)_0,$$
$$\ldots\ldots$$

und überhaupt für ein ganzes positives k

$$\left. \begin{aligned} C_k = n_k + n_1 (n-1)_{k-1} + (n+1)_2 (n-2)_{k-2} + \ldots \\ \ldots + (n+k-2)_{k-1} (n-k+1)_1 + (n+k-1)_k (n-k)_0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

setzen. Die vorstehende $(k+1)$gliedrige Reihe lässt sich aber sehr leicht summiren, wenn man sich an die ganz allgemeine Formel

$$(\alpha+\beta)_k = \alpha_k + \alpha_{k-1}\beta_1 + \alpha_{k-2}\beta_2 + \ldots + \alpha_1 \beta_{k-1} + \beta_k$$

erinnert. Nimmt man nämlich α und β negativ und berücksichtigt die Regel

$$(-\gamma)_n = (-1)^n \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)}{1.2.3\ldots n} = (-1)^n (\gamma+n-1)_n,$$

so ergiebt sich sehr leicht

$$(\alpha+\beta+k-1)_k=$$
$$(\alpha+k-1)_k+(\alpha+k-2)_{k-1}\beta_1+(\alpha+k-3)_{k-2}(\beta+1)_2+\dots$$
$$\dots+\alpha_1(\beta+k-2)_{k-1}+(\beta+k-1)_k.$$

Setzt man hier $\alpha+k-1=n$, $\beta=n$, so erscheint auf der rechten Seite die in No. (3) vorkommende Reihe, woraus jetzt

$$C_k=(2n)_k \qquad (4)$$

folgt. Wir haben nun noch die zweite in No. (2) stehende Reihe zu summiren. Nehmen wir aber in (3) und (4) $k=n$, so wird

$$1+n_1+(n+1)_2+\dots+(2n-2)_{n-1}+(2n-1)_n=(2n)_n,$$

folglich die zu summirende Reihe

$$1+n_1+(n+1)_2+(n+2)_3+\dots+(2n-2)_{n-1}=(2n)_n-(2n-1)_n;$$

d. i. vermöge der Werthe von beiden Koeffizienten

$$=\frac{2n(2n-1)\dots(n+2)(n+1)}{1.2\dots n}-\frac{(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)n}{1.2\dots n}$$
$$=\frac{(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}{1.2\dots n}\{2n-n\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{1.2\dots n}=\tfrac{1}{2}(2n)_n.$$

Substituiren wir dieses Resultat nebst Dem, was aus No. (4) für $k=1, 2, \dots (n-1)$ folgt, in No. (2) und restituiren die Werthe von $y_0, y_1, \dots y_{n-1}$, so ergiebt sich, dass die zu summirende Reihe gleich der folgenden ist:

$$\cos 2nx+(2n)_1\cos(2n-2)x+(2n)_2\cos(2n-4)x+\dots$$
$$\dots+(2n)_{n-1}\cos 2x+\tfrac{1}{2}(2n)_n.$$

Als Summe dieser letzteren ist aber $2^{2n-1}\cos^{2n}x$ bekannt, und daher gelangen wir zu der bemerkenswerthen Relation:

$$\left.\begin{aligned}2^{2n-1}\cos^{2n}x=(2\cos x)^n\cos nx+n_1(2\cos x)^{n-1}\cos(n-1)x\\+(n+1)_2(2\cos x)^{n-2}\cos(n-2)x+\dots+(2n-2)_{n-1}(2\cos x)\cos x\end{aligned}\right\}\ (5),$$

oder auch nach Division mit $(2\cos x)^n$:

$$\left.\begin{aligned}2^{n-1}\cos^n x=\cos nx+n_1\frac{\cos(n-1)x}{2\cos x}+(n+1)_2\frac{\cos(n-2)x}{(2\cos x)^2}+\dots\\\dots+(2n-2)_{n-1}\frac{\cos x}{(2\cos x)^{n-1}}.\end{aligned}\right\}\ (6)$$

Durch einen völlig analogen Calcül könnte man noch ein zweites Theorem ableiten, worin die Sinus der Vielfachen von x den Cosinus in (5) und (6) entsprechen; man gelangt aber schneller dazu,

wenn man die Gleichung (5) differenziirt. Auf der rechten Seite hat man dann lauter Grössen von der Form

$$(2\cos x)^p \cos px$$

zu differenziiren, für welche man erhält:

$$\frac{\partial (2\cos x)^p \cos px}{\partial x} = 2^p \left\{ \cos^p x \frac{\partial \cos px}{\partial x} + \cos px \frac{\partial \cos^p x}{\partial x} \right\}$$
$$= -2^p \{ \cos^p x \,.\, p \sin px + \cos px \,.\, p \cos^{p-1} x \sin x \}$$
$$= -p 2^p \cos^{p-1} x \{ \cos x \sin px + \cos px \sin x \}$$
$$= -2p\,(2\cos x)^{p-1} \sin (p+1) x.$$

Unter Anwendung dieser Formel ergiebt sich jetzt aus (5) für $p = n,\ n-1,\ \ldots 1$:

$$2^{2n-1} 2n \cos^{2n-1} x \sin x =$$
$$2n\,(2\cos x)^{n-1} \sin (n+1)\, x + (2n-2) n_1 (2\cos x)^{n-2} \sin nx + \ldots$$
$$\ldots + 2(2n-2)_{n-1} \sin 2x,$$

oder durch Multiplikation mit $(2\cos x)^2$ und nachherige Vertauschung von n mit $n-1$:

$$\left.\begin{array}{c} (n-1)(2\cos x)^{2n-1} \sin x = \\ (n-1)(2\cos x)^n \sin nx + (n-2)(n-1)_1 (2\cos x)^{n-1} \sin (n-1) x \\ + (n-3) n_2 (2\cos x)^{n-2} \sin (n-2) x + \ldots + 1 . (2n-4)_{n-2} \sin 2x \end{array}\right\} \quad (7)$$

oder

$$\left.\begin{array}{c} (n-1)(2\cos x)^{n-1} \sin x \\ = (n-1) \sin nx + (n-1)_1 \dfrac{(n-2)\sin (n-1) x}{2\cos x} + n_2 \dfrac{(n-3)\sin (n-2) x}{(2\cos x)^2} + \ldots \\ \ldots + (2n-4)_{n-2} \dfrac{1 . \sin 2x}{(2\cos x)^n} \end{array}\right\} \quad (8)$$

und diess sind ein paar Formeln, welche der in (5) und (6) entwickelten entsprechen.

II.

Bemerkung zur Theorie des Integrallogarithmus.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Bezeichnen wir die numerische Constante 0,5772156.. zur Abkürzung mit C, so ist bekanntlich für alle u von $u=0$ bis $u=\infty$

$$li(e^{-u})=C+lu$$
$$-\tfrac{1}{1}\frac{u}{1}+\tfrac{1}{2}\frac{u^2}{1.2}-\tfrac{1}{3}\frac{u^3}{1.2.3}+\tfrac{1}{4}\frac{u^4}{1.2.3.4}-\ldots$$

Multipliziren wir diese Gleichung mit $e^{-u}\partial u$ und integriren darauf zwischen den Gränzen $u=0$, $u=\infty$, so wird

$$\int_0^\infty e^{-u}\,li(e^{-u})\,\partial u=C\int_0^\infty e^{-u}\,\partial u+\int_0^\infty lu\,e^{-u}\,\partial u$$
$$-\int_0^\infty \left\{\tfrac{1}{1}\frac{u}{1}-\tfrac{1}{2}\frac{u^2}{1.2}+\tfrac{1}{3}\frac{u^3}{1.2.3}-\ldots\right\}e^{-u}\partial u.$$

Wenden wir hier, so weit es geht, die bekannten Formeln

$$\int_0^\infty e^{-u}\partial u=1,\int_0^\infty u^n\,e^{-u}\partial u=1.2.3..n$$

an, so ergiebt sich

$$\int_0^\infty e^{-u}\,li(e^{-u})\partial u=C+\int_0^\infty lue^{-u}\,\partial u-\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\ldots,$$

d. i. wegen der Summe der Reihe rechts nach einer kleinen Transposition:

$$\int_0^\infty lue^{-u}\partial u = -C + l2 + \int_0^\infty e^{-u} li(e^{-u})\,\partial u. \quad (1)$$

Um den Werth des Integrales rechts zu finden, benutzen wir die Formel *)

$$li(e^{-u}) = -e^{-u}\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x}\, e^{-ux},$$

mit Hülfe deren wir erhalten:

$$\int_0^\infty e^{-u} li(e^{-u})\,\partial u = -\int_0^\infty e^{-2u}\,\partial u \int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x} e^{-ux}. \quad (2)$$

Durch Umkehrung der Integrationsfolge wird das Doppelintegral rechts

$$= -\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x}\int_0^\infty e^{-(2+x)u}\partial u = -\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x}\cdot\frac{1}{2+x}.$$

Nun ist aber bei unbestimmter Integration

$$\int \frac{\partial x}{(1+x)(2+x)} = l(1+x) - l(2+x) + \text{Const}$$

$$= l\left(\frac{1+x}{2+x}\right) + \text{Const},$$

und hieraus ergiebt sich

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{(1+x)(2+x)} = l(1) - l(\tfrac{1}{2}) = l2,$$

folglich nach Nr. (2)

$$\int_0^\infty e^{-u} li(e^{-u})\,\partial u = -l2.$$

Die Gleichung (1) nimmt jetzt, wenn man x für u schreibt, die einfache Gestalt an:

$$\int_0^\infty lx\, e^{-x}\,\partial x = -C. \quad (3)$$

Auf das vorstehende Integral lässt sich auch noch das folgende

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right)\frac{\partial x}{x}$$

reduziren. Bei unbestimmter Integration ist nämlich

---

*) Archiv. Theil V. S. 206. Formel (9).

$$\int\left(\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right)\frac{\partial x}{x}=\int\frac{\partial x}{x(1+x)}-\int\frac{\partial x}{x}e^{-x}$$

$$=lx-l(1+x)-\left\{e^{-x}\int\frac{\partial x}{x}+\int e^{-x}\partial x\int\frac{\partial x}{x}\right\}$$

$$=lx-l(1+x)-e^{-x}\,lx-\int e^{-x}\partial x\,lx,$$

was sich auch in folgenden beiden Formen darstellen lässt:

$$\int\left(\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right)\frac{\partial x}{x}=l\left(\frac{x}{1+x}\right)-lx\,e^{-x}-\int lx\,e^{-x}\,\partial x$$

$$=(1-e^{-x})\,lx-l\,(1+x)-\int lxe^{-x}\partial x.$$

Der ersteren bedienen wir uns für unbegränzt wachsende, der zweiten für unbegränzt abnehmende x. Für den ersten Fall haben wir

$$\operatorname{Lim} l\left(\frac{x}{1+x}\right)=l(1)=0,$$

$$\operatorname{Lim}\,(lxe^{-x})=\operatorname{Lim}\frac{lx}{1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots}=0,$$

weil schon $\operatorname{Lim}\frac{lx}{x}=0$ und hier der Nenner $>x$ ist; ferner noch

$$\operatorname{Lim}\int lx\,e^{-x}\,\partial x=\int_0^\infty lx\,e^{-x}\,\partial x.$$

Für bis zur Null abnehmende x ist dagegen vermöge der zweiten Form

$$\operatorname{Lim}[(1-e^{-x})\,lx]-\operatorname{Lim}\left[\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{1.2}+\ldots\right)lx\right]=0,$$

weil bekanntlich für jedes positive $\mu>0$ $\operatorname{Lim} x^\mu lx=0$ ist; ferner

$$\operatorname{Lim} l(1+x)=l(1)=0,$$

$$\operatorname{Lim}\int lx\,e^{-x}\partial x=\int_0^\infty lxe^{-x}\partial x.$$

Wir haben demnach vermöge der Gleichung (4)

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right)\frac{\partial x}{x}=-\int_0^\infty lxe^{-x}\,\partial x=C.$$

Diese Gleichung kann unmittelbar dienen, um die Formel*)

---

*) Archiv. Theil II. Seite 313. Formel (7).

$$\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a}=\int_0^\infty \left\{e^{-x}-\frac{1}{(1+x)^a}\right\}\frac{\partial x}{x}$$
$$=-\int_0^\infty \left\{\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right\}\frac{\partial x}{x}+\int_0^\infty \left\{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^a}\right\}\frac{\partial x}{x}$$

in die folgende überzuführen:

$$\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a}=-C+\int_0^\infty \left\{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^a}\right\}\frac{\partial x}{x},$$

die sich für $\frac{1}{1+x}=y$ wieder in

$$\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a}=-C+\int_0^1 \frac{1-y^{a-1}}{1-y}\partial y$$

verwandelt.

III.

Ueber sphärische Dreiecke, deren Seiten im Verhältniss zu dem Halbmesser der Kugel, auf welcher sie liegen, sehr klein sind.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Das berühmte Theorem von Legendre über sphärische Dreiecke, deren Seiten im Verhältniss zu dem Halbmesser der Kugel, auf welcher sie liegen, sehr klein sind, ist allgemein bekannt, und man hat für dasselbe verschiedene Beweise gegeben, unter denen sich der im ersten Theile des Archivs. S. 436. mitgetheilte Beweis von Gauss durch seine Eleganz vorzüglich auszeichnet, und wegen seiner elementaren Form zur Aufnahme in die Elemente der Trigonometrie ganz besonders geeignet ist. Da aber dieses Theorem, welches eigentlich nur die beiden ersten Glieder der unendlichen Reihen, in die sich die Winkel des sphärischen Dreiecks nach den Potenzen des Excesses entwickeln las-

sen, berücksichtigt, für die Geodäsie von so grosser Wichtigkeit ist, so scheint mir eine weitere Entwickelung desselben, d. h. die Entwickelung noch einiger Glieder der betreffenden unendlichen Reihen, wünschenswerth zu sein. Einen Versuch dieser Art hat schon Buzengeiger in der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von B. von Lindenau und J. G. F. Bohnenberger. Sechster Band. Tübingen. 1818. S. 264. gemacht. Sein Aufsatz scheint aber nicht so bekannt geworden zu sein, wie er es verdient, da ich auch in den grösseren Werken über Geodäsie denselben nie berücksichtigt gefunden habe. Weil nun ausserdem die von ihm angewandte ganz elementare Methode, wie es mir scheint, Manches zu wünschen übrig, namentlich gar nicht erkennen lässt, wie man sich zu verhalten haben würde, wenn man die Entwickelung der Reihen noch weiter treiben wollte, so scheint mir eine neue Bearbeitung dieses wichtigen und interessanten Gegenstandes Bedürfniss zu sein, welche ich in der vorliegenden Abhandlung zu geben versuchen werde. Die von mir in derselben entwickelten Formeln sind freilich nur recurrirende, gestatten aber, wie man hoffentlich finden wird, einen leichten Fortschritt von einem Gliede zu dem nächst folgenden, wodurch es mir auch möglich geworden ist, die Entwickelung ohne grosse Schwierigkeit noch weiter zu treiben als Buzengeiger. Die Kenntniss der hier obwaltenden independenten Gesetze würde natürlich in theoretischer Rücksicht von grossem Interesse sein, ist jedoch für die praktische Anwendung von geringer Bedeutung, weil die für dieselbe so wichtige und unerlässliche Einfachheit in den höheren Gliedern sehr bald gänzlich verloren geht. Vielleicht lasse ich aber späterhin der vorliegenden, vorzugsweise die praktische Anwendung des Satzes im Auge habenden Abhandlung eine zweite von mehr rein theoretischer Natur folgen, oder gebe durch den vorliegenden Aufsatz einem der geehrten Leser des Archivs zu eignen Forschungen über diesen der Beachtung jedenfalls sehr werthen Gegenstand Veranlassung.

§. 2.

Die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks wollen wir wie gewöhnlich durch a, b, c und A, B, C, den reciproken Werth des Halbmessers der Kugel, auf welcher dasselbe liegt, aber durch x bezeichnen. Dann werden durch ax, bx, cx die Verhältnisse der Seiten des sphärischen Dreiecks zu dem Halbmesser der Kugel, oder eigentlich die Factoren dargestellt, mit denen man den Halbmesser der Kugel multipliciren müsste, um aus demselben die Seiten des Dreiecks zu erhalten; und nach den Principien der sphärischen Trigonometrie haben wir also die Gleichung

$$1)\quad \cos A = \frac{\cos ax - \cos bx \cos cx}{\sin bx \sin cx},$$

wobei man immer festzuhalten hat, dass, wie es die Natur des vorliegenden Gegenstandes erfordert, die Seiten a, b, c in einem bestimmten Längenmaasse ausgedrückt angenommen werden. Weil aber bekanntlich

$$2\cos bx\cos cx = \cos(b-c)x + \cos(b+c)x,$$
$$2\sin bx\sin cx = \cos(b-c)x - \cos(b+c)x$$

ist, so lässt sich die vorhergehende Gleichung auch unter der Form

$$2)\quad \cos A = \frac{2\cos ax - \cos(b-c)x - \cos(b+c)x}{\cos(b-c)x - \cos(b+c)x}$$

oder unter der Form

$$3)\quad \{\cos(b-c)x - \cos(b+c)x\}\cos A$$
$$= 2\cos ax - \cos(b-c)x - \cos(b+c)x$$

darstellen.

Setzen wir der Kürze wegen allgemein

$$4)\quad \begin{cases} \overset{n}{K}_x = (b-c)^n\cos(b-c)x - (b+c)^n\cos(b+c)x, \\ \overset{n}{S}_x = (b-c)^n\sin(b-c)x - (b+c)^n\sin(b+c)x \end{cases}$$

und

$$5)\quad \begin{cases} \overset{n}{\mathfrak{K}}_x = 2a^n\cos ax - (b-c)^n\cos(b-c)x - (b+c)^n\cos(b+c)x, \\ \overset{n}{\mathfrak{S}}_x = 2a^n\sin ax - (b-c)^n\sin(b-c)x - (b+c)^n\sin(b+c)x; \end{cases}$$

so ist, wie man leicht durch Differentiation nach der Veränderlichen x findet:

$$\frac{\partial\overset{n}{K}_x}{\partial x} = -(b-c)^{n+1}\sin(b-c)x + (b+c)^{n+1}\sin(b+c)x,$$

$$\frac{\partial\overset{n}{S}_x}{\partial x} = \quad (b-c)^{n+1}\cos(b-c)x - (b+c)^{n+1}\cos(b+c)x$$

und

$$\frac{\partial\overset{n}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x} = -2a^{n+1}\sin ax + (b-c)^{n+1}\sin(b-c)x + (b+c)^{n+1}\sin(b+c)x,$$

$$\frac{\partial\overset{n}{\mathfrak{S}}_x}{\partial x} = \quad 2a^{n+1}\cos ax - (b-c)^{n+1}\cos(b-c)x - (b+c)^{n+1}\cos(b+c)x;$$

also nach 4) und 5):

$$6)\quad \frac{\partial\overset{n}{K}_x}{\partial x} = -\overset{n+1}{S}_x,\ \frac{\partial\overset{n}{S}_x}{\partial x} = \overset{n+1}{K}_x$$

und

$$7)\quad \frac{\partial\overset{n}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x} = -\overset{n+1}{\mathfrak{S}}_x,\ \frac{\partial\overset{n}{\mathfrak{S}}_x}{\partial x} = \overset{n+1}{\mathfrak{K}}_x.$$

Weil nun nach 3), 4), 5)

$$8)\quad \overset{0}{K}_x \cos A = \overset{0}{\mathfrak{K}}_x$$

, so ist unter Anwendung der bekannten Bezeichnung der Binoalcoefficienten nach den Lehren der Differentialrechnung:

$$9)\quad \left.\begin{aligned}
&\overset{0}{K}_x \frac{\partial^n \cos A}{\partial x^n} \\
&+ n_1 \frac{\partial \overset{0}{K}_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-1} \cos A}{\partial x^{n-1}} \\
&+ n_2 \frac{\partial^2 \overset{0}{K}_x}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-2} \cos A}{\partial x^{n-2}} \\
&\quad \text{u. s. w.} \\
&+ n_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \overset{0}{K}_x}{\partial x^{n-1}} \cdot \frac{\partial \cos A}{\partial x} \\
&+ n_n \frac{\partial^n \overset{0}{K}_x}{\partial x^n} \cos A
\end{aligned}\right\} = \frac{\partial^n \overset{0}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x^n}.$$

Nach 6) und 7) ist aber

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overset{0}{K}_x}{\partial x} &= && -\overset{1}{S}_x, \\
\frac{\partial^2 \overset{0}{K}_x}{\partial x^2} &= -\frac{\partial \overset{1}{S}_x}{\partial x} &&= -\overset{2}{K}_x, \\
\frac{\partial^3 \overset{0}{K}_x}{\partial x^3} &= -\frac{\partial \overset{2}{K}_x}{\partial x} &&= \overset{3}{S}_x, \\
\frac{\partial^4 \overset{0}{K}_x}{\partial x^4} &= \frac{\partial \overset{3}{S}_x}{\partial x} &&= \overset{4}{K}_x, \\
\frac{\partial^5 \overset{0}{K}_x}{\partial x^5} &= \frac{\partial \overset{4}{K}_x}{\partial x} &&= -\overset{5}{S}_x, \\
\frac{\partial^6 \overset{0}{K}_x}{\partial x^6} &= -\frac{\partial \overset{5}{S}_x}{\partial x} &&= -\overset{6}{K}_x
\end{aligned}$$

u. s. w.

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overset{0}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x} &= && -\overset{1}{\mathfrak{S}}_x, \\
\frac{\partial^2 \overset{0}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x^2} &= -\frac{\partial \overset{1}{\mathfrak{S}}_x}{\partial x} &&= -\overset{2}{\mathfrak{K}}_x,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 \overset{0}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x^3} = -\frac{\partial \overset{2}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x} = \overset{3}{\mathfrak{S}}_x,$$

$$\frac{\partial^4 \overset{0}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x^4} = \frac{\partial \overset{3}{\mathfrak{S}}_x}{\partial x} = \overset{4}{\mathfrak{K}}_x,$$

$$\frac{\partial^5 \overset{0}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x^5} = \frac{\partial \overset{4}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x} = -\overset{5}{\mathfrak{S}}_x,$$

$$\frac{\partial^6 \overset{0}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x^6} = -\frac{\partial \overset{5}{\mathfrak{S}}_x}{\partial x} = -\overset{6}{\mathfrak{K}}_x,$$

u. s. w.

und wir haben daher nach 9) zur Bestimmung der Grössen

$$\cos A, \frac{\partial \cos A}{\partial x}, \frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3}, \ldots\ldots$$

die folgenden recurrirenden Gleichungen:

10)

$$\overset{0}{K}_x \cos A = \overset{0}{\mathfrak{K}}_x,$$

$$\overset{0}{K}_x \frac{\partial \cos A}{\partial x} - 1_1 . \overset{1}{S}_x \cos A = -\overset{1}{\mathfrak{S}}_x,$$

$$\overset{0}{K}_x \frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2} - 2_1 . \overset{1}{S}_x \frac{\partial \cos A}{\partial x} - 2_2 . \overset{2}{K}_x \cos A = -\overset{2}{\mathfrak{K}}_x,$$

$$\overset{0}{K}_x \frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3} - 3_1 . \overset{1}{S}_x \frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2} - 3_2 . \overset{2}{K}_x \frac{\partial \cos A}{\partial x} + 3_3 . \overset{3}{S}_x \cos A = \overset{3}{\mathfrak{S}}_x,$$

$$\left.\begin{array}{r}\overset{0}{K}_x \frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4} - 4_1 . \overset{1}{S}_x \frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3} - 4_2 . \overset{2}{K}_x \frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2} + 4_3 . \overset{3}{S}_x \frac{\partial \cos A}{\partial x} \\ + 4_4 . \overset{4}{K}_x \cos A\end{array}\right\} = \overset{4}{\mathfrak{K}}_x,$$

u. s. w.

Eine independente Bestimmung von $\frac{\partial^n \cos A}{\partial x^n}$ scheint mir wünschenswerth, gehört aber jetzt nicht zu meinem Zwecke, und dürfte vielleicht auf einem von dem vorhergehenden verschiedenen Wege noch besser zu erlangen sein. Weitere Untersuchungen hierüber einer späteren Abhandlung vorbehaltend, will ich für jetzt nur in der Kürze beiläufig bemerken, dass man, wenn man die Gleichung

$$\cos A = \frac{\cos ax - \cos bx \cos cx}{\sin bx \sin cx}$$

unmittelbar, ohne die Transformation 2) auf dieselbe anzuwenden, nach x differentiirt, Folgendes erhält. Zuerst ergiebt sich leicht

$$\sin bx^2 \sin cx^2 \frac{\partial \cos A}{\partial x}$$

$$= -\sin bx \sin cx\,(a \sin ax - b \sin bx \cos cx - c \cos bx \sin cx)$$
$$-(\cos ax - \cos bx \cos cx)\,(b \cos bx \sin cx + c \sin bx \cos cx),$$

und folglich nach einigen ganz leichten Transformationen:

$$\begin{aligned}\sin bx^2 \sin cx^2 \frac{\partial \cos A}{\partial x} = &- a \sin ax \sin bx \sin cx \\ &+ b \sin cx\,(\cos cx - \cos ax \cos bx) \\ &+ c \sin bx\,(\cos bx - \cos ax \cos cx).\end{aligned}$$

Weil nun aber bekanntlich

$$\sin ax \sin cx \cos B = \cos bx - \cos ax \cos cx,$$
$$\sin ax \sin bx \cos C = \cos cx - \cos ax \cos bx$$

ist, so ist

$$\begin{aligned}\sin bx^2 \sin cx^2 \frac{\partial \cos A}{\partial x} = &- a \sin ax \sin bx \sin cx \\ &+ b \sin ax \sin bx \sin cx \cos C \\ &+ c \sin ax \sin bx \sin cx \cos B,\end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial \cos A}{\partial x} = -\frac{\sin ax\,(a - b \cos C - c \cos B)}{\sin bx \sin cx},$$

welches eine nicht unelegante Formel ist, und es frägt sich daher, ob sich nicht vielleicht auf diesem Wege, wenn man nämlich die Winkel des Dreiecks mit in die Betrachtung hineinzieht, ein einfacheres independentes Gesetz finden liesse, als dies auf dem oben von mir eingeschlagenen Wege möglich zu sein scheint, worüber aber weitere Untersuchungen hier nicht zu meinem Zwecke gehören, weshalb ich nach dieser Abschweifung, die ich jedoch absichtlich nicht unterdrücken wollte, um vielleicht einen oder den anderen zu weiteren Nachforschungen zu veranlassen, jetzt sogleich wieder zu meinem eigentlichen Gegenstande zurückkehre.

Setzt man nämlich in den Gleichungen 10) die Veränderliche $x=0$, so erhält man, weil offenbar $\overset{0}{K}_0=0$, $\overset{0}{\mathfrak{K}}_0=0$ und allgemein $\overset{n}{S}_0=0$, $\overset{n}{\mathfrak{S}}_0=0$ ist, die folgenden Gleichungen:

$2_2 . \overset{2}{K}_0(\cos A) = \overset{2}{\mathfrak{K}}_0,$

$3_2 . \overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial \cos A}{\partial x}\right) = 0,$

$4_2 . \overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) - 4_4 . \overset{4}{K}_0(\cos A) = -\overset{4}{\mathfrak{K}}_0,$

$$5_2 . \overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3}\right) - 5_4 . \overset{4}{K}_0\left(\frac{\partial \cos A}{\partial x}\right) = 0,$$

$$6_2 . \overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right) - 6_4 . \overset{4}{K}_0\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) + 6_6 . \overset{6}{K}_0(\cos A) = \overset{6}{\mathfrak{K}}_0,$$

$$7_2 . \overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^5 \cos A}{\partial x^5}\right) - 7_4 . \overset{4}{K}_0\left(\frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3}\right) + 7_6 . \overset{6}{K}_0\left(\frac{\partial \cos A}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r} 8_2 . \overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right) - 8_4 . \overset{4}{K}_0\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right) + 8_6 . \overset{6}{K}_0\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) \\ - 8_8 . \overset{8}{K}(\cos A) \end{array}\right\} = -\overset{8}{\mathfrak{K}}_0,$$

$$\left.\begin{array}{r} 9_2 . \overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^7 \cos A}{\partial x^7}\right) - 9_4 . \overset{4}{K}_0\left(\frac{\partial^5 \cos A}{\partial x^5}\right) + 9_6 . \overset{6}{K}_0\left(\frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3}\right) \\ - 9_8 . \overset{8}{K}_0\left(\frac{\partial \cos A}{\partial x}\right) \end{array}\right\} = 0,$$

u. s. w.

in denen die Werthe, welche die Grössen

$$\cos A, \ \frac{\partial \cos A}{\partial x}, \ \frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3}, \ldots$$

für $x = 0$ erhalten, auf gewöhnliche Weise durch Einschliessung in Parenthesen bezeichnet worden sind.

Weil nach dem Obigen

$$\overset{2}{K}_0 = (b-c)^2 - (b+c)^2 = -4bc$$

ist, und also nicht verschwindet, so ergiebt sich aus den vorhergehenden Gleichungen auf der Stelle, dass die Grössen

$$\left(\frac{\partial \cos A}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3}\right), \left(\frac{\partial^5 \cos A}{\partial x^5}\right), \left(\frac{\partial^7 \cos A}{\partial x^7}\right), \ldots$$

sämmtlich verschwinden, und zur Bestimmung der Grössen

$$(\cos A), \left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right), \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right), \left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right), \ldots$$

hat man die folgenden Gleichungen, deren Fortschreitungsgesetz ganz unzweideutig vor Augen liegt:

11)

$$2_2 . \overset{2}{K}_0(\cos A) = \overset{2}{\mathfrak{K}}_0,$$

$$4_2 . \overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) - 4_4 . \overset{4}{K}_0(\cos A) = -\overset{4}{\mathfrak{K}}_0,$$

$$6_2 . \overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right) - 6_4 . \overset{4}{K}_0\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) + 6_6 . \overset{6}{K}_0(\cos A) = \overset{6}{\mathfrak{K}}_0,$$

$$\left.\begin{array}{r} 8_2 . \overset{2}{K}_0 \left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right) - 8_4 . \overset{4}{K}_0 \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right) + 8_6 . \overset{6}{K}_0 \left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) \\ - 8_8 . \overset{8}{K}_0 (\cos A) \end{array}\right\} = - \overset{8}{\mathfrak{K}}_0,$$

u. s. w.

oder

12)

$$(\cos A) = \frac{\overset{2}{\mathfrak{K}}_0}{2_2 . \overset{2}{K}_0},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) = - \frac{\overset{4}{\mathfrak{K}}_0}{4_2 . \overset{2}{K}_0} + \frac{4_4 . \overset{4}{K}_0}{4_2 . \overset{2}{K}_0} (\cos A),$$

$$\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right) = \frac{\overset{6}{\mathfrak{K}}_0}{6_2 . \overset{2}{K}_0} - \frac{6_6 . \overset{6}{K}_0}{6_2 . \overset{2}{K}_0} (\cos A) + \frac{6_4 . \overset{4}{K}_0}{6_2 . \overset{2}{K}_0} \left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right),$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right) = - \frac{\overset{8}{\mathfrak{K}}_0}{8_2 . \overset{2}{K}_0} + \frac{8_8 . \overset{8}{K}_0}{8_2 . \overset{2}{K}_0} (\cos A) - \frac{8_6 . \overset{6}{K}_0}{8_2 . \overset{2}{K}_0} \left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) \\ + \frac{8_4 . \overset{4}{K}_0}{8_2 . \overset{2}{K}_0} \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right), \end{aligned}$$

u. s. w.

Diese Gleichungen wollen wir nun im folgenden Paragraphen zur Bestimmung der Grössen

$$(\cos A), \left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right), \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right), \left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right), \ldots$$

anwenden.

§. 3.

Bevor wir jedoch dazu übergehen können, ist es nöthig, die folgenden allgemeinen Betrachtungen vorauszuschicken.

Zuerst bemerken wir, dass die Grösse

$$a^{2n+4}(x^2 - y^2) - a^2(x^{2n+4} - y^{2n+4}) - x^2 y^{2n+4} + y^2 x^{2n+4}$$

immer durch die Grösse

$$a^4 - a^2(x^2 + y^2) + x^2 y^2$$

ohne Rest theilbar ist, was auf folgende Art leicht bewiesen werden kann.

Es ist

$$\begin{aligned}
&a^{2n+4}(x^2-y^2)-a^2(x^{2n+4}-y^{2n+4})-x^2y^{2n+4}+y^2x^{2n+4}\\
=\;&a^{2n+4}x^2-a^2x^{2n+4}-a^{2n+2}x^2y^2+y^2x^{2n+4}\\
&-a^{2n+4}y^2+a^2y^{2n+4}+a^{2n+2}x^2y^2-x^2y^{2n+4}\\
=\;&x^2(a^{2n+2}-x^{2n+2})\,a^2-x^2(a^{2n+2}-x^{2n+2})\,y^2\\
&-y^2(a^{2n+2}-y^{2n+2})\,a^2+y^2(a^{2n+2}-x^{2n+2})\,x^2\\
=\;&x^2(a^{2n+2}-x^{2n+2})(a^2-y^2)-y^2(a^{2n+2}-y^{2n+2})(a^2-x^2)
\end{aligned}$$

und

$$a^4-a^2(x^2+y^2)+x^2y^2=(a^2-x^2)(a^2-y^2),$$

also

$$\begin{aligned}
&\frac{a^{2n+4}(x^2-y^2)-a^2(x^{2n+4}-y^{2n+4})-x^2y^{2n+4}+y^2x^{2n+4}}{a^4-a^2(x^2+y^2)+x^2y^2}\\
&=x^2\,\frac{a^{2n+2}-x^{2n+2}}{a^2-x^2}-y^2\,\frac{a^{2n+2}-y^{2n+2}}{a^2-y^2},
\end{aligned}$$

also nach einem bekannten arithmetischen Satze:

$$\begin{aligned}
&\frac{a^{2n+4}(x^2-y^2)-a^2(x^{2n+4}-y^{2n+4})-x^2y^{2n+4}+y^2x^{2n+4}}{a^4-a^2(x^2+y^2)+x^2y^2}\\
=\;&x^2(a^{2n}+a^{2n-2}x^2+a^{2n-4}x^4+\ldots+a^2x^{2n-2}+x^{2n})\\
&-y^2(a^{2n}+a^{2n-2}y^2+a^{2n-4}y^4+\ldots+a^2y^{2n-2}+y^{2n})\\
=\;&a^{2n}(x^2-y^2)+a^{2n-2}(x^4-y^4)+a^{2n-4}(x^6-y^6)+\ldots\\
&\ldots+a^2(x^{2n}-y^{2n})+x^{2n+2}-y^{2n+2},
\end{aligned}$$

wodurch der Satz bewiesen und zugleich der Quotient gefunden ist.

Weil nun

$$(\cos A)=\frac{\overset{2}{\mathfrak{K}}_0}{\overset{2}{K}_0}$$

ist, so ist allgemein

$$\overset{2n}{K}_0(\cos A)-\overset{2n}{\mathfrak{K}}_0=\frac{\overset{2}{\mathfrak{K}}_0\overset{2n}{K}_0-\overset{2}{K}_0\overset{2n}{\mathfrak{K}}_0}{\overset{2}{K}_0},$$

und folglich nach dem Obigen, wenn man für

$$\overset{2}{K}_0,\ \overset{2n}{K}_0;\ \overset{2}{\mathfrak{K}}_0,\ \overset{2n}{\mathfrak{K}}_0$$

ihre Werthe aus 4) und 5) einführt:

$$\begin{aligned}
&\overset{2n}{K}_0(\cos A)-\overset{2n}{\mathfrak{K}}_0\\
=\;&\frac{\left\{\begin{array}{l}\{2a^2-(b-c)^2-(b+c)^2\}\{(b-c)^{2n}-(b+c)^{2n}\}\\-\{(b-c)^2-(b+c)^2\}\{2a^{2n}-(b-c)^{2n}-(b+c)^{2n}\}\end{array}\right\}}{(b-c)^2-(b+c)^2},
\end{aligned}$$

lso, wie man nach leichter Entwickelung des Zählers findet:

$$\overset{2n}{K}_0(\cos A)-\overset{2n}{\mathfrak{K}}_0$$
$$=-2\frac{\left\{\begin{array}{l}a^{2n}\{(b-c)^2-(b+c)^2\}-a^2\{(b-c)^{2n}-(b+c)^{2n}\}\\-(b-c)^2(b+c)^{2n}+(b+c)^2(b-c)^{2n}\end{array}\right\}}{(b-c)^2-(b+c)^2},$$

nd folglich, wenn man jetzt, indem man vorher

$$x=b-c,\ y=b+c$$

etzt, den obigen Satz anwendet:

$$\overset{2n}{K}_0(\cos A)-\overset{2n}{\mathfrak{K}}_0$$
$$=-\frac{2\{a^4-a^2((b-c)^2+(b+c)^2)+(b-c)^2(b+c)^2}{(b-c)^2-(b+c)^2}\left\{\begin{array}{l}((b-c)^2-(b+c)^2)a^{2n-4}\\+((b-c)^4-(b+c)^4)a^{2n-6}\\+((b-c)^6-(b+c)^6)a^{2n-8}\\\quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\+((b-c)^{2n-4}-(b+c)^{2n-4})a^2\\+(b-c)^{2n-2}-(b+c)^{2n-2}\end{array}\right\}$$

oder

$$\overset{2n}{K}_0(\cos A)-\overset{2n}{\mathfrak{K}}_0$$
$$=\frac{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{2bc}\left\{\begin{array}{l}((b-c)^2-(b+c)^2)a^{2n-4}\\+((b-c)^4-(b+c)^4)a^{2n-6}\\+((b-c)^6-(b+c)^6)a^{2n-8}\\\quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\+((b-c)^{2n-4}-(b+c)^{2n-4})a^2\\+(b-c)^{2n-2}-(b+c)^{2n-2}\end{array}\right\},$$

also, wenn der Kürze wegen

$$13)\quad \Sigma_n = \quad ((b-c)^2-(b+c)^2)\,a^{2n-4}$$
$$+((b-c)^4-(b+c)^4)\,a^{2n-6}$$
$$+((b-c)^6-(b+c)^6)\,a^{2n-8}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+((b-c)^{2n-4}-(b+c)^{2n-4})\,a^2$$
$$+(b-e)^{2n-2}-(b+c)^{2n-2}$$

gesetzt wird:

$$14)\quad \overset{2n}{K}_0(\cos A)-\overset{2n}{\mathfrak{K}}_0$$
$$=\frac{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{2bc}\,\Sigma_n.$$

Bezeichnen wir nun aber die Winkel des ebenen Dreiecks, dessen Seiten a, b, c sind, durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; so ist nach einer bekannten Formel der ebenen Trigonometrie:

$$\sin\mathfrak{A}^2=-\frac{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{4b^2c^2},$$

also

$$\frac{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{2bc}=-2bc\sin\mathfrak{A}^2,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$15)\quad \overset{2n}{K}_0(\cos A)-\overset{2n}{\mathfrak{K}}_0=-2bc\,\Sigma_n\sin\mathfrak{A}^2.$$

Nach 12) ist jetzt

$$(\cos A)=\frac{\overset{2}{\mathfrak{K}}_0}{\overset{2}{K}_0}=\frac{2a^2-(b-c)^2-(b+c)^2}{(b-c)^2-(b+c)^2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

d. i. nach einer bekannten Formel der ebenen Trigonometrie:

$$16)\quad (\cos A)=\cos\mathfrak{A},$$

ein Resultat, dessen Richtigkeit auch ohne die vorhergehende Rechnung sogleich von selbst in die Augen fällt.

Ferner ist nach 11):

$$4_2\,.\,\overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^2\cos A}{\partial x^2}\right)=\overset{4}{K}_0(\cos A)-\overset{4}{\mathfrak{K}}_0,$$

d. i. nach 15):

$$6\,\overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^2\cos A}{\partial x^2}\right)=-2bc\,\Sigma_2\sin\mathfrak{A}^2.$$

Es ist aber nach 4) und 13):

$$\overset{2}{K}_0 = (b-c)^2 - (b+c)^2 = -4bc,$$
$$\Sigma_2 = (b-c)^2 - (b+c)^2 = -4bc;$$

also

$$17) \quad \left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) = -\tfrac{1}{3}\, bc \sin \mathfrak{A}^2.$$

Auf ähnliche Art ist nach 11):

$$6_2 . \overset{2}{K}_0 \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right) = 15 \overset{4}{K}_0 \left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) - \overset{6}{K}_0 (\cos A) + \overset{6}{\mathfrak{K}}_0,$$

also nach 15) und 17):

$$15 \overset{2}{K}_0 \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right) = -bc(5\overset{4}{K}_0 - 2\Sigma_3) \sin \mathfrak{A}^2,$$

und folglich, weil $\overset{2}{K}_0 = -4bc$ ist:

$$60 \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right) = (5\overset{4}{K}_0 - 2\Sigma_3) \sin \mathfrak{A}^2.$$

Nun ist aber

$$5\overset{4}{K}_0 - 2\Sigma_3$$
$$= 5\{(b-c)^4 - (b+c)^4\} - 2\{(b-c)^2 - (b+c)^2\} a^2 - 2\{(b-c)^4 - (b+c)^4\}$$
$$= 3\{(b-c)^4 - (b+c)^4\} - 2\{(b-c)^2 - (b+c)^2\} a^2$$
$$= 3\{(b-c)^4 - (b+c)^4\} + 8a^2 bc$$
$$= -24bc(b^2+c^2) + 8a^2 bc = 8bc(a^2 - 3b^2 - 3c^2),$$

folglich

$$18) \quad \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right) = \tfrac{2}{15}\, bc(a^2 - 3b^2 - 3c^2) \sin \mathfrak{A}^2$$
$$= -\tfrac{2}{15}\, bc(3b^2 + 3c^2 - a^2) \sin \mathfrak{A}^2.$$

Eben so ist nach 11):

$$8_2 . \overset{2}{K}_0 \left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right)$$
$$= 70 \overset{4}{K}_0 \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right) - 28 \overset{6}{K}_0 \left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) + \overset{8}{K}_0 (\cos A) - \overset{8}{\mathfrak{K}}_0,$$

und folglich nach 15), 17) und 18):

$$28 \overset{2}{K}_0 \left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right)$$
$$= bc\{\tfrac{2}{3} \overset{4}{K}_0 (a^2 - 3b^2 - 3c^2) + {}^{28}\overset{6}{K}_0 - 2\Sigma_4\} \sin \mathfrak{A}^2,$$

also

$$4\left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right)$$

$$=-\left\{\tfrac{1}{3}\overset{4}{K}_0(a^2-3b^2-3c^2)+\tfrac{1}{3}\overset{6}{K}_0-\tfrac{1}{14}\Sigma_4\right\}\sin\mathfrak{A}^2.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3}\overset{4}{K}_0(a^2-3b^2-3c^2)+\tfrac{1}{3}\overset{6}{K}_0-\tfrac{1}{14}\Sigma_4\\
=\;&\tfrac{1}{3}(a^2-3b^2-3c^2)\{(b-c)^4-(b+c)^4\}\\
&+\tfrac{1}{3}\{(b-c)^6-(b+c)^6\}\\
&-\tfrac{1}{14}\left\{\begin{array}{l}((b-c)^2-(b+c)^2)a^4\\ +((b-c)^4-(b+c)^4)a^2\\ +((b-c)^6-(b+c)^6)\end{array}\right\}\\
=\;&\tfrac{11}{42}\{(b-c)^6-(b+c)^6\}-(b^2+c^2)\{(b-c)^4-(b+c)^4\}\\
&+\tfrac{11}{42}\{(b-c)^4-(b+c)^4\}a^2-\tfrac{1}{14}\{(b-c)^2-(b+c)^2\}a^4\\
=\;&bc(\tfrac{34}{7}b^4+\tfrac{116}{21}b^2c^2+\tfrac{34}{7}c^4)-b\tfrac{44}{21}c(b^2+c^2)a^2+\tfrac{2}{7}bca^4,
\end{aligned}$$

also nach dem Obigen

$$19)\quad\left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right)$$

$$=-bc\left\{\begin{array}{l}\tfrac{17}{14}b^4+\tfrac{29}{21}b^2c^2+\tfrac{17}{14}c^4\\ -\tfrac{11}{21}(b^2+c^2)a^2+\tfrac{1}{14}a^4\end{array}\right\}\sin\mathfrak{A}^2,$$

oder

$$20)\quad\left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right)$$

$$=-\tfrac{1}{7}bc\left\{\begin{array}{l}\tfrac{17}{2}b^4+\tfrac{29}{3}b^2c^2+\tfrac{17}{2}c^4\\ -\tfrac{11}{3}(b^2+c^2)a^2+\tfrac{1}{2}a^4\end{array}\right\}\sin\mathfrak{A}^2.$$

Diese Rechnung noch weiter fortzuführen, liegt jetzt nicht in unserer Absicht, da die folgenden Ausdrücke immer weitläufiger werden, und wir haben daher jetzt, nur erst mit Vernachlässigung von Gliedern der achten Ordnung, für $\cos A$ den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
21)\quad \cos A=\cos\mathfrak{A}&-\tfrac{1}{6}bc\sin\mathfrak{A}^2x^2\\
&-\tfrac{1}{180}bc(3b^2+3c^2-a^2)\sin\mathfrak{A}^2x^4\\
&-\tfrac{1}{5040}bc\left\{\begin{array}{l}\tfrac{17}{2}b^4+\tfrac{29}{3}b^2c^2+\tfrac{17}{2}c^4\\ -\tfrac{11}{3}(b^2+c^2)a^2+\tfrac{1}{2}a^4\end{array}\right\}\sin\mathfrak{A}^2x^6,
\end{aligned}$$

wo, wenn r den Halbmesser der Kugel bezeichnet, auf welcher das sphärische Dreieck liegt, nach dem Obigen bekanntlich

$$22)\quad x=\frac{1}{r}$$

ist.

Bezeichnen wir den Flächeninhalt des ebenen Dreiecks, dessen Seiten und Winkel a, b, c und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sind, durch $\mathfrak{D}$; so ist bekanntlich

$$\mathfrak{D}=\tfrac{1}{2}bc\sin\mathfrak{A},$$

also

$$\mathfrak{D}^2=\tfrac{1}{4}b^2c^2\sin\mathfrak{A}^2,$$

und folglich

$$bc\sin\mathfrak{A}^2=\frac{4}{bc}\mathfrak{D}^2.$$

Daher ist auch:

$$23)\quad \cos A=\cos\mathfrak{A}-\tfrac{2}{3}\cdot\frac{\mathfrak{D}^2}{bc}x^2 \\ -\tfrac{1}{45}(3b^2+3c^2-a^2)\frac{\mathfrak{D}^2}{bc}x^4 \\ -\tfrac{1}{1260}\left\{\begin{array}{c}\tfrac{17}{2}b^4+\tfrac{29}{3}b^2c^2+\tfrac{17}{2}c^4\\ -\tfrac{11}{3}(b^2+c^2)a^2+\tfrac{1}{2}a^4\end{array}\right\}\frac{\mathfrak{D}^2}{bc}x^6,$$

mit demselben Grade der Genauigkeit wie vorher.

Auch ist

$$bc\sin\mathfrak{A}^2=2\mathfrak{D}\sin\mathfrak{A},$$

und folglich nach 21):

$$24)\quad \cos A=\cos\mathfrak{A}-\tfrac{1}{3}\mathfrak{D}\sin\mathfrak{A}\,.\,x^2 \\ -\tfrac{1}{90}(3b^2+3c^2-a^2)\mathfrak{D}\sin\mathfrak{A}\,.\,x^4 \\ -\tfrac{1}{2520}\left\{\begin{array}{c}\tfrac{17}{2}b^4+\tfrac{29}{3}b^2c^2+\tfrac{17}{2}c^4\\ -\tfrac{11}{3}(b^2+c^2)a^2+\tfrac{1}{2}a^4\end{array}\right\}\mathfrak{D}\sin\mathfrak{A}\,.\,x^6.$$

Setzen wir

$$a_1=ax,\ b_1=bx,\ c_1=cx$$

und

$$\mathfrak{D}_1=\tfrac{1}{2}b_1c_1\sin\mathfrak{A};$$

so lässt sich die vorhergehende Gleichung, wie sogleich erhellen wird, auch auf folgende Art ausdrücken:

$$25)\quad \cos A=\cos\mathfrak{A}-\tfrac{1}{3}\mathfrak{D}_1\sin\mathfrak{A} \\ -\tfrac{1}{90}(3b_1{}^2+3c_1{}^2-a_1{}^2)\mathfrak{D}_1\sin\mathfrak{A} \\ -\tfrac{1}{2520}\left\{\begin{array}{c}\tfrac{17}{2}b_1{}^4+\tfrac{29}{3}b_1{}^2c_1{}^2+\tfrac{17}{2}c_1{}^4\\ -\tfrac{11}{3}(b_1{}^2+c_1{}^2)a_1{}^2+\tfrac{1}{2}a_1{}^4\end{array}\right\}\mathfrak{D}_1\sin\mathfrak{A}$$

oder

$$26)\ \cos\mathfrak{A}-\cos A$$
$$=\tfrac{1}{8}\left\{\begin{array}{l}1+\frac{1}{30}(3b_1^2+3c_1^2-a_1^2)\\ +\frac{1}{840}\left\{\begin{array}{l}\frac{17}{2}b_1^4+\frac{20}{3}b_1^2c_1^2+\frac{17}{2}c_1^4\\ -\frac{11}{3}(b_1^2+c_1^2)a_1^2+\frac{1}{2}a_1^4\end{array}\right\}\end{array}\right\}\mathfrak{D}_1\sin\mathfrak{A},$$

bei welcher Formel wie früher nur erst Glieder der achten Ordnung vernachlässigt worden sind.

§. 4.

Bezeichnen wir jetzt den halben Excess des gegebenen sphärischen Dreiecks durch E, so ist bekanntlich

$$27)\ \cos E=\frac{1+\cos ax+\cos bx+\cos cx}{4\cos\frac{1}{2}ax\cos\frac{1}{2}bx\cos\frac{1}{2}cx}.$$

Nach einer bekannten goniometrischen Formel ist aber

$$2\cos\tfrac{1}{2}ax\cos\tfrac{1}{2}bx=\cos\tfrac{1}{2}(a+b)x+\cos\tfrac{1}{2}(a-b)x,$$

also

$$\begin{aligned}&4\cos\tfrac{1}{2}ax\cos\tfrac{1}{2}bx\cos\tfrac{1}{2}cx\\ &=2\cos\tfrac{1}{2}(a+b)x\cos\tfrac{1}{2}cx+2\cos\tfrac{1}{2}(a-b)x\cos\tfrac{1}{2}cx\\ &=\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c)x+\cos\tfrac{1}{2}(b+c-a)x+\cos\tfrac{1}{2}(a+c-b)x+\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c)x,\end{aligned}$$

und folglich

$$28)\ \cos E=$$
$$\frac{1+\cos ax+\cos bx+\cos cx}{\cos\frac{1}{2}(a+b+c)x+\cos\frac{1}{2}(b+c-a)x+\cos\frac{1}{2}(a+c-b)x+\cos\frac{1}{2}(a+b-c)x}.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen überhaupt

$$29)\left\{\begin{aligned}\overset{n}{K'}_x=\ &(a+b+c)^n\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c)x\\ &+(b+c-a)^n\cos\tfrac{1}{2}(b+c-a)x\\ &+(a+c-b)^n\cos\tfrac{1}{2}(a+c-b)x\\ &+(a+b-c)^n\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c)x,\\ \overset{n}{S'}_x=\ &(a+b+c)^n\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)x\\ &+(b+c-a)^n\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)x\\ &+(a+c-b)^n\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)x\\ &+(a+b-c)^n\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)x\end{aligned}\right.$$

und

$$30)\left\{\begin{aligned}\overset{n}{\mathfrak{K}'}_x&=a^n\cos ax+b^n\cos bx+c^n\cos cx,\\ \overset{n}{\mathfrak{S}'}_x&=a^n\sin ax+b^n\sin bx+c^n\sin cx;\end{aligned}\right.$$

so ist

$$\frac{\partial \overset{n}{K'}_x}{\partial x} = -\tfrac{1}{2}(a+b+c)^{n+1}\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)x$$
$$-\tfrac{1}{2}(b+c-a)^{n+1}\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)x$$
$$-\tfrac{1}{2}(a+c-b)^{n+1}\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)x$$
$$-\tfrac{1}{2}(a+b-c)^{n+1}\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)x,$$

$$\frac{\partial \overset{n}{S'}_x}{\partial x} = \tfrac{1}{2}(a+b+c)^{n+1}\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c)x$$
$$+\tfrac{1}{2}(b+c-a)^{n+1}\cos\tfrac{1}{2}(b+c-a)x$$
$$+\tfrac{1}{2}(a+c-b)^{n+1}\cos\tfrac{1}{2}(a+c-b)x$$
$$+\tfrac{1}{2}(a+b-c)^{n+1}\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c)x$$

und

$$\frac{\partial \overset{n}{\mathfrak{K}'}_x}{\partial x} = -a^{n+1}\sin ax - b^{n+1}\sin bx - c^{n+1}\sin cx,$$

$$\frac{\partial \overset{n}{\mathfrak{S}'}_x}{\partial x} = a^{n+1}\cos ax + b^{n+1}\cos bx + c^{n+1}\cos cx;$$

also nach 29) und 30):

$$31)\quad \frac{\partial \overset{n}{K'}_x}{\partial x} = -\tfrac{1}{2}\overset{n+1}{S'}_x,\quad \frac{\partial \overset{n}{S'}_x}{\partial x} = \tfrac{1}{2}\overset{n+1}{K'}_x$$

und

$$32)\quad \frac{\partial \overset{n}{\mathfrak{K}'}_x}{\partial x} = -\overset{n+1}{\mathfrak{S}'}_x,\quad \frac{\partial \overset{n}{\mathfrak{S}'}_x}{\partial x} = \overset{n+1}{\mathfrak{K}'}_x.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$33)\quad \cos E = \frac{1+\overset{0}{\mathfrak{K}'}_x}{\overset{0}{K'}_x}$$

oder

$$34)\quad \overset{0}{K'}_x \cos E = 1 + \overset{0}{\mathfrak{K}'}_x$$

ist, so ist nach dem schon oben angewandten bekannten Satze der Differentialrechnung:

$$\left.\begin{aligned}
35)\qquad & \overset{0}{K}'_x \frac{\partial^n \cos E}{\partial x^n} \\
& + n_1 \frac{\partial \overset{0}{K}'_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-1} \cos E}{\partial x^{n-1}} \\
& + n_2 \frac{\partial^2 \overset{0}{K}'_x}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-2} \cos E}{\partial x^{n-2}} \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + n_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \overset{0}{K}'_x}{\partial x^{n-1}} \cdot \frac{\partial \cos E}{\partial x} \\
& + n_n \frac{\partial^n \overset{0}{K}'_x}{\partial x^n} \cos E
\end{aligned}\right\} = \frac{\partial^n \overset{0}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x^n}.$$

Nach 31) und 32) ist aber

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overset{0}{K}'_x}{\partial x} &= && -\tfrac{1}{2} \overset{1}{S}'_x, \\
\frac{\partial^2 \overset{0}{K}'_x}{\partial x^2} &= -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\partial \overset{1}{S}'_x}{\partial x} &&= -(\tfrac{1}{2})^2 \cdot \overset{2}{K}'_x, \\
\frac{\partial^3 \overset{0}{K}'_x}{\partial x^3} &= -(\tfrac{1}{2})^2 \cdot \frac{\partial \overset{2}{K}'_x}{\partial x} &&= (\tfrac{1}{2})^3 \cdot \overset{3}{S}'_x, \\
\frac{\partial^4 \overset{0}{K}'_x}{\partial x^4} &= (\tfrac{1}{2})^3 \cdot \frac{\partial \overset{3}{S}'_x}{\partial x} &&= (\tfrac{1}{2})^4 \cdot \overset{4}{K}'_x, \\
\frac{\partial^5 \overset{0}{K}'_x}{\partial x^5} &= (\tfrac{1}{2})^4 \cdot \frac{\partial \overset{4}{K}'_x}{\partial x} &&= -(\tfrac{1}{2})^5 \cdot \overset{5}{S}'_x, \\
\frac{\partial^6 \overset{0}{K}'_x}{\partial x^6} &= -(\tfrac{1}{2})^5 \cdot \frac{\partial \overset{5}{S}'_x}{\partial x} &&= -(\tfrac{1}{2})^6 \cdot \overset{6}{K}'_x
\end{aligned}$$

u. s. w.

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overset{0}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x} &= && -\overset{1}{\mathfrak{S}}'_x, \\
\frac{\partial^2 \overset{0}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x^2} &= -\frac{\partial \overset{1}{\mathfrak{S}}'_x}{\partial x} &&= -\overset{2}{\mathfrak{K}}'_x, \\
\frac{\partial^3 \overset{0}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x^3} &= -\frac{\partial \overset{2}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x} &&= \overset{3}{\mathfrak{S}}'_x, \\
\frac{\partial^4 \overset{0}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x^4} &= \frac{\partial \overset{3}{\mathfrak{S}}'_x}{\partial x} &&= \overset{4}{\mathfrak{K}}'_x,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^5 \overset{0}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x^5} = \frac{\partial \overset{4}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x} = -\overset{5}{\mathfrak{S}}'_x,$$

$$\frac{\partial^6 \overset{0}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x^6} = -\frac{\partial \overset{5}{\mathfrak{S}}'_x}{\partial x} = -\overset{6}{\mathfrak{K}}'_x,$$

u. s. w.

und man erhält daher nach 34) und 35) die folgenden Gleichungen:

36)

$$\overset{0}{K}'_x \cos E = 1 + \overset{0}{\mathfrak{K}}'_x,$$

$$\overset{0}{K}'_x \frac{\partial \cos E}{\partial x} - 1_1 \cdot \tfrac{1}{2} \overset{1}{S}'_x \cos E = -\overset{1}{\mathfrak{S}}'_x,$$

$$\overset{0}{K}'_x \frac{\partial^2 \cos E}{\partial x^2} - 2_1 \cdot \tfrac{1}{2} \overset{1}{S}'_x \frac{\partial \cos E}{\partial x} - 2_2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \overset{2}{K}'_x \cos E = -\overset{2}{\mathfrak{K}}'_x,$$

$$\overset{0}{K}'_x \frac{\partial^3 \cos E}{\partial x^3} - 3_1 \cdot \tfrac{1}{2} \overset{1}{S}'_x \frac{\partial^2 \cos E}{\partial x^2} - 3_2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \overset{2}{K}'_x \frac{\partial \cos E}{\partial x} + 3_3 \cdot (\tfrac{1}{2})^3 \overset{3}{S}'_x \cos E = \overset{3}{\mathfrak{S}}'_x,$$

$$\left.\begin{array}{r} \overset{0}{K}'_x \dfrac{\partial^4 \cos E}{\partial x^4} - 4_1 \cdot \tfrac{1}{2} \overset{1}{S}'_x \dfrac{\partial^3 \cos E}{\partial x^3} - 4_2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \overset{2}{K}'_x \dfrac{\partial^2 \cos E}{\partial x^2} + 4_3 \cdot (\tfrac{1}{2})^3 \overset{3}{S}'_x \dfrac{\partial \cos E}{\partial x} \\ + 4_4 \cdot (\tfrac{1}{2})^4 \overset{4}{K}'_x \cos E \end{array}\right\} = \overset{4}{\mathfrak{K}}'_x,$$

u. s. w.

Weil nun nach dem Obigen allgemein $\overset{n}{S}'_0 = 0$, $\overset{n}{\mathfrak{S}}'_0 = 0$ ist und offenbar auch E für $x = 0$ verschwindet, so erhalten wir aus dem Vorhergehenden die folgenden Gleichungen:

$$\overset{0}{K}'_0 = 1 + \overset{0}{\mathfrak{K}}'_0,$$

$$\overset{0}{K}'_0 \left(\frac{\partial \cos E}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\overset{0}{K}'_0 \left(\frac{\partial^2 \cos E}{\partial x^2}\right) - 2_2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \overset{2}{K}'_0 = -\overset{2}{\mathfrak{K}}'_0,$$

$$\overset{0}{K}'_0 \left(\frac{\partial^3 \cos E}{\partial x^3}\right) - 3_2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \overset{2}{K}'_0 \left(\frac{\partial \cos E}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\overset{0}{K}'_0 \left(\frac{\partial^4 \cos E}{\partial x^4}\right) - 4_2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \overset{2}{K}'_0 \left(\frac{\partial^2 \cos E}{\partial x^2}\right) + 4_4 \cdot (\tfrac{1}{2})^4 \overset{4}{K}'_0 = \overset{4}{\mathfrak{K}}'_0,$$

$$\overset{0}{K}'_0 \left(\frac{\partial^5 \cos E}{\partial x^5}\right) - 5_2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \overset{2}{K}'_0 \left(\frac{\partial^3 \cos E}{\partial x^3}\right) + 5_4 \cdot (\tfrac{1}{2})^4 \overset{4}{K}'_0 \left(\frac{\partial \cos E}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r} \overset{0}{K}'_0 \left(\dfrac{\partial^6 \cos E}{\partial x^6}\right) - 6_2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \overset{2}{K}'_0 \left(\dfrac{\partial^4 \cos E}{\partial x^4}\right) + 6_4 \cdot (\tfrac{1}{2})^4 \overset{4}{K}'_0 \left(\dfrac{\partial^2 \cos E}{\partial x^2}\right) \\ - 6_6 \cdot (\tfrac{1}{2})^6 \overset{6}{K}'_0 \end{array}\right\} = -\overset{6}{\mathfrak{K}}'_0,$$

$$\left.\begin{array}{r} \overset{0}{K}'_0 \left(\dfrac{\partial^7 \cos E}{\partial x^7}\right) - 7_2 \cdot (\tfrac{1}{2}) \overset{2}{K}'_0 \left(\dfrac{\partial^5 \cos E}{\partial x^5}\right) + 7_4 \cdot (\tfrac{1}{2})^4 \overset{4}{K}'_0 \left(\dfrac{\partial^3 \cos E}{\partial x^3}\right) \\ - 7_6 \cdot (\tfrac{1}{2})^6 \overset{6}{K}'_0 \left(\dfrac{\partial \cos E}{\partial x}\right) \end{array}\right\} = 0,$$

u. s. w.

aus denen, weil nach dem Obigen $\overset{0}{K}'_0=4$ ist und folglich nicht verschwindet, auf der Stelle erhellet, dass die Grössen

$$\left(\frac{\partial\cos E}{\partial x}\right),\left(\frac{\partial^3\cos E}{\partial x^3}\right),\left(\frac{\partial^5\cos E}{\partial x^5}\right),\left(\frac{\partial^7\cos E}{\partial x^7}\right),\ldots$$

sämmtlich verschwinden, und zur Bestimmung der Grössen

$$\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right),\left(\frac{\partial^4\cos E}{\partial x^4}\right),\left(\frac{\partial^6\cos E}{\partial x^6}\right),\left(\frac{\partial^8\cos E}{\partial x^8}\right),\ldots$$

hat man die folgenden Gleichungen:

37)

$$\overset{0}{K}'_0\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right)-2_2\cdot(\tfrac{1}{2})^2\overset{2}{K}'_0=-\overset{2}{\mathfrak{K}}'_0,$$

$$\overset{0}{K}'_0\left(\frac{\partial^4\cos E}{\partial x^4}\right)-4_2\cdot(\tfrac{1}{2})^2\overset{2}{K}'_0\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right)+4_4\cdot(\tfrac{1}{2})^4\overset{4}{K}'_0=\overset{4}{\mathfrak{K}}'_0,$$

$$\left.\begin{array}{r}\overset{0}{K}'_0\left(\frac{\partial^6\cos E}{\partial x^6}\right)-6_2\cdot(\tfrac{1}{2})^2\overset{2}{K}'_0\left(\frac{\partial^4\cos E}{\partial x^4}\right)+6_4\cdot(\tfrac{1}{2})^4\overset{4}{K}'_0\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right)\\ -6_6\cdot(\tfrac{1}{2})^6\overset{6}{K}'_0\end{array}\right\}=-\overset{6}{\mathfrak{K}}'_0$$

$$\left.\begin{array}{r}\overset{0}{K}'_0\left(\frac{\partial^8\cos E}{\partial x^8}\right)-8_2\cdot(\tfrac{1}{2})^2\overset{2}{K}'_0\left(\frac{\partial^6\cos E}{\partial x^6}\right)+8_4\cdot(\tfrac{1}{2})^4\overset{4}{K}'_0\left(\frac{\partial^4\cos E}{\partial x^4}\right)\\ -8_6\cdot(\tfrac{1}{2})^6\overset{6}{K}'_0\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right)+8_8\cdot(\tfrac{1}{2})^8\overset{8}{K}_0\end{array}\right\}=\overset{8}{\mathfrak{K}}'_0,$$

u. s. w.

deren Gesetz ganz deutlich vor Augen liegt.

Die erste dieser Gleichungen giebt:

$$4\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right)=\tfrac{1}{4}\overset{2}{K}'_0-\overset{2}{\mathfrak{K}}'_0,$$

d. i. nach dem Obigen

$$4\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right)$$

$$=\tfrac{1}{4}\{(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(a+c-b)^2+(a+b-c)^2\}-(a^2+b^2+c^2)$$

also, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$4\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right)=(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2),$$

d. i.

$$38)\quad\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right)=0.$$

Die zweite der obigen Gleichungen giebt also:

$$4\left(\frac{\partial^4 \cos E}{\partial x^4}\right) = \overset{4}{\mathfrak{K}}'_0 - \tfrac{1}{16}\overset{4}{K}'_0,$$

d. i. nach dem Obigen

$$4\left(\frac{\partial^4 \cos E}{\partial x^4}\right)$$

$$= (a^4+b^4+c^4) - \tfrac{1}{16}\{(a+b+c)^4 + (b+c-a)^4 + (a+c-b)^4 + (a+b-c)^4\},$$

und folglich, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$4\left(\frac{\partial^4 \cos E}{\partial x^4}\right)$$

$$= (a^4+b^4+c^4) - \tfrac{1}{4}\{a^4+b^4+c^4+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}$$

$$= \tfrac{3}{4}\{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\},$$

also

$$39)\quad \left(\frac{\partial^4 \cos E}{\partial x^4}\right) = \tfrac{3}{16}\{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) = -4b^2c^2 \sin \mathfrak{A}^2,$$

woraus sich

$$40)\quad \left(\frac{\partial^4 \cos E}{\partial x^4}\right) = -\tfrac{3}{4}b^2c^2 \sin \mathfrak{A}^2$$

ergiebt.

Daher ist nach den obigen Gleichungen:

$$4\left(\frac{\partial^6 \cos E}{\partial x^6}\right) = -\tfrac{45}{16}b^2c^2\overset{2}{K}'_0 \sin \mathfrak{A}^2 + \tfrac{1}{64}\overset{6}{K}'_0 - \overset{6}{\mathfrak{K}}'_0.$$

Aber

$$\tfrac{1}{64}\overset{6}{K}'_0 - \overset{6}{\mathfrak{K}}'_0$$

$$= \tfrac{1}{64}\{(a+b+c)^6 + (b+c-a)^6 + (a+c-b)^6 + (a+b-c)^6\} - (a^6+b^6+c^6),$$

und, wie man leicht findet,

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^6 + (b+c-a)^6 + (a+c-b)^6 + (a+b-c)^6 \\
&= 4a^6 + 60a^4b^2 + 60a^2b^4 + 4b^6 \\
&\quad + (60a^4 + 360a^2b^2 + 60b^4)c^2 \\
&\quad + (60a^2 + 60b^2)c^4 \\
&\quad + 4c^6,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{64}\{(a+b+c)^6 + (b+c-a)^6 + (a+c-b)^6 + (a+b-c)^6\} \\
&= \tfrac{1}{16}(a^6 + 15a^4b^2 + 15a^2b^4 + b^6) \\
&\quad + \tfrac{1}{16}(15a^4 + 90a^2b^2 + 15b^4)c^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{16}(15a^2 + 15b^2)c^4 \\
&\quad + \tfrac{1}{16}c^6,
\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{64}\overset{6}{K}'_0-\overset{6}{\mathfrak{K}}'_0=&-\tfrac{15}{16}(a^6-a^4b^2-a^2b^4+b^6)\\&+\tfrac{15}{16}(a^4+6a^2b^2+b^4)c^2\\&+\tfrac{15}{16}(a^2+b^2)c^4\\&-\tfrac{15}{16}c^6.\end{aligned}$$

Dividirt man nun mit

$$\begin{aligned}&a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\&=c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4-2a^2b^2+b^4\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}&c^6-(a^2+b^2)c^4\\&-(a^4+6a^2b^2+b^4)c^2\\&+(a^6-a^4b^2-a^2b^4+b^6)\end{aligned}$$

hinein, so erhält man als Quotienten die Grösse

$$a^2+b^2+c^2,$$

und es ist folglich nach dem Vorhergehenden

$$\tfrac{1}{64}\overset{6}{K}'_0-\overset{6}{\mathfrak{K}}'_0=-\tfrac{15}{16}(a^2+b^2+c^2)\{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\tfrac{1}{64}\overset{6}{K}'_0-\overset{6}{\mathfrak{K}}'_0=\tfrac{15}{4}b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\sin\mathfrak{A}^2.$$

Weil nun

$$\overset{2}{K}'_0=(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(a+c-b)^2+(a+b-c)^2=4(a^2+b^2+c^2)$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned}4\left(\frac{\partial^6\cos E}{\partial x^6}\right)&=-\tfrac{45}{4}b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\sin\mathfrak{A}^2+\tfrac{15}{4}b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\sin\mathfrak{A}^2\\&=-\tfrac{15}{2}b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\sin\mathfrak{A}^2,\end{aligned}$$

also

$$41)\quad\left(\frac{\partial^6\cos E}{\partial x^6}\right)=-\tfrac{15}{8}b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\sin\mathfrak{A}^2.$$

Also ist nach den obigen Gleichungen:

$$\begin{aligned}4\left(\frac{\partial^8\cos E}{\partial x^8}\right)=&-\tfrac{105}{8}b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\overset{2}{K}'_0\sin\mathfrak{A}^2\\&+\tfrac{105}{32}b^2c^2\overset{4}{K}'_0\sin\mathfrak{A}^2\\&-\tfrac{1}{256}\overset{8}{K}'_0+\overset{8}{\mathfrak{K}}'_0.\end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{256}\overset{8}{K}'_0-\overset{8}{\mathfrak{K}}'_0\\&=\tfrac{1}{256}\{(a+b+c)^8+(b+c-a)^8+(a+c-b)^8+(a+b-c)^8\}-(a^8+b^8+c\end{aligned}$$

und, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^8+(b+c-a)^8+(a+c-b)^8+(a+b-c)^8 \\ =4a^8+112a^6b^2+280a^4b^4+112a^2b^6+4b^8 \\ +(112a^6+1680a^4b^2+1680a^2b^4+112b^6)c^2 \\ +(280a^4+1680a^2b^2+280b^4)c^4 \\ +(112a^2+112b^2)c^6 \\ +4c^8,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{256}\{(a+b+c)^8+(b+c-a)^8+(a+c-b)^8+(a+b-c)^8\} \\ =\tfrac{1}{64}(a^8+28a^6b^2+70a^4b^4+28a^2b^6+b^8) \\ +\tfrac{1}{64}(28a^6+420a^4b^2+420a^2b^4+28b^6)c^2 \\ +\tfrac{1}{64}(70a^4+420a^2b^2+70b^4)c^4 \\ +\tfrac{1}{64}(28a^2+28b^2)c^6 \\ +\tfrac{1}{64}c^8,\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{256}\overset{8}{K}'_0-\overset{8}{\mathfrak{K}}'_0 \\ =-\tfrac{1}{64}(63a^8-28a^6b^2-70a^4b^4-28a^2b^6+63b^8) \\ +\tfrac{1}{64}(28a^6+420a^4b^2+420a^2b^4+28b^6)c^2 \\ +\tfrac{1}{64}(70a^4+420a^2b^2+70b^4)c^4 \\ +\tfrac{1}{64}(28a^2+28b^2)c^6 \\ -\tfrac{63}{64}c^8.\end{aligned}$$

Dividirt man nun mit

$$\begin{aligned}a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \\ =c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4-2a^2b^2+b^4\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}63c^8-(28a^2+28b^2)c^6 \\ -(70a^4+420a^2b^2+70b^4)c^4 \\ -(28a^6+420a^4b^2+420a^2b^4+28b^6)c^2 \\ +(63a^8-28a^6b^2-70a^4b^4-28a^2b^6+63b^8)\end{aligned}$$

hinein, so erhält man als Quotienten die Grösse

$$\begin{aligned}63c^4+98(a^2+b^2)c^2+63a^4+98a^2b^2+63b^4 \\ =63(a^4+b^4+c^4)+98(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2),\end{aligned}$$

und es ist folglich

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{256}\overset{8}{K}'_0-\overset{8}{\mathfrak{K}}'_0 \\ =-\tfrac{1}{64}\{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\} \\ \times\{63(a^4+b^4+c^4)+98(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\},\end{aligned}$$

d. i. nach dem Obigen

$$\tfrac{1}{256}\overset{8}{K'}_0-\overset{8}{\mathfrak{K}'}_0$$
$$=\tfrac{1}{16}b^2c^2\{63(a^4+b^4+c^4)+98(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}\sin\mathfrak{A}^2.$$

Weil nun

$$\overset{2}{K'}_0=(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(a+c-b)^2+(a+b-c)^2=4(a^2+b^2+e^2),$$
$$\overset{4}{K'}_0=(a+b+c)^4+(b+c-a)^4+(a+c-b)^4+(a+b-c)^4$$
$$=4\{a^4+b^4+c^4+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}$$

ist, so ist nach dem Obigen

$$\left(\frac{\partial^8\cos E}{\partial x^8}\right)=-\tfrac{105}{8}b^2c^2(a^2+b^2+c^2)^2\sin\mathfrak{A}^2$$
$$+\tfrac{105}{32}b^2c^2\{a^4+b^4+c^4+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}\sin\mathfrak{A}^2$$
$$-\tfrac{1}{64}b^2c^2\{63(a^4+b^4+c^4)+98(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}\sin\mathfrak{A}^2,$$

also

$$42)\quad \left(\frac{\partial^8\cos E}{\partial x^8}\right)=-\tfrac{7}{64}b^2c^2\{99(a^4+b^4+c^4)+74(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}\sin\mathfrak{A}^2.$$

Daher ist

$$43)\quad \cos E=$$
$$1-\tfrac{1}{32}b^2c^2\sin\mathfrak{A}^2.x^4$$
$$-\tfrac{1}{384}b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\sin\mathfrak{A}^2.x^6$$
$$-\tfrac{1}{368640}b^2c^2\{99(a^4+b^4+c^4)+74(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}\sin\mathfrak{A}^2.x^8,$$

wobei nur erst Glieder der zehnten Ordnung vernachlässigt sind.

Führt man die aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannte Grösse $\mathfrak{D}$ ein, so wird

$$44)\quad \cos E=$$
$$1-\tfrac{1}{8}\mathfrak{D}^2x^4$$
$$-\tfrac{1}{96}(a^2+b^2+c^2)\mathfrak{D}^2x^6$$
$$-\tfrac{1}{92160}\{99(a^4+b^4+c^4)+74(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}\mathfrak{D}^2x^8.$$

Führt man die Grössen $a_1=ax$, $b_1=bx$, $c_1=cx$ ein, so wird

$$45)\quad \cos E=$$
$$1-\tfrac{1}{32}b_1{}^2c_1{}^2\sin\mathfrak{A}^2$$
$$-\tfrac{1}{384}b_1{}^2c_1{}^2(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)\sin\mathfrak{A}^2$$
$$-\tfrac{1}{368640}b_1{}^2c_1{}^2\{99(a_1{}^4+b_1{}^4+c_1{}^4)+74(a_1{}^2b_1{}^2+b_1{}^2c_1{}^2+c_1{}^2a_1{}^2)\}\sin\mathfrak{A}^2$$

und, wenn man wieder

$$\mathfrak{D}_1=\tfrac{1}{2}b_1c_1\sin\mathfrak{A}$$

setzt:

$$46)\quad \cos E =$$

$$1-\tfrac{1}{8}\mathfrak{D}_1^2$$
$$-\tfrac{1}{96}(a_1^2+b_1^2+c_1^2)\mathfrak{D}_1^2$$
$$-\tfrac{1}{92160}\{99(a_1^4+b_1^4+c_1^4)+74(a_1^2b_1^2+b_1^2c_1^2+c_1^2a_1^2)\}\mathfrak{D}_1^2.$$

§. 5.

Weil

$$47)\quad \frac{\partial . \cos A^2}{\partial x}=2\cos A\frac{\partial \cos A}{\partial x}$$

oder

$$48)\quad \tfrac{1}{2}.\frac{\partial . \cos A^2}{\partial x}=\cos A\frac{\partial \cos A}{\partial x}$$

ist, so ist nach dem schon in dem vorhergehenden Paragraphen angewandten bekannten Satze aus der Differentialrechnung allgemein:

$$\begin{aligned}
49)\quad \tfrac{1}{2}.\frac{\partial^{n+1} . \cos A^2}{\partial x^{n+1}} = {} & \cos A\frac{\partial^{n+1}\cos A}{\partial x^{n+1}}\\
& + n_1\frac{\partial \cos A}{\partial x}.\frac{\partial^{n}\cos A}{\partial x^{n}}\\
& + n_2\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}.\frac{\partial^{n-1}\cos A}{\partial x^{n-1}}\\
& \text{u. s. w.}\\
& + n_{n-1}\frac{\partial^{n-1} \cos A}{\partial x^{n-1}}.\frac{\partial^{2}\cos A}{\partial x^{2}}\\
& + n_n\frac{\partial^{n} \cos A}{\partial x^{n}}.\frac{\partial \cos A}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Setzt man nun hierin für n eine gerade Zahl, so erhellet auf der Stelle, dass, so wie nach §. 2. die Grössen

$$\left(\frac{\partial \cos A}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3}\right),\ \left(\frac{\partial^5 \cos A}{\partial x^5}\right),\ \left(\frac{\partial^7 \cos A}{\partial x^7}\right),\ldots.$$

sämmtlich verschwinden, auch die Grössen

$$\left(\frac{\partial . \cos A^2}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial^3 . \cos A^2}{\partial x^3}\right),\ \left(\frac{\partial^5 . \cos A^2}{\partial x^5}\right),\ \left(\frac{\partial^7 . \cos A^2}{\partial x^7}\right),\ldots.$$

sämmtlich verschwinden. Weil aber

$$\cos A^2+\sin A^2=1,$$

und folglich

$$\frac{\partial^n . \cos A^2}{\partial x^n}+\frac{\partial^n . \sin A^2}{\partial x^n}=0$$

ist, so verschwinden offenbar auch die Grössen

$$\left(\frac{\partial . \sin A^2}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial^3 . \sin A^2}{\partial x^3}\right), \left(\frac{\partial^5 . \sin A^2}{\partial x^5}\right), \left(\frac{\partial^7 . \sin A^2}{\partial x^7}\right), \ldots$$

sämmtlich, und da nun ganz auf ähnliche Art wie vorher

$$50)\ \tfrac{1}{2} . \frac{\partial \sin A^2}{\partial x} = \sin A \frac{\partial \sin A}{\partial x},$$

also allgemein

$$\begin{aligned} 51)\ \tfrac{1}{2} . \frac{\partial^{n+1} . \sin A^2}{\partial x^{n+1}} = &\ \sin A \frac{\partial^{n+1} \sin A}{\partial x^{n+1}} \\ &+ n_1 \frac{\partial \sin A}{\partial x} . \frac{\partial^n \sin A}{\partial x^n} \\ &+ n_2 \frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2} . \frac{\partial^{n-1} \sin A}{\partial x^{n-1}} \\ &\text{u. s. w.} \\ &+ n_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \sin A}{\partial x^{n-1}} . \frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2} \\ &+ n_n \frac{\partial^n \sin A}{\partial x^n} . \frac{\partial \sin A}{\partial x} \end{aligned}$$

ist, so erhellet, wenn man in dieser Gleichung nach und nach $n = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ setzt, sehr leicht, dass auch die Grössen

$$\left(\frac{\partial \sin A}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial^3 \sin A}{\partial x^3}\right), \left(\frac{\partial^5 \sin A}{\partial x^5}\right), \left(\frac{\partial^7 \sin A}{\partial x^7}\right), \ldots$$

sämmtlich verschwinden.

Weil endlich

$$52)\ \frac{\partial \cos A}{\partial x} = -\sin A \frac{\partial A}{\partial x},$$

und folglich allgemein

$$\begin{aligned} 53)\ \frac{\partial^{n+1} \cos A}{\partial x^{n+1}} = &-\sin A \frac{\partial^{n+1} A}{\partial x^{n+1}} \\ &- n_1 \frac{\partial \sin A}{\partial x} . \frac{\partial^n A}{\partial x^n} \\ &- n_2 \frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2} . \frac{\partial^{n-1} A}{\partial x^{n-1}} \\ &\text{u. s. w.} \\ &- n_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \sin A}{\partial x^{n-1}} . \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \\ &- n_n \frac{\partial^n \sin A}{\partial x^n} . \frac{\partial A}{\partial x} \end{aligned}$$

ist, so erhellet auch, wenn man in dieser Gleichung nach und nach $n=0, 2, 4, 6, 8, \ldots.$ setzt, sehr leicht, dass die Grössen

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\right),\ \left(\frac{\partial^5 A}{\partial x^5}\right),\ \left(\frac{\partial^7 A}{\partial x^7}\right), \ldots.$$

sämmtlich verschwinden.

Weil nun

$$\frac{\partial \cos A}{\partial x}=-\sin A\frac{\partial A}{\partial x},\quad \frac{\partial \sin A}{\partial x}=\cos A\frac{\partial A}{\partial x}$$

ist, so hat man die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}=-\sin A\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}-\frac{\partial \sin A}{\partial x}\cdot\frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}=-\sin A\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}&-3\frac{\partial \sin A}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\\&-3\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\\&-\frac{\partial^3 \sin A}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial A}{\partial x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}=-\sin A\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}&-5\frac{\partial \sin A}{\partial x}\cdot\frac{\partial^5 A}{\partial x^5}\\&-10\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\\&-10\frac{\partial^3 \sin A}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\\&-5\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\\&-\frac{\partial^5 \sin A}{\partial x^5}\cdot\frac{\partial A}{\partial x},\end{aligned}$$

u. s. w.

und

$$\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}=\cos A\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial \cos A}{\partial x}\cdot\frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}=\cos A\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}&+3\frac{\partial \cos A}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\\&+3\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\\&+\frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial A}{\partial x},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^6 \sin A}{\partial x^6} = \cos A \frac{\partial^6 A}{\partial x^6} + 5 \;\frac{\partial \cos A}{\partial x} \cdot \frac{\partial^5 A}{\partial x^5}$$

$$+ 10 \frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^4 A}{\partial x^4}$$

$$+ 10 \frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial x^3}$$

$$+ 5 \;\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

$$+ \;\frac{\partial^5 \cos A}{\partial x^5} \cdot \frac{\partial A}{\partial x},$$

u. s. w.

also nach dem Vorhergehenden:

$$\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) = -(\sin A)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right) = -(\sin A)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right) - 3\left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right) = -(\sin A)\left(\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}\right) - 10\left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right) - 5\left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

u. s. w.

und

$$\left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right) = (\cos A)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right) = (\cos A)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right) + 3\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^6 \sin A}{\partial x^6}\right) = (\cos A)\left(\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}\right) + 10\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right)$$

$$+ 5\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

u. s. w.

Ordnet man nun diese Gleichungen auf folgende Art:

$$\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) = -(\sin A)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right) = (\cos A)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right) = -(\sin A)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right) - 3\left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right) = (\cos A)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right) + 3\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right) = -(\sin A)\left(\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}\right) - 10\left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right) - 5\left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^6 \sin A}{\partial x^6}\right) = (\cos A)\left(\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}\right) + 10\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right)$$
$$+ 5\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

u. s. w.,

so sieht man, dass sich mit Hülfe derselben mittelst der aus §. 3. bekannten Werthe von

$$\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right),\ \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right),\ \left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right),\ \ldots.$$

nach und nach die Grössen

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),\ \left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right),\ \left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right),\ \left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right),\ \left(\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}\right),\ \ldots.$$

finden lassen, wobei man nur zu beachten hat, dass nach dem Obigen, und wie sich auch von selbst versteht, $(\cos A) = \cos \mathfrak{A}$, $(\sin A) = \sin \mathfrak{A}$, $(A) = \mathfrak{A}$ ist.

Es ist also

$$(\sin A)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right) = -\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right),$$

und folglich nach 17):

$$54)\quad \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right) = \tfrac{1}{3} bc \sin \mathfrak{A}.$$

Folglich ist nach dem Obigen ferner:

$$55)\quad \left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right) = \tfrac{1}{3} bc \sin \mathfrak{A} \cos \mathfrak{A},$$

oder

$$56)\quad \left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right) = \tfrac{1}{6}(b^2 + c^2 - a^2) \sin \mathfrak{A}.$$

Ferner ist

$$(\sin A)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right) = -3\left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right)$$
$$= -\tfrac{1}{3} b^2 c^2 \sin \mathfrak{A}^2 \cos \mathfrak{A}$$
$$+ \tfrac{2}{15} bc(3b^2 + 3c^2 - a^2) \sin \mathfrak{A}^2$$
$$= bc\left\{\tfrac{2}{15}(3b^2 + 3c^2 - a^2) - \tfrac{1}{6}(b^2 + c^2 - a^2)\right\} \sin \mathfrak{A}^2,$$

d. i., wie man leicht findet:

$$57)\quad \left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right) = \tfrac{1}{30} bc(7b^2 + 7c^2 + a^2) \sin \mathfrak{A}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$58)\quad \left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right) = \tfrac{1}{3}bc\,\{\tfrac{1}{10}(7b^2+7c^2+a^2)\cos\mathfrak{A} - bc\sin\mathfrak{A}^2\}\sin\mathfrak{A}$$

oder

$$\left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right) = \tfrac{1}{60}(7b^2+7c^2+a^2)(b^2+c^2-a^2)\sin\mathfrak{A}$$
$$+\tfrac{1}{12}\{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}\sin\mathfrak{A},$$

d. i., wie man nach leichter Rechnung findet:

$$59)\quad \left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right) = \tfrac{1}{15}(a^4+3b^4+3c^4-4a^2b^2+b^2c^2-4c^2a^2)\sin\mathfrak{A}.$$

Ferner ist

$$(\sin A)\left(\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}\right) = -5\left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right) - 10\left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right)$$
$$= -\tfrac{1}{9}bc(a^4+3b^4+3c^4-4a^2b^2+b^2c^2-4c^2a^2)\sin\mathfrak{A}^2$$
$$-\tfrac{1}{18}bc(b^2+c^2-a^2)(7b^2+7c^2+a^2)\sin\mathfrak{A}^2$$
$$+\tfrac{1}{7}bc\left\{\begin{matrix}\tfrac{17}{2}b^4+\tfrac{29}{3}b^2c^2+\tfrac{17}{2}c^4\\ -\tfrac{11}{3}(b^2+c^2)a^2+\tfrac{1}{2}a^4\end{matrix}\right\}\sin\mathfrak{A}^2,$$

und folglich, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$60)\quad \left(\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}\right)$$
$$= \tfrac{1}{63}bc(a^4+31b^4+31c^4+16a^2b^2+31b^2c^2+16c^2a^2)\sin\mathfrak{A}.$$

Folglich ist nur erst mit Vernachlässigung von Gliedern der achten Ordnung:

$$61)\quad A = \mathfrak{A} + \tfrac{1}{6}bc\sin\mathfrak{A}\,.\,x^2$$
$$+\tfrac{1}{720}bc(a^2+7b^2+7c^2)\sin\mathfrak{A}\,.\,x^4$$
$$+\tfrac{1}{45360}bc(a^4+31b^4+31c^4+16a^2b^2+31b^2c^2+16c^2a^2)\sin\mathfrak{A}\,.\,x^6,$$

oder

$$62)\quad A = \mathfrak{A} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{D}x^2$$
$$+\tfrac{1}{360}(a^2+7b^2+7c^2)\mathfrak{D}x^4$$
$$+\tfrac{1}{22680}(a^4+31b^4+31c^4+16a^2b^2+31b^2c^2+16c^2a^2)\mathfrak{D}x^6,$$

oder auch

$$63)\quad A = \mathfrak{A} + \tfrac{1}{6}b_1c_1\sin\mathfrak{A}$$
$$+\tfrac{1}{720}b_1c_1(a_1{}^2+7b_1{}^2+7c_1{}^2)\sin\mathfrak{A}$$
$$+\tfrac{1}{45360}b_1c_1(a_1{}^4+31b_1{}^4+31c_1{}^4+16a_1{}^2b_1{}^2+31b_1{}^2c_1{}^2+16c_1{}^2a_1{}^2)\sin\mathfrak{A},$$

oder

64) $A=\mathfrak{A}+\frac{1}{3}\mathfrak{D}_1$
$$+\tfrac{1}{360}(a_1^2+7b_1^2+7c_1^2)\mathfrak{D}_1$$
$$+\tfrac{1}{22680}(a_1^4+31b_1^4+31c_1^4+16a_1^2b_1^2+31b_1^2c_1^2+16c_1^2a_1^2)\mathfrak{D}_1.$$

Mit Vernachlässigung von Gliedern der sechsten Ordnung ist aber:

65) $\sin A=\sin\mathfrak{A}-\frac{1}{12}(a^2-b^2-c^2)\sin\mathfrak{A}\,.\,x^2$
$$+\tfrac{1}{360}(a^4+3b^4+3c^4-4a^2b^2+b^2c^2-4c^2a^2)\sin\mathfrak{A}\,.\,x^4,$$

oder

66) $\sin A=\dfrac{2\mathfrak{D}}{bc}-\frac{1}{6}(a^2-b^2-c^2)\dfrac{\mathfrak{D}}{bc}x^2$
$$+\tfrac{1}{180}(a^4+3b^4+3c^4-4a^2b^2+b^2c^2-4c^2a^2)\frac{\mathfrak{D}}{bc}x^4.$$

Auch ist mit demselben Grade der Genauigkeit:

67) $\sin A=\sin\mathfrak{A}-\frac{1}{12}(a_1^2-b_1^2-c_1^2)\sin\mathfrak{A}$
$$+\tfrac{1}{360}(a_1^4+3b_1^4+3c_1^4-4a_1^2b_1^2+b_1^2c_1^2-4c_1^2a_1^2)\sin\mathfrak{A},$$

oder

68) $\sin A=\dfrac{2\mathfrak{D}_1}{b_1c_1}-\frac{1}{6}(a_1^2-b_1^2-c_1^2)\dfrac{\mathfrak{D}_1}{b_1c_1}$
$$+\tfrac{1}{180}(a_1^4+3b_1^4+3c_1^4-4a_1^2b_1^2+b_1^2c_1^2-4c_1^2a_1^2)\frac{\mathfrak{D}_1}{b_1c_1}.$$

Umgekehrt ist auch, wie man leicht findet, mit demselben Grade der Genauigkeit:

65*) $\sin\mathfrak{A}=\sin A+\frac{1}{12}(a^2-b^2-c^2)\sin A\,.\,x^2$
$$+\tfrac{1}{720}(3a^4-b^4-c^4-2a^2b^2+8b^2c^2-2c^2a^2)\sin A\,.\,x^4$$

oder

67*) $\sin\mathfrak{A}=\sin A+\frac{1}{12}(a_1^2-b_1^2-c_1^2)\sin A$
$$+\tfrac{1}{720}(3a_1^4-b_1^4-c_1^4-2a_1^2b_1^2+8b_1^2c_1^2-2c_1^2a_1^2)\sin A.$$

§. 6.

Nach 62) hat man nun

$$A=\mathfrak{A}+\tfrac{1}{3}\mathfrak{D}x^2$$
$$+\tfrac{1}{360}(a^2+7b^2+7c^2)\mathfrak{D}x^4$$
$$+\tfrac{1}{22680}(a^4+31b^4+31c^4+16a^2b^2+31b^2c^2+16c^2a^2)\mathfrak{D}x^6,$$

$$B=\mathfrak{B}+\tfrac{1}{3}\mathfrak{D}x^2$$
$$+\tfrac{1}{360}(b^2+7a^2+7c^2)\mathfrak{D}x^4$$
$$+\tfrac{1}{22680}(b^4+31a^4+31c^4+16b^2c^2+31c^2a^2+16a^2b^2)\mathfrak{D}x^6,$$

$$C=\mathfrak{C}+\tfrac{1}{3}\mathfrak{D}x^2$$
$$+\tfrac{1}{360}(c^2+7a^2+7b^2)\mathfrak{D}x^4$$
$$+\tfrac{1}{22680}(c^4+31a^4+31b^4+16c^2a^2+31a^2b^2+16b^2c^2)\mathfrak{D}x^6.$$

Addirt man diese drei Gleichungen zusammen, so erhält man, weil

$$(A+B+C)-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})=2E$$

ist:

$$69)\ 2E=\mathfrak{D}x^2+\tfrac{1}{24}(a^2+b^2+c^2)\mathfrak{D}x^4$$
$$+\tfrac{1}{360}(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\mathfrak{D}x^6$$

oder

$$70)\ 2E=\mathfrak{D}_1+\tfrac{1}{24}(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)\mathfrak{D}_1$$
$$+\tfrac{1}{360}(a_1{}^4+b_1{}^4+c_1{}^4+a_1{}^2b_1{}^2+b_1{}^2c_1{}^2+c_1{}^2a_1{}^2)\mathfrak{D}_1,$$

oder

$$71)\ \frac{2E}{\mathfrak{D}_1}=1+\tfrac{1}{24}(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)$$
$$+\tfrac{1}{360}(a_1{}^4+b_1{}^4+c_1{}^4+a_1b_1{}^2+b_1{}^2c_1{}^2+c_1{}^2a_1{}^2).$$

Bestimmt man aber aus der Gleichung 69) die Grösse $\mathfrak{D}x^2$, so erhält man ohne Schwierigkeit mit Vernachlässigung von Gliedern der achten *) Ordnung:

$$72)\ \mathfrak{D}x^2=2E-\tfrac{1}{12}(a^2+b^2+c^2)Ex^2$$
$$-\tfrac{1}{1440}(3a^4+3b^4+3c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2)Ex^4,$$

oder

$$73)\ \mathfrak{D}_1=2E-\tfrac{1}{12}(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)E$$
$$-\tfrac{1}{1440}(3a_1{}^4+3b_1{}^4+3c_1{}^4-2a_1{}^2b_1{}^2-2b_1{}^2c_1{}^2-2c_1{}^2a_1{}^2)E,$$

oder

$$74)\ \frac{\mathfrak{D}_1}{2E}=1-\tfrac{1}{24}(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)$$
$$-\tfrac{1}{2880}(3a_1{}^4+3b_1{}^4+3c_1\ -2a_1{}^2b_1{}^2-2b_1{}^2c_1{}^2-2c_1{}^2a_1{}^2).$$

Führt man nun den gefundenen Ausdruck von $\mathfrak{D}x^2$ in den obigen Ausdruck von A ein, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$75)\ A=\mathfrak{A}+\tfrac{2}{3}E$$
$$-\tfrac{1}{90}(2a^2-b^2-c^2)Ex^2$$
$$-\tfrac{1}{45360}(38a^4-19b^4-19c^4-a^2b^2+2b^2c^2-c^2a^2)Ex^4,$$

wobei wieder nur Grössen der achten Ordnung vernachlässigt sind. Auch ist mit demselben Grade der Genauigkeit:

---

*) Da nämlich nach 69) E selbst eine Grösse der zweiten Ordnung ist.

$$76)\quad A=\mathfrak{A}+\tfrac{2}{3}E$$
$$-\tfrac{1}{90}(2a_1^2-b_1^2-c_1^2)E$$
$$-\tfrac{1}{45360}(38a_1^4-19b_1^4-19c_1^4-a_1^2b_1^2+2b_1^2c_1^2-c_1^2a_1^2)E.$$

Umgekehrt aber ist

$$77)\quad \mathfrak{A}=A-\tfrac{2}{3}E$$
$$+\tfrac{1}{90}(2a^2-b^2-c^2)Ex^2$$
$$+\tfrac{1}{45360}(38a^4-19b^4-19c^4-a^2b^2+2b^2c^2-c^2a^2)Ex^4$$

oder

$$78)\quad \mathfrak{A}=A-\tfrac{2}{3}E$$
$$+\tfrac{1}{90}(2a_1^2-b_1^2-c_1^2)E$$
$$+\tfrac{1}{45360}(38a_1^4-19b_1^4-19c_1^4-a_1^2b_1^2+2b_1^2c_1^2-c_1^2a_1^2)E.$$

Ganz ähnliche Formeln ergeben sich für die Winkel B, C und $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$!

Geht man blos bis auf Glieder der zweiten Ordnung, so ist mit Vernachlässigung von Gliedern der vierten Ordnung:

$$79)\quad \begin{cases} A=\mathfrak{A}+\tfrac{2}{3}E, & \mathfrak{A}=A-\tfrac{2}{3}E; \\ B=\mathfrak{B}+\tfrac{2}{3}E, & \mathfrak{B}=B-\tfrac{2}{3}E; \\ C=\mathfrak{C}+\tfrac{2}{3}E, & \mathfrak{C}=C-\tfrac{2}{3}E; \end{cases}$$

welches bekanntlich das Legendre'sche Theorem ist, wenn man nur überlegt, dass in allen unsern obigen Formeln E den **halben** Excess bezeichnet.

Leicht würde man in die obigen Formeln auch den ganzen Excess einführen können, was wir dem Leser überlassen.

Um eine Controle für die Richtigkeit unserer Rechnungen zu haben, wollen wir mittelst des aus 69) sich ergebenden Ausdrucks von E, nämlich

$$E=\tfrac{1}{4}\mathfrak{D}x^2+\tfrac{1}{48}(a^2+b^2+c^2)\mathfrak{D}x^4$$
$$+\tfrac{1}{720}(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\mathfrak{D}x^6,$$

die Grösse $\cos E$ nach der Formel

$$\cos E=1-\tfrac{1}{2}E^2+\tfrac{1}{24}E^4$$

entwickeln, und den sich ergebenden Ausdruck mit dem oben in 44) auf ganz anderem Wege gefundenen Ausdrucke von $\cos E$ vergleichen.

Es ist aber, wie man leicht findet:

$$E^2=\tfrac{1}{4}\mathfrak{D}^2x^4+\tfrac{1}{46}(a^2+b^2+c^2)\mathfrak{D}^2x^6$$
$$+\tfrac{1}{2304}(a^2+b^2+c^2)^2\mathfrak{D}^2x^8$$
$$+\tfrac{1}{720}(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\mathfrak{D}^2x^8$$
$$=\tfrac{1}{4}\mathfrak{D}^2x^4+\tfrac{1}{48}(a^2+b^2+c^2)\mathfrak{D}^2x^6$$
$$+\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2304}(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2)\\+\tfrac{1}{720}(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\end{array}\right\}\mathfrak{D}^2x^8$$

und

$$E^4=\tfrac{1}{16}\mathfrak{D}^4x^8=\tfrac{1}{64}b^2c^2\mathfrak{D}^2\sin\mathfrak{A}^2\,.\,x^8$$
$$=-\tfrac{1}{256}(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2)\mathfrak{D}^2x^8,$$

also

$$\cos E=1-\tfrac{1}{8}\mathfrak{D}^2x^4$$
$$-\tfrac{1}{96}(a^2+b^2+c^2)\mathfrak{D}^2x^6$$
$$-\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{4608}(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2)\\+\tfrac{1}{1440}(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\+\tfrac{1}{6144}(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2)\end{array}\right\}\mathfrak{D}^2x^8.$$

Da nun

$$\tfrac{1}{4608}+\tfrac{1}{1440}+\tfrac{1}{6144}$$
$$=\tfrac{20}{92160}+\tfrac{64}{92160}+\tfrac{15}{92160}=\tfrac{99}{92160}$$

und

$$\tfrac{2}{4608}+\tfrac{1}{1440}-\tfrac{2}{6144}$$
$$=\tfrac{40}{92160}+\tfrac{64}{92160}-\tfrac{30}{92160}=\tfrac{74}{92160}$$

ist, so ist

$$\cos E=1-\tfrac{1}{8}\mathfrak{D}^2x^4$$
$$-\tfrac{1}{96}(a^2+b^2+c^2)\mathfrak{D}^2x^6$$
$$-\tfrac{1}{92160}\{99(a^4+b^4+c^4)+74(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}\mathfrak{D}^2x^8,$$

welches genau mit der oben auf ganz anderem Wege gefundenen Formel 44) übereinstimmt.

Um eine Controle wie die vorhergehende für die Richtigkeit der obigen etwas weitläufigen Rechnungen zu gewinnen, war die nächste Veranlassung zu den in §. 4 gegebenen, sonst eigentlich für unsern gegenwärtigen Zweck nicht unbedingt erforderlichen Entwickelungen.

§. 7.

Nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie ist

$$80)\quad \sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2=-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C}.$$

Iun ist aber, wie leicht erhellen wird,

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)=-\sin E,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)=\sin(B+C-E);$$

lso

$$81)\quad \sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2=\frac{\sin E\sin(B+C-E)}{\sin B\sin C},$$

ınd folglich

$$\frac{\partial.\sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E}=\frac{\cos E\sin(B+C-E)-\sin E\cos(B+C-E)}{\sin B\sin C},$$

lso

$$82)\quad \frac{\partial.\sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E}=\frac{\sin(B+C-2E)}{\sin B\sin C},$$

'oraus sich nun ferner leicht

$$83)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2.\sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E^2}&=-\frac{2\cos(B+C-2E)}{\sin B\sin C},\\
\frac{\partial^3.\sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E^3}&=-\frac{2^2.\sin(B+C-2E)}{\sin B\sin C},\\
\frac{\partial^4.\sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E^4}&=\frac{2^3.\cos(B+C-2E)}{\sin B\sin C},\\
\frac{\partial^5.\sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E^5}&=\frac{2^4.\sin(B+C-2E)}{\sin B\sin C},\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}\right.$$

giebt. Also ist

$$84)\left\{\begin{aligned}
&(\sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2)=0,\\
&\left(\frac{\partial.\sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E}\right)=\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C},\\
&\left(\frac{\partial^2.\sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E^2}\right)=-\frac{2\cos(B+C)}{\sin B\sin C},\\
&\left(\frac{\partial^3.\sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E^3}\right)=-\frac{2^2.\sin(B+C)}{\sin B\sin C},\\
&\left(\frac{\partial^4.\sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E^4}\right)=\frac{2^3.\cos(B+C)}{\sin B\sin C},\\
&\qquad\text{u. s. w.}
\end{aligned}\right.$$

nd folglich

$$85)\ \sin\tfrac{1}{2}a_1^2 = \frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{E}{1}$$
$$-\frac{2\cos(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{E^2}{1.2}$$
$$-\frac{2^2.\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{E^3}{1.2.3}$$
$$+\frac{2^3.\cos(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{E^4}{1.2.3.4}$$
$$-\frac{2^4.\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{E^5}{1.2.3.4.5}$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder

$$86)\ \sin\tfrac{1}{2}a_1^2 = \frac{\sin(B+C)}{2\sin B\sin C}\cdot\frac{2E}{1} - \frac{\cos(B+C)}{2\sin B\sin C}\cdot\frac{(2E)^2}{1.2}$$
$$-\frac{\sin(B+C)}{2\sin B\sin C}\cdot\frac{(2E)^3}{1.2.3}$$
$$+\frac{\cos(B+C)}{2\sin B\sin C}\cdot\frac{(2E)^4}{1.2.3.4}$$
$$+\frac{\sin(B+C)}{2\sin B\sin C}\cdot\frac{(2E)^5}{1.2.3.4.5}$$
$$-\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Durch Differentiation nach E erhält man:

$$\frac{\partial.\sin\frac{1}{2}a_1^2}{\partial E} = \sin\tfrac{1}{2}a_1\cos\tfrac{1}{2}a_1\frac{\partial a_1}{\partial E} = \tfrac{1}{2}\sin a_1\frac{\partial a_1}{\partial E}$$
$$= \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{2a_1\partial a_1}{\partial E} = \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{\partial.a_1^2}{\partial E},$$

also

$$\frac{\partial^2.\sin\frac{1}{2}a_1^2}{\partial E^2} = \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{\partial^2.a_1^2}{\partial E^2} + \tfrac{1}{4}.\frac{\partial.\frac{\sin a_1}{a_1}}{\partial E}.\frac{\partial.a_1^2}{\partial E}$$
$$= \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{\partial^2.a_1^2}{\partial E^2} + \tfrac{1}{4}.\frac{\partial.\frac{\sin a_1}{a_1}}{\partial a_1}.\frac{\partial a_1}{\partial E}.\frac{\partial.a_1^2}{\partial E}$$
$$= \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{\partial^2.a_1^2}{\partial E^2} + \tfrac{1}{4}.\frac{a_1\cos a_1 - \sin a_1}{a_1^2}.\frac{\partial a_1}{\partial E}.\frac{\partial.a_1^2}{\partial E}$$
$$= \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{\partial^2.a_1^2}{\partial E^2} + \tfrac{1}{8}.\frac{a_1\cos a_1 - \sin a_1}{a_1^3}.\frac{\partial.a_1^2}{\partial E}.\frac{\partial.a_1^2}{\partial E}$$

Für $E=0$ ist $a_1=0$. Bestimmt man nun nach den bekannten Regeln die Werthe der Brüche

$$\frac{\sin a_1}{a_1} \text{ und } \frac{a_1 \cos a_1 - \sin a_1}{a_1^3}$$

für $a_1 = 0$, so erhält man

$$\left(\frac{\sin a_1}{a_1}\right) = 1, \left(\frac{a_1 \cos a_1 - \sin a_1}{a_1^3}\right) = -\tfrac{1}{3};$$

und es ist also nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{\partial . \sin \frac{1}{2} a_1^2}{\partial E}\right) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial . a_1^2}{\partial E}\right), \left(\frac{\partial^2 . \sin \frac{1}{2} a_1^2}{\partial E^2}\right) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 . a_1^2}{\partial E^2}\right) - \tfrac{1}{24}\left(\frac{\partial . a_1^2}{\partial E}\right)^2;$$

d. i.

$$\frac{\sin (B+C)}{\sin B \sin C} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial . a_1^2}{\partial E}\right),$$

$$-\frac{2 \cos (B+C)}{\sin B \sin C} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 . a_1^2}{\partial E^2}\right) - \tfrac{1}{24}\left(\frac{\partial . a_1^2}{\partial E}\right)^2.$$

Daher ist

$$87) \quad \left(\frac{\partial . a_1^2}{\partial E}\right) = \frac{4 \sin (B+C)}{\sin B \sin C}$$

und

$$88) \quad \left(\frac{\partial^2 . a_1^2}{\partial E^2}\right) = -\frac{8 \cos (B+C)}{\sin B \sin C} + \tfrac{8}{3}\left\{\frac{\sin (B+C)}{\sin B \sin C}\right\}^2;$$

oder

$$89) \quad \left(\frac{\partial . a_1^2}{\partial E}\right) = 4 (\cot B + \cot C)$$

und

$$90) \quad \left(\frac{\partial^2 . a_1^2}{\partial E^2}\right) = 8\{1 + \tfrac{1}{3}(\cot B^2 + \cot C^2 - \cot B \cot C)\}.$$

Daher ist

$$91) \quad a_1^2 = \frac{4 \sin (B+C)}{\sin B \sin C} E$$
$$- 4 \left\{\frac{\cos (B+C)}{\sin B \sin C} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{\sin (B+C)}{\sin B \sin C}\right)^2\right\} E^2$$

oder

$$92) \quad a_1^2 = 4(\cot B + \cot C) E + 4\{1 + \tfrac{1}{3}(\cot B^2 + \cot C^2 - \cot B \cot C)\} E^2;$$

folglich, wie man durch leichte Rechnung findet:

$$2a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 = -4(2 \cot A - \cot B - \cot C) E$$
$$- \tfrac{4}{3}\left\{\begin{matrix} 2 \cot A^2 - \cot B^2 - \cot C^2 \\ - \cot A (\cot B + \cot C) + 2 \cot B \cot C \end{matrix}\right\} E^2$$

und

$$38a_1^4-19b_1^4-19c_1^4-a_1^2b_1^2+2b_1^2c_1^2-c_1^2a_1^2$$
$$=-\left\{\begin{array}{l}288\,(2\cot A^2-\cot B^2-\cot C^2)\\ +608\,(\cot A\,(\cot B+\cot C)-2\cot B\cot C)\end{array}\right\}E^2.$$

Also ist nach 76) mit Vernachlässigung von Gliedern der achten Ordnung:

$$93)\quad A=\mathfrak{A}+\tfrac{2}{3}E$$
$$+\tfrac{2}{45}(2\cot A-\cot B-\cot C)E^2$$
$$+\tfrac{2}{189}\left\{\begin{array}{l}2\cot A^2-\cot B^2-\cot C^2\\ -\tfrac{1}{15}(\cot A(\cot B+\cot C)-2\cot B\cot C)\end{array}\right\}E^3,$$

und folglich mit demselben Grade der Genauigkeit:

$$94)\quad \mathfrak{A}=A-\tfrac{2}{3}E$$
$$-\tfrac{2}{45}(2\cot A-\cot B-\cot C)E^2$$
$$-\tfrac{4}{189}\left\{\begin{array}{l}2\cot A^2-\cot B^2-\cot C^2\\ -\tfrac{1}{15}(\cot A(\cot B+\cot C)-2\cot B\cot C)\end{array}\right\}E^3.$$

Auch ist, wie man leicht findet:

$$a_1^2-b_1^2-c_1^2=-8\cot A\,.\,E$$
$$-4\{1+\tfrac{1}{3}(2\cot A^2-\cot A\,(\cot B+\cot C)+\cot B\cot C)\}E^2,$$

und

$$a_1^4+3b_1^4+3c_1^4-4a_1^2b_1^2+b_1^2c_1^2-4c_1^2a_1^2$$
$$=16\{7\cot A^2-\cot A\,(\cot B+\cot C)-5\cot B\cot C\}E^2,$$

so wie

$$3a_1^2-b_1^4-c_1^4-2a_1^2b_1^2+8b_1^2c_1^2-2c_1^2a_1^2$$
$$=32\{3\cot A^2+\cot A\,(\cot B+\cot C)+5\cot B\cot C\}E^2.$$

Also ist nach 67) und 66*):

$$95)\quad \sin A=\sin\mathfrak{A}+\tfrac{2}{3}\cot A\sin\mathfrak{A}\,.\,E$$
$$+\tfrac{1}{3}\{1+\tfrac{1}{15}(24\cot A^2-7\cot A(\cot B+\cot C)-5\cot B\cot C)\}\sin\mathfrak{A}\,.\,E^2$$

und

$$96)\quad \sin\mathfrak{A}=\sin A-\tfrac{2}{3}\cot A\sin A\,.\,E$$
$$-\tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{15}(4\cot A^2-7\cot A\,(\cot B+\cot C)-5\cot B\cot C)\}\sin A\,.\,E^2$$

oder

$$97)\quad \frac{\sin A}{\sin\mathfrak{A}}=1+\tfrac{2}{3}\cot A\,.\,E$$
$$+\tfrac{1}{3}\{1+\tfrac{1}{15}(24\cot A^2-7\cot A\,(\cot B+\cot C)-5\cot B\cot C)\}E^2$$

und

$$98)\ \frac{\sin \mathfrak{A}}{\sin A}=1-\tfrac{2}{3}\cot A\,.\,E$$
$$-\tfrac{1}{3}\{1+\tfrac{1}{15}(4\cot A^2-7\cot A(\cot B+\cot C)-5\cot B\cot C)\}E^2.$$

Die Anwendung der im Obigen entwickelten Formeln in der Geodäsie zu zeigen, kann hier nicht unsere Absicht sein, da diese sehr wichtige Anwendung als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden kann. Wir bezweckten hier nur eine weiter, als gewöhnlich geschieht, getriebene Entwickelung der Formeln nach einer Methode, welche leicht erkennen lässt, wie man sich zu verhalten haben würde, wenn man zu noch mehreren Gliedern fortschreiten wollte, welchem nothwendigen Erforderniss uns die bisher angewandten Entwickelungsmethoden nicht gehörig zu entsprechen scheinen. Auch braucht hier nicht erläutert zu werden, wie man sich zu verhalten haben würde, wenn die Winkel oder Bogen nicht wie vorher in Theilen des der Einheit gleichen Halbmessers, sondern in einem andern Maasse ausgedrückt werden sollten, welches Alles zu bekannt und namentlich einem Jeden, wer in geodätischen Rechnungen nur einigermaassen geübt ist, zu geläufig ist, als dass darüber hier noch besondere Bemerkungen nöthig sein sollten.

IV.

Anwendung der Theorie der Umhüllungscurven auf die Schattenconstructionen.

Von

Herrn C. T. Meyer,

Bergwerkscandidaten zu Freiberg.

So vielfache Anwendung die Mathematik schon in jeder Beziehung und unter den verschiedenartigsten Verhältnissen erlitten hat, so ist doch nicht zu leugnen, dass es auch noch Zweige der Wissenschaft und der Praktik giebt, wo sie entweder gänzlich vermisst wird, oder doch wenigstens ein grösserer Einfluss derselben zu wünschen wäre. Zu der erstern dieser beiden Abtheilungen, nämlich der der Wissenschaft, gehört auch unstreitig

die **Zeichnenkunst**, und wenn hier auch mathematische Hilfsgriffe zum Theil schon angewendet werden, so kann man doch gewiss nicht verkennen, dass eine viel grössere Anwendung, namentlich des mehr geometrischen Theils (im weitern Sinne des Begriffs) noch wünschenswerth sein möchte. Ich spreche hier weniger von der sogenannten geometrischen oder descriptiven Projectionslehre, obgleich auch diese nicht ausgeschlossen ist, wie schon die vorliegende Anwendung der Theorie der Umhüllungscurven zeigt, welche auch darauf Bezug finden könnte, und zwar mit noch grösserm Einflusse und noch glücklicherm Erfolge, als selbst bei den **Schattenconstructionen**, auf welche ich mich jedoch beschränken will, da jener in einem besondern Werke „Axonometrische Projectionslehre" auf genügendere Weise, als es hier möglich wäre, Erwähnung geschehen wird.

Schon aus dem Begriffe einer Umhüllungscurve geht hervor, dass ich mich hier nicht mit den Schatten geradlinig begrenzter, sondern vielmehr regelmässig gekrümmter Oberflächen zu beschäftigen habe, und zwar sind es namentlich die **Rotationskörper** und die gekrümmten Flächen zweiter Ordnung, auf deren Schattenconstruction genannte Theorie in vielen Fällen sehr vereinfachend einwirkt. Ich gehe hier der Einfachheit halber von den Rotationskörpern aus, an welche sich dann die allgemeinen Fälle der gekrümmten Oberflächen zweiter Ordnung leicht anschliessen werden; die Rotationskörper sind nämlich zum Theil nur als besondere Fälle jener gekrümmten Flächen zu betrachten; anderntheils reicht aber dieser Begriff viel weiter, so dass sonach zugleich für zwei verschiedene Richtungen Eingang geöffnet wird. Hiernach ist es auch natürlich, dass ich mich im Folgenden namentlich mit den Rotationskörpern der zweiten Ordnung beschäftigen werde, zumal solches die am häufigsten vorkommenden Körper sind, nämlich den Rotationskörper des Dreiecks, des Kreises und der Kegelschnitte, als Kegel, Kugel, Sphäroid, Umdrehungs-Paraboloid und Umdrehungs-Hyperboloid. Was die ersten beiden der genannten Körper, nämlich Kegel und Kugel betrifft, so wird, da ihre Schattenconstruction schon jetzt ziemlich einfach ist (s. **Hummel: Geometrisch-practische Construction der Schatten. Berlin. 1830.**), darauf wenig Einfluss ausgeübt werden können, und ich will daher auch von diesen sogleich absehen, obgleich das Princip, auf welches es hier namentlich ankommt, eben so gut an ihnen erläutert werden könnte.

Nicht immer zeigen die geometrischen und namentlich axonometrischen (d. h. isometrischen, monodimetrischen und anisometrischen) Darstellungen von Rotationskörpern eine Curve derselben Gattung, als die der Fläche ist, durch deren Drehung der Körper entstanden gedacht werden kann, und ebendasselbe gilt von den Abbildungen im Schatten, welcher nichts anderes als eine schiefe Projection ist.

Es liegen nun hier namentlich drei Fragen vor, deren Beantwortung das Hauptthema des Folgenden ist: 1) wie man sich überzeugen kann, ob der Schatten eine Curve derselben Art giebt, als die Rotationsfläche zeigt (d. h. ein Ellipsoid eine Ellipse, ein Paraboloid eine Parabel etc.) oder überhaupt, welche Curve im Schatten entsteht; 2) in welchen Fällen für die Curven der zwei-

ten Ordnung der Schatten eine Curve derselben Art giebt, und 3) in welchem Verhältniss dann die neue Curve steht, und wie eine Vereinfachung der Construction eintreten kann, was sich freilich schon mehr auf einzelne, specielle Fälle bezieht.

Diese drei Fragen werden jedoch nicht scharf getrennt abgehandelt werden, da sie ihrer Natur nach zu eng verwandt sind, als dass dies ohne Weitläuftigkeiten und Wiederholungen geschehen könnte. Zur Lösung der gestellten Aufgaben ist es nur vorerst erforderlich, zu zeigen, von welchem Principe der Schattenconstruction wir hier im Allgemeinen auszugehen haben, es ist die Basis anzugeben, wodurch die Theorie der Umhüllungscurven in Wirksamkeit zu treten vermag.

Da es sich hier lediglich um das Princip handelt, und solches an schweren Fällen mit nicht mehr Vortheil, als an einfachern, und nur mit grösserer Undeutlichkeit dargethan werden könnte, wie man denn in allen Stücken von dem Einfacheren zum Complicirteren übergeht, so werden wir auch hier einen der einfachern Fälle als Grundlage annehmen; es stehe nämlich der den Schatten werfende Rotationskörper mit der Ebene seiner Neigung parallel dem Lichtstrahle. Ist dies nicht der Fall, so wird dadurch das Ganze nicht geändert und blos wenig modificirt, wie wir später durch ein Beispiel sehen werden.

Es sei z. B. der horizontale Schlagschatten (natürlich geometrische) eines Rotationskörpers, wie *ABCD* in Taf. I. Fig. 1. (im Aufriss sind die Buchstaben mit einem Index versehen) zu finden, der von Lichtstrahlen parallel der Richtung x beleuchtet wird.

Da hierbei die Aufrissebene meist blos dazu dient, um die Rotationsfläche ihrer wirklichen Gestalt nach dem Beschauer zu zeigen, und überhaupt mehr nur als Hilfsconstruction zu betrachten ist, so wird man sie gewöhnlich parallel der Neigung des Rotationskörpers gelegt finden, und sollte dies nicht der Fall sein, so kann man sich auch leicht ein derartiges Profil verzeichnen; doch soll hierdurch keineswegs angedeutet werden, dass dies unbedingt nöthig sei, sondern es dient nur zur Vereinfachung, wie man auch selbst aus dem Verlaufe deutlich sehen wird; auch Hummel hat ein ähnliches Verfahren bei der Schattenconstruction der Kugel befolgt (S. 44. des obengenannten Werkes).

Man suche zuerst den Schatten einer durch die Axe *EF* gehenden, rechtwinklig zur Neigung des Körpers liegenden Ebene *GHJK* (es ist dies am einfachsten), was leicht nach den gewöhnlichen Regeln der optischen Zeichnungslehre geschehen kann. Ist die Begrenzungslinie eine Curve zweiter Ordnung, von denen wir hier ausgehen, so wird man sich der Aufsuchung einzelner Punkte blos dann bedienen, wenn die Curve eine Hyperbel ist, da deren Construction selbst nicht viel Vereinfachung gewährt; hat man es aber mit einer Parabel oder Ellipse zu thun, so wird man zweckmässig nur wenig Punkte bestimmen und dann sogleich die Curve auf gewöhnlichem geometrischen Wege vollends ausführen. Es ist hierzu freilich erforderlich, zu wissen, dass auch der Schatten dieselbe Gattung der Curven, als die Rotationsfläche in der Begrenzungslinie zeigt, und ich will daher mit wenigen Worten dies näher erläutern, da eine ausführlichere Beweisführung mich zu weit vom eigentlichen Gegenstande abführen würde.

Liegt nämlich die Fläche, wie hier angenommen, rechtwinklig gegen den Grundriss des Lichtstrahls, so werden alle Curven sich bei ihrer Abbildung im Schatten nur insofern ändern, als ihre Constanten verschiedene Werthe erhalten; denn offenbar bleiben alle Ordinaten (wenn man die Axe der Fläche als Abscissenaxe betrachtet) gleich gross und rechtwinklig zur Abscissenaxe, welche sich vergrössert oder verkleinert, je nach der Neigung des Lichtstrahles x gegen den Horizont und der Neigung β des Körpers (Taf. I. Fig. 2.), und zwar tritt x_1, als variable Abscisse an die Stelle von $x=\frac{x_1 \sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$, so dass also die neue Curve die Gleichung $y_1=f\left(\frac{x_1 \sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}\right)$ hat, wenn die der alten $y=f(x)$ war.

Trifft aber der Lichtstrahl im Grundriss schief auf die den Schatten werfende Fläche, so gilt dieses Gesetz nur noch bei den Linien der zweiten Ordnung, da solche auch für zusammengehörige (nicht rechtwinklig auf einander stehende) Durchmesser die gewöhnlichen Gleichungen zeigen, was allgemein für alle Curven nicht bewiesen werden kann, obgleich die Möglichkeit vorhanden ist, dass es noch für viele andere Linien höherer Grade Geltung hat. (Es ist hier natürlich der Kreis als zur Gattung der Ellipsen gehörig angesehen worden; er ist als Ellipse zu betrachten, wo kleine und grosse Axe denselben Werth erhalten.)

Hat man sich den Schatten dieser Fläche in *ghik* (Taf. I. Fig. 1.) dargestellt, so verzeichne man sich die Ellipsenprojection eines der Kreisschnitte rechtwinklig zur Rotationsaxe, etwa *cdgh*. Bei der Lage des Körpers, die die Figur darstellt, ist es offenbar, dass die beiden Axen der Ellipse auf den Schatten der Rotationsaxe und rechtwinklig dagegen zu liegen kommen, was bei einer schiefen Beleuchtung nicht der Fall ist, wie das letzte Beispiel zeigen wird; es ist dies ein nicht wesentlicher, aber doch sehr erleichternder Umstand. Verzeichnet man nun in beliebigen, möglichst kleinen Abständen auf der Schattenaxe der *ghik* ähnliche Ellipsen nach den Axen g_1h_1, g_2h_2, g_3h_3 etc., so geben diese den Schatten von eben so viel rechtwinklig zur Axe geführten Durchschnitten des Rotationskörpers, und eine tangentiale Verbindung ihrer Conturen muss der gesuchte Schatten des Körpers selbst sein. Je näher man die Ellipsen verzeichnet, um desto weniger kann man fehlen, und legt man unendlich viel Ellipsen, so wird der Schatten auch genau richtig werden; d. i. mit andern Worten, eine Umhüllungscurve solcher Ellipsen giebt den gesuchten Schatten.

Hieraus folgt nun sogleich die Lösung der ersten der oben aufgeworfenen Fragen: wie man sich überzeugen kann, welche Curve als Begrenzungslinie des Schattens (oft blos seitlich, da, wie in der Figur, oben und unten halbe Ellipsen schliessen müssen) resultirt; denn man braucht solche blos nach der gewöhnlichen Theorie der Umhüllungscurven, wie sie Littrow in seinem Werke „Elemente der Algebra und Geometrie" angiebt, zu berechnen, indem ähnliche Ellipsen nach einem gewissen Gesetze, welches durch die erste Schattencurve gegeben ist, fortschreiten.

Auf das Nähere über Umhüllungscurven gehe ich hier nicht besonders ein, da sowohl deren Theorie als bekannt vorausgesetzt

werden muss, als auch das Verfahren sogleich am besten durch die Beispiele deutlich werden wird.

Es sei z. B. der Rotationskörper aus einem Parabelbogen, der sich um eine Axe hinter seinem Scheitel dreht, entstanden.

Die Begrenzungslinie des Schattens der durch die Axe rechtwinklig zur Neigung des Körpers gelegten Fläche ist, wie früher gezeigt, eine Curve von der Form

$$y_1 = f\left(\frac{x_1 \sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}\right) = \sqrt{\frac{p.\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}.x_1},$$

also wieder eine Parabel, deren Parameter $= \frac{p.\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$ ist; doch kommt hierauf weiter nichts an, sondern wir gehen gleich von der Parabel im Schatten aus, deren Gleichung wir $y_1^2 = px_1$ nehmen wollen. Ist nun fe die Schattenprojection der Axe und $og_3 = oh_3$ der kleinste Abstand derselben von der Curve (natürlich vom Scheitel), welchen wir d nennen wollen, so wird die neue Curve eine Umhüllungscurve ähnlicher Ellipsen sein, deren Mittelpunkt sich auf fe von o aus nach beiden Seiten fortbewegt, wobei die Axen sich nach den Entfernungen der Curve von ef ändern. Bezeichnen wir die variable Halbaxe der Ellipse durch r, so wird der andere Halbmesser nr, da die Ellipsen ähnlich sein sollen, wenn n die Verhältnisszahl zwischen beiden Axen bedeutet, und ist $n=1$, so ist die fortlaufende Linie ein Kreis, welcher Fall bei aufrechter Stellung des Körpers eintreten würde. Bezeichnen wir ferner die variable Entfernung des Halbmessers r von dem angenommenen Anfangspunkte o durch α (analog Littrow) und durch x und y die Coordinaten der neuen Curve, so wird nach der Gleichung der Ellipse:

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{(\alpha-x)^2}{n^2r^2} = 1,$$

und nach der der Parabel:

$$r = d + \frac{\alpha^2}{p},$$

woraus folgt:

$$n^2y^2 + (\alpha-x)^2 = n^2\left(d + \frac{\alpha^2}{p}\right)^2.$$

Aus dieser Gleichung ist nun α durch Differenziiren darauf als Function von x zu bestimmen und dessen Werth dann wieder zu substituiren.

Differenziirt man daher obige Gleichung, so folgt:

$$2(\alpha-x) = 2n^2\left(d + \frac{\alpha^2}{p}\right)\frac{2\alpha}{p},$$

$$\alpha - x = 2n^2\frac{d\alpha}{p} + \frac{2n^2\alpha^3}{p^2},$$

$$\alpha^3 + \alpha\left(pd - \frac{p^2}{2n^2}\right) + \frac{p^2x}{2n^2} = 0,$$

wonach sich α als eine Function des 3ten Grades von x darstellt; und bei der Substitution derselben in obige Gleichung ist leicht ersichtlich, dass eine Curve höherer Ordnung resultiren müsse, worauf wir uns aber nicht weiter einlassen wollen, da wir dasselbe einfacher zeigen können, indem wir $d=\frac{p}{2n^2}$ annehmen; es wird dann:

$$\alpha^3=-\frac{p^2x}{2n^2},$$

$$\alpha=-\sqrt[3]{\frac{p^2x}{2n^2}};$$

und sonach:

$$n^2y^2+(x+\sqrt[3]{\frac{p^2x}{2n^2}})^2=n^2(\frac{p}{2n^2}+\sqrt[3]{\frac{p^4x^2}{4n^4p^3}})^2.$$

Setzt man zur Vereinfachung noch $n=1$, so wird:

$$y^2+(\sqrt[3]{\frac{p^2x}{2}}+x)^2=(\frac{p}{2}+\sqrt[3]{\frac{px^2}{4}})^2,$$

$$y^2+\sqrt[3]{\frac{p^4x^2}{4}}+x^2+2x\sqrt[3]{\frac{p^2x}{2}}=\frac{p^2}{4}+\sqrt[3]{\frac{p^2x^4}{16}}+p\sqrt[3]{\frac{px^2}{4}},$$

$$y^2+x^2+2x\sqrt[3]{\frac{p^2x}{2}}-\sqrt[3]{\frac{p^2x^4}{16}}-\frac{p^2}{4}=0,$$

$$y^2+x^2+x\sqrt[3]{x}(2\sqrt[3]{\frac{p^2}{2}}-\sqrt[3]{\frac{p^2}{16}})-\frac{p^2}{4}=0,$$

offenbar die Gleichung eines höhern Grades.

Viel günstiger fällt schon das Resultat aus, wenn der Körper durch eine hyperbolische Linie begrenzt ist, d. h., wenn die Parabel der vorigen Aufgabe in eine halbe Hyperbel übergeht.

Behält man vorige Bezeichnungen bei, so ist in diesem Falle:

$$r=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2}-a+d,$$

wo a und b die Axen der Hyperbel bezeichnen, und ist die Axe des Rotationskörpers zugleich die der Hyperbel, so dass sich also gleichsam eine ganze Hyperbel um ihre imaginäre Axe dreht (wie Taf. I. Fig. 1. darstellt), so wird:

$$r=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2}.$$

Für den Fall $r=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2}-a+d$ erhält man ebenfalls eine

Curve höhern Grades, für $r=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2}$ resultirt aber wieder eine Hyperbel, was sehr erfreulich ist, da gerade letzteres Verhältniss das des gewöhnlichen **Umdrehungs-Hyperboloids** ist.

Setzen wir vorerst:

$$r=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2}-a+d,$$

so geht

$$\frac{y^2}{r^2}+\frac{(\alpha-x)^2}{n^2r^2}=1$$

über in:

$$n^2y^2+(\alpha-x)^2=n^2\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2}+d-a\right)^2$$

$$=n^2\left(\frac{a^2}{b^2}(b^2+\alpha^2)+2(d-a)\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2}+(d-a)^2\right)$$

$$=n^2\left(2a^2+\frac{\alpha^2 . a^2}{b^2}+2(d-a)\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2}+d^2-2ad\right).$$

Die Differentiation giebt:

$$\alpha-x=n^2\left[\frac{a^2}{b^2}\alpha+\frac{(d-a)\frac{a}{b}\alpha}{\sqrt{b^2+\alpha^2}}\right],$$

$$(\alpha-x)\sqrt{b^2+\alpha^2}=n^2\left(\frac{a^2}{b^2}\alpha\sqrt{b^2+\alpha^2}+(d-a)\frac{a}{b}\cdot\alpha\right),$$

$$\sqrt{b^2+\alpha^2}\left[\alpha\left(1-\frac{a^2n^2}{b^2}\right)-x\right]=n^2(d-a)\frac{a}{b}\cdot\alpha,$$

$$\left(\alpha\left(1-\frac{a^2n^2}{b^2}\right)-x\right)^2(b^2+\alpha^2)=n^4(d-a)^2\cdot\frac{a^2}{b^2}\cdot\alpha^2,$$

$$\left(\alpha^2\left(1-\frac{a^2n^2}{b^2}\right)^2+x^2-2\alpha\left(1-\frac{n^2a^2}{b^2}\right)x\right)(b^2+\alpha^2)=n^4(d-a)^2\frac{a^2}{b^2}\cdot\alpha^2.$$

Bezeichnet man $1-\frac{a^2n^2}{b^2}$ durch μ, so wird:

$$\alpha^4\mu^2+x^2\alpha^2-2\alpha^3\mu x+\alpha^2b^2\mu^2+b^2x^2-2b^2\alpha\mu x=n^4(d-a)^2\cdot\frac{a^2}{b^2}\cdot\alpha^2,$$

$$\alpha^4-\alpha^3\cdot\frac{2x}{\mu}+\alpha^2\left(\frac{x^2}{\mu^2}+b^2-\frac{n^4(d-a)^2}{\mu^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}\right)-\alpha\cdot\frac{2b^2x}{\mu}+\frac{b^2x^2}{\mu^2}=0.$$

Bestimmt man hieraus α, so wird solches eine Function sein, in welcher x unter dem vierten Wurzelzeichen vorkommt, und setzt man daher allgemein $\alpha=\varphi(\sqrt[4]{x})$ und substituirt diese Grösse oben, so ist durch eine leichte Betrachtung sogleich zu sehen, dass x mit dem vierten Wurzelzeichen behaftet nicht ganz verschwinden

kann, so dass also eine Gleichung von wenigstens dem vierten Grade entstehen muss.

Bedeutend einfacher wird die Rechnung für

$$r=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2};$$

denn es wird nun:

$$n^2y^2+(\alpha-x)^2=n^2\cdot\frac{a^2}{b^2}(b^2+\alpha^2);$$

differenziirt:

$$\alpha-x=\frac{n^2\cdot a^2}{b^2}\cdot\alpha,$$

$$\alpha=\frac{x}{1-\frac{n^2a^2}{b^2}}=\frac{b^2x}{b^2-n^2a^2};$$

und daher die gesuchte Gleichung:

$$n^2y^2+(\frac{b^2x}{b^2-n^2a^2}-x)^2=n^2\frac{a^2}{b^2}(\frac{b^4x^2}{(b^2-n^2a^2)^2}+b^2),$$

$$n^2y^2+\frac{n^4a^4x^2}{(b^2-n^2a^2)^2}=\frac{n^2a^2b^2x^2}{(b^2-n^2a^2)^2}+n^2a^2,$$

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{n^2a^2x^2}{(b^2-n^2a^2)^2}=\frac{b^2x^2}{(b^2-n^2a^2)^2}+1,$$

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2(n^2a^2-b^2)}{(b^2-n^2a^2)^2}=1,$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2-n^2a^2}=1,$$

d. i. die einer Hyperbel, wo die frühere Axe a unverändert bleibt, b aber in $\sqrt{b^2-n^2a^2}$ übergeht (y sind hier die Abscissen, x die Ordinaten der neuen Hyperbel).

Ist $b^2<n^2a^2$, so wird die Curve nach der Formel eine Ellipse, doch ist dies augenscheinlich nur für die nächsten Punkte des Scheitels möglich, so dass also die andern Ellipsen keine Umhüllungscurve geben können; die nächst grössere wird immer die andere umschliessen. Der Schatten wird dann auch nicht mehr von der Umhüllungscurve abhängig sein, sondern nur aus den beiden Endellipsen bestehen, die sich dann schneiden müssen.

Durch diese Gleichung hat man nicht nur bewiesen, dass der Schatten des Hyperboloids wieder eine durch eine ganze Hyperbel begrenzte Fläche ist, da sich die Axe a nicht ändert, was in vielen Fällen schon von Nutzen sein wird, sondern man kann auch sogleich diese Hyperbel nach der Abhängigkeit der neuen von der alten Axe a und b construiren, was zwar nicht einfach ist, aber doch in vielen Fällen einen Vorzug dagegen verdient, dass man sich durch Schnitte o. a. mehr Punkte des Schattens bestimmt.

Von noch grössern Vortheil als beim Hyperboloide wird aber die Construction durch Umhüllungscurven bei dem Umdrehungs-Ellipsoide oder Sphäroide und dem Umdrehungs-Paraboloide, woran sich dann ein Körper schliesst, der aus der Drehung einer Hyperbel um ihre Hauptaxe entsteht. In diesen Fällen resultirt nicht nur dieselbe Curve, sondern es ergeben sich auch ziemlich einfache Abhängigkeitsverhältnisse, welche von wesentlichem Nutzen für die Zeichnung sind.

Aus der Vergleichung dieser Fälle mit den vorigen ersieht man zugleich, dass allemal dieselbe Curve entsteht, wenn die Rotation um eine Axe stattfindet, dass sich aber eine Linie höherer Ordnung ergiebt, wenn die Rotationsaxe nicht mit einer Axe der Erzeugungscurve zusammenfällt, daher auch bei der Ellipse und der Hyperbel zwei verschiedene Rotationsbewegungen möglich sind, nämlich um die grosse und kleine Axe, bei der Parabel aber blos eine einzige um ihre eine Axe, um im Schatten eine Curve derselben Art zu erhalten.

Ich werde nun auf diese Körper specieller eingehen und zwar beim Ellipsoide beginnen.

1) Soll (Taf. I. Fig. 3.) ein geneigt stehendes Sphäroid *ABCD* (wo wir den allgemeinen Fall annehmen, dass die Rotation um die grosse Axe stattgefunden hat) als Schatten auf der horizontalen Bodenfläche projicirt werden, so wird man, wie früher schon angegeben, erst den Schatten einer rechtwinklig zur Neigung liegenden, durch die Axe *AB* gehenden Durchschnittsfläche bestimmen und dann die Umhüllungscurve der ähnlichen Ellipsen suchen, welche die Projectionen von Schnitten rechtwinklig zur Axe darstellen und deren Fortschreiten durch die erstere Ellipse gegeben wird. Es sei nun die Gleichung der erstern Ellipse *abfg*, bei Beibehaltung der frühern Benennungen,

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{r^2}{b^2}=1,$$

so wird, da wie früher

$$\frac{y^2}{r^2}+\frac{(\alpha-x)^2}{n^2r^2}=1$$

ist, geht man vom Mittelpunkte o aus,

$$n^2y^2+(\alpha-x)^2=n^2.\frac{b^2}{a^2}(a^2-\alpha^2).$$

Differenziirt man diese Gleichung, so folgt:

$$\alpha-x=-\frac{n^2b^2}{a^2}\alpha,\ \alpha=\frac{a^2x}{a^2+n^2b^2};$$

und folglich wird die Gleichung der Umhüllungscurve:

$$n^2y^2+(\frac{a^2x}{a^2+n^2b^2}-x)^2=n^2b^2-\frac{n^2b^2}{a^2}\cdot\frac{a^4x^2}{(a^2+n^2b^2)^2},$$

$$n^2y^2+\frac{n^4b^4x^2}{(a^2+n^2b^2)^2}=n^2b^2-\frac{n^2b^2a^2x^2}{(a^2+n^2b^2)^2},$$

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{n^2b^2x^2+x^2a^2}{(a^2+n^2b^2)^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2+n^2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Der gesuchte Schatten ist also eine neue Ellipse, deren kleine Axe gleich der des Schattens des ersten Schnittes bleibt, während die grosse $=\sqrt{a^2+n^2b^2}$ wird, d. h., man muss b mit dem Verhältniss n (welches man leicht durch Messen zweier beliebigen r und nr, etwa of und oc, mit einem Maasstabe und Division erhalten kann, wenn es nöthig) multipliciren, welche Grösse sogleich in oc und od gegeben ist, und dann die Hypotenuse zu den rechtwinklig an einander gelegten Linien a und nb ziehen, um die grosse Axe zu erhalten. Noch einfacher kann man dieselbe auch dadurch finden, dass man tangential an den Aufriss in der Richtung des Lichtstrahls eine Linie zieht und deren Fusspunkt auf die verlängerte ab projicirt; denn man muss den Endpunkt erhalten, da der Aufriss als ein Vertikaldurchschnitt betrachtet werden kann.

Es ist einleuchtend, dass man bei gewöhnlicher Ausführung nicht einmal erst die Ellipsen $abfg$ und $cdfg$ zeichnen wird, sondern man findet nur die Punkte a, b, f, g, c und d, wo $oa=ob=a$, $of=og=b$, $oc=od=nb$ ist, und construirt dann, nachdem man, wie angegeben, die neuen Axen gefunden hat, sogleich die Schattenellipse, was am besten durch Krümmungskreise erfolgen wird.

Ist das Ellipsoid durch Drehung um die kleine Axe entstanden, so bedingt dies nur wenig Unterschied und kann somit füglich übergangen werden.

2) Den Schatten eines Umdrehungs-Paraboloids, wie ABC, zu verzeichnen (Taf. II. Fig. 1.).

Das Verfahren bleibt dem frühern ganz ähnlich, daher wir uns hier auch ziemlich kurz fassen können. Der Schatten des Schnittes durch $CDFG$ ist $cdfg$, und zwar wieder eine Parabel nach der frühern Angabe; man hat nicht nöthig, sie zu verzeichnen, sondern es genügt, die Punkte c, d, f und g zu wissen. Der Schatten irgend eines Kreisschnittes giebt die Axenpunkte k, h, i, l, oder einfacher nimmt man gleich f, g, a, b, und es ist nun die Umhüllungscurve zu suchen, welche entsteht, wenn ähnliche Ellipsen auf der Linie cd nach dem Gesetze der Parabel fortschreiten. Bezeichnet man analog den frühern Beispielen ok durch r, oi durch nr, nennt das variable $co=\alpha$ und die Coordinaten der neuen Curve x und y vom Anfangspunkte c aus, so wird, bezeichnet man durch p den Parameter der Curve fgc:

$$\frac{y^2}{r^2}+\frac{(\alpha-x)^2}{nr^2}=1$$

und

$$r^2=p\alpha,$$

also:

$$n^2y^2 + (\alpha - x)^2 = n^2 p \alpha;$$

differenziirt:

$$2(\alpha - x) = pn^2, \ \alpha = \frac{pn^2 + 2x}{2};$$

woraus folgt:

$$n^2y^2 + (\frac{pn^2 + 2x}{2} - x)^2 = n^2 p (\frac{pn^2 + 2x}{2}),$$

$$n^2y^2 + \frac{p^2n^4}{4} = \frac{n^4p^2}{2} + x \, . \, n^2 p,$$

$$y^2 = \frac{n^2p^2}{4} + xp,$$

$$y^2 = p(\frac{n^2p}{4} + x),$$

d. i. die Gleichung einer Parabel, deren Anfangspunkt um $\frac{pn^2}{4}$ weiter auf der Abscissenaxe zurückliegt als bei der Parabel $y^2 = px$. Es findet sonach hier das eigenthümliche Verhältniss statt, dass die neue Curve von der alten nur dadurch verschieden ist, dass ihr Anfangspunkt um $\frac{n^2p}{4}$ weiter hinausgerückt wird. Ist die Ellipse ein Kreis, d. i. $n=1$, so wird die Entfernung $\frac{p}{4}$, d. h. der Scheitel der alten Parabel giebt dann den Brennpunkt der neuen. Um nun diese Parabel zu verzeichnen, ist vor Allem nöthig, p zu bestimmen, was ganz einfach auf rein geometrischem Wege erfolgt, indem in c der Scheitel, in f oder g ein beliebiger Punkt der Parabel vom Parameter p gegeben ist; man verbinde f und c durch eine gerade Linie und errichte darauf in f ein Perpendikel, welches die Abscissenaxe in m schneidet, es ist sodann $md = p$. Die Verhältnisszahl n findet man, wie beim Umdrehungs-Ellipsoide angegeben, $= \frac{db}{df}$ (oder $\frac{oi}{ok}$), und nimmt man dann p $\frac{n^2}{4}$mal und trägt solches von c rückwärts auf, so findet man den neuen Scheitel c_1, von welchem aus man nach der gewöhnlichen, ziemlich einfachen Parabelconstruction diese selbst verzeichnet. Auf andere, einfachere, Weise kann man auch den Scheitelpunkt wie beim Sphäroide finden, so dass man also nicht einmal n zu bestimmen braucht. Am Ende schliesst die Parabel natürlich tangential an den elliptischen Schatten der Basis des Körpers an.

3) Zwischen dem Sphäroide und dem Umdrehungs Paraboloide mitten inne steht gleichsam der dritte zu betrachtende Körper, der nämlich, welcher aus der Drehung einer halben Hyperbel um ihre Abscissenaxe entsteht; denn in der Formel ist die Abweichung vom Ellipsoide gering, während er sich der Gestalt nach mehr dem Paraboloide nähert.

Eine abermalige Wiederholung der Zeichnung wäre jedenfalls überflüssig und ich beschränke mich daher hier darauf, blos

die Formel für die Schatten-Hyperbel herzuleiten, zumal ein solcher Körper nur selten vorkommt.

Behält man die frühern Bezeichnungen bei, so wird die Gleichung der Ellipse wieder:

$$n^2y^2+(\alpha-x)^2=n^2r^2,$$

während man für die Hyperbel hat:

$$\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{r^2}{b^2}=1;$$

es ist hier α, also auch x, vom Mittelpunkte (nicht dem Scheitel) der Hyperbel aus gezählt. Führt man nun die Rechnung wie gewöhnlich durch, so erhält man:

$$n^2y^2+(\alpha-x)^2=n^2.\frac{b^2}{a^2}(\alpha^2-a^2);$$

differenziirt:

$$\alpha-x=\frac{n^2b^2}{a^2}\alpha,\quad \alpha=\frac{a^2x}{a^2-n^2b^2},$$

und sonach

$$n^2y^2+\left(\frac{a^2x}{a^2-n^2b^2}-x\right)^2=\frac{n^2b^2}{a^2}\left(\frac{a^4x^2}{(a^2-n^2b^2)^2}-a^2\right),$$

$$\frac{x^2}{a^2-n^2b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

d. i. die Gleichung einer Hyperbel, wo die grosse Axe $=\sqrt{a^2-n^2b^2}$, die kleine $=b$ ist.

Einen Uebelstand bei der Verzeichnung eines solchen Körpers giebt nun aber die Bestimmung von a und b, welche blos mittels Rechnung erfolgen kann, indem man mit dem Maasstabe zu zwei verschiedenen Abscissen in der erstern Hyperbel zwei verschiedene Ordinaten abnimmt; aus zwei Gleichungen lassen sich dann zwei Unbekannte a und b finden. Dies ist natürlich blos nöthig, wenn die Gleichung des schattenwerfenden Körpers nicht bestimmt gegeben ist, da sich sonst hieraus, wie oben gezeigt, a und b finden lässt. Ein um so günstigeres Verhältniss ist es daher, dass gerade dieser Körper, wie schon erwähnt, zu den seltenen gehört und durch das früher beschriebene Hyperboloid vertreten wird.

Ich hoffe, dass durch das Vorhergehende das Princip, auf welches es wesentlich ankommt, hinlänglich deutlich geworden sein wird, so dass man in vorkommenden, mehr oder weniger abweichenden Fällen im Stande ist, sich selbst neue Formeln und Abhängigkeiten zu entwickeln.

Zum Schlusse der Betrachtung über Rotationskörper will ich blos noch ein Beispiel anführen, um zu zeigen, dass das Verfahren sich nur wenig ändert, wenn die Lichtstrahlen nicht parallel der Ebene seiner Neigung auf den Körper fallen; es treten dann zusammengehörige Durchmesser an die Stelle der Axen.

Es sei also (Taf. II. Fig. 2.) ein Sphäroid *ABCD* von einem sowohl im Grund- als Aufriss schief stehenden Lichtstrahl *X* beleuchtet und es soll der Schatten gefunden werden, den es auf die horizontale Bodenfläche wirft.

(Um auch die sehr nützliche Anwendung auf das geometrische Zeichnen darzuthun, sei es mir erlaubt, hier abweichend darauf aufmerksam zu machen, wie leicht sich, hat man $A_1 B_1 C_1 D_1$ im Aufriss gegeben, dieses Ellipsoid in den Grundriss zeichnen lässt; man hat blos nöthig, die Linien $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$ tangential von der Ellipse des Aufrisses herabzuziehen, so giebt $\alpha\beta$ eine Axe der Ellipse im Grundriss, während die zweite rechtwinklig dagegen, *FG*, natürlich gleich $C_1 D_1$ ist; hieraus verzeichnet man dann leicht, am besten durch Krümmungskreise, die Ellipse. Es genügt zur Erklärung dieses Verfahrens, vorher zu wissen, dass wieder eine Ellipse resultiren müsse, und dies ist einleuchtend, da man sich als Ellipsen darstellende Kreise hat, die wieder nach einer projicirten Ellipse fortschreiten, ganz ähnlich wie bei dem früher beschriebenen Falle der Schattenconstruction.)

Man verzeichne sich zuerst, ganz wie früher, den Schatten einer durch die Axe *CD* gehenden, rechtwinklig zur Neigung des Körpers, also auch rechtwinklig zur Aufrissebene, liegenden Schnittebene, *abfg*, und hierauf den Schatten eines Kreisdurchschnittes des Körpers, am besten den durch die Mitte, als *cdfg*. Es ist nicht nöthig, beide Zeichnungen auszuführen, sondern es genügt, wie wir später sehen werden, die einer, nämlich am besten der kleinern, was von der Neigung des Ellipsoids abhängt; hier wird man also blos *abfg* auszuführen haben. Die Construction dieser Ellipsen ergiebt sich daraus, dass sowohl *ab* und *gf*, als auch *fg* und *cd* zusammengehörige Durchmesser derselben sind, wovon man sich dadurch überzeugen kann, dass sowohl die Axe *AB*, als auch der Kreisdurchmesser *CD* alle mit dem andern Durchmesser parallele Sehnen halbirt, was auch im Schatten bleiben muss. Die Aufgabe besteht nun eigentlich darin, die Umhüllungscurve zu suchen, welche aus der Fortbewegung von Ellipsen ähnlich *cdfg* auf *ab* nach dem Gesetze der Veränderung von Parallelen mit *gf* oder *of* in der Ellipse *abfg* entsteht; dasselbe Resultat ergiebt sich aber auch, wenn man umgekehrt Ellipsen ähnlich *abgf* auf *cd* nach den Ordinaten der Ellipse *cdgf* sich fortlaufend denkt, was auch aus der Betrachtung des Ellipsoids selbst hervorgeht, und darauf gründet es sich, dass man eine beliebige der beiden Ellipsen ausziehen kann, nämlich die, welche man als fortschreitend annimmt, wozu man natürlich lieber die kleinere wählt. Dass aber überhaupt eine Ellipse ausgezogen werden muss und man nicht wie bei dem frühern Falle einer parallelen Beleuchtung verfahren kann, soll gleich im Folgenden näher gezeigt werden. Will man nämlich diese Aufgabe, wie sie hier gestellt ist, sogleich lösen, so wird man nicht nur Winkel einführen müssen, sondern auch ziemlich grosse Ausdrücke der Abhängigkeit erhalten, welche für die Zeichnung unbrauchbar sind; dagegen kommt man zu einem sehr einfachen Resultate, wenn man die zusammengehörigen Durchmesser der fortschreitenden Ellipse verlegt, nämlich so, dass der eine auf die Linie fällt, auf der die Ellipsen fortschreiten; es wird dann *hk* der eine, *mn* der andere der zusammengehörigen Durchmesser. Hiernach lassen sich

un einfache Abhängigkeitsverhältnisse der Umhüllungscurve finden.
Bezeichnet man ok als Halbmesser der sich verändernden Ellipse durch r und om durch nr, also $\frac{om}{ok}=n$, so wird, behält man die andern Bezeichnungen wie früher bei, so dass also $oc=od=a$, $of=og=b$, $\alpha=$Entfernung des r von o, x die Abscisse der Umhüllungscurve von o aus und y die dazu gehörige Ordinate parallel r ist, da für zusammengehörige Durchmesser dieselben Gleichungen als für die Axen gelten:

$$\frac{y^2}{r^2}+\frac{(\alpha-x)^2}{n^2r^2}=1$$

und

$$r=\mu\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\alpha^2},$$

wo μ das Verhältniss angiebt, in dem die mit b parallelen Durchmesser zu dem variablen r stehen (es ist dies ein constantes Verhältniss, da beide Linien immer denselben Winkel einschliessende Durchmesser ähnlicher Ellipsen sind). Es ist nun aber hiernach in dem Stande wie $ok=\mu b$, und bezeichnet man diese constant Grösse durch l, so wird demnach:

$$r=\frac{l}{a}\sqrt{a^2-\alpha^2},$$

und folglich

$$ny^2+(\alpha-x)^2=n^2\frac{l^2}{a^2}(a^2-\alpha^2),$$

welche Gleichung wir auch früher hatten, nur dass hier l statt dort b steht. Ganz ähnlich wird daher auch das Resultat:

$$\frac{x^2}{a^2+n^2l^2}+\frac{y^2}{l^2}=1,$$

die Gleichung einer Ellipse zwischen zusammengehörigen Durchmessern, von welchen einer $=\sqrt{a^2+n^2l^2}$ ist und der andere $=l$ bleibt.

Um also den Durchmesser der zu verzeichnenden Ellipse au der verlängerten cd zu finden, errichte man in o ein Perpendike mache dasselbe $=nl$, d. i. $=om$, und ziehe die Hypotenuse p welche die verlangte Grösse $\sqrt{a^2+n^2l^2}$ giebt. Aus den zusa mengehörigen Durchmessern hk und st beschreibt man nun w gewöhnlich die Ellipse.

Die Construction der Ellipse aus zusammengehörigen Du messern kann auf verschiedene Weise erfolgen; eine ziem einfache Art will ich hier anhangsweise noch beifügen, ohne je einen weitern Beweis dafür zu liefern.

Man beschreibe um den einen Durchmesser, am bester grössern, AB (Taf. I. Fig. 4.), einen Kreis oder Halbkreis richte auf AB im Mittelpunkte C ein Perpendikel CF un

binde FE; legt man nun durch beliebige Punkte C_1, C_2, C_3, C_4 etc. der AB ähnliche Dreiecke im Halbkreise, was leicht durch Parallelen geschieht, so erhält man in E_1, E_2, E_3, E_4 etc. beliebig viele Punkte der Ellipse.

Man kann auch die Methode der Construction durch Krümmungskreise hier anwenden, obgleich mit weniger Vortheil, als wenn die Axen gegeben sind.

Nachdem nun so das Princip festgestellt und auch die Rotationskörper ziemlich ausführlich betrachtet worden sind, bleibt es nur noch übrig, auch mit wenig Worten auf die gekrümmten Flächen der zweiten Ordnung überhaupt einzugehen und deren Relationen zu den beschriebenen Umdrehungskörpern der zweiten Ordnung anzugeben. Die hierhergehörigen Körper sind namentlich: das Ellipsoid, das Paraboloid (elliptisches Paraboloid), das Hyperboloid und zwar mit einem und mit zwei Mänteln oder mit ununterbrochener oder getrennten Höhlungen, und endlich das hyperbolische Paraboloid.

Was das Ellipsoid betrifft, so ist das Verfahren bei der Schattenzeichnung ganz wie beim Sphäroid, nur dass ein elliptischer Durchschnitt sich statt eines Kreisdurchschnittes im Schatten als Ellipse projicirt. Der einzige Unterschied, der eintreten kann, ist, dass sich bei paralleler Beleuchtung schon ein Fall ähnlich dem zuletzt erwähnten bei schiefer Beleuchtung herausstellt, was von der Stellung der Neigung des Körpers abhängt.

Das elliptische Paraboloid verhält sich zum Umdrehungsparaboloid ganz wie das Ellipsoid zum Sphäroid, so dass hierüber nichts weiter zu sagen ist, und ebendasselbe gilt von einem Hyperboloide mit einem Mantel zum Umdrehungshyperboloide, wie aus der Entstehung solcher Körper sehr leicht folgt; s. Leroy „Darstellende Geometrie“, deutsch von Kauffmann. S. 38.

Das Hyperboloid mit zwei Mänteln oder getrennten Höhlungen findet seinen Repräsentanten in dem dritten der drei zuletzt betrachteten Rotationskörper, der aus der Drehung einer Hyperbel um ihre wirkliche Axe entsteht, nur dass wir im Beispiel sich blos eine halbe Hyperbel drehen liessen, während bei diesem Hyperboloid die andere Hälfte nicht vernachlässigt werden darf. Es hat dies noch den Vortheil, dass man dann gleich den Axenwerth a mit im Schatten erhält.

Der letzte dieser Körper, das hyperbolische Paraboloid, hat zwar keinen Vertreter im Frühern, doch werden wir auch darüber kurz hinweggehen können, indem der Körper zu ungewöhnlich ist, um eine Formelableitung zu lohnen, bei welcher man es offenbar nicht mit einer Umhüllungscurve fortlaufender Ellipsen, sondern vielmehr von Parabeln oder Hyperbeln zu thun hat, die nach einer andern Parabel fortschreiten.

V.

Ueber die verschiedenen Ausdrücke des Krümmungshalbmessers einer gegebenen Curve.

Von dem
Herrn Dr. J. Ph. Wolfers,
astronomischen Rechner an der Königl. Sternwarte zu Berlin.

In den Lehrbüchern der Mechanik kommen verschiedene Ausdrücke des Krümmungshalbmessers in Anwendung, je nachdem man andere Coordinaten oder andere Urvariabeln annimmt. Einige derselben werden auf nicht ganz einfache Weise hergeleitet, weshalb hier einmal der Versuch gemacht werden soll, dieselben systematisch herzuleiten. Hierbei wird jedoch die Aufgabe in so fern beschränkt, als nur eine Curve einfacher Krümmung, die also in einer Ebene liegt, betrachtet werden soll.

§. 1. Aufgabe. Es ist eine Curve AP (Taf. II. Fig. 3.) und auf ihr der Punkt P durch die rechtwinkligen Coordinaten $AB = x$ und $PB = y$ gegeben; man soll den Krümmungshalbmesser der Curve in diesem Punkte bestimmen.

Auflösung. Sind $AD = \alpha$ und $CD = \beta$ die Coordinaten des Mittelpunktes C des osculirenden Kreises, ist γ sein Radius, d. h. der gesuchte Krümmungshalbmesser; so müssen bekanntlich für die Curve und den Kreis sowohl die Coordinaten des Punktes P, als auch ihre ersten und zweiten Differentiale identisch sein. Da nun die Gleichung des gesuchten Kreises ist:

$$1)\ \gamma^2 = (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2,$$

so ergiebt sich hieraus durch zweimalige Differentiation, weil γ, α und β constant sind:

$$2)\ 0 = (y-\beta)\,dy + (x-\alpha)\,dx,$$

$$3)\ 0 = dy^2 + dx^2 + (y-\beta)\,ddy + (x-\alpha)\,ddx.$$

Durch Verbindung dieser zwei Gleichungen erhält man

$$4)\ y-\beta=\frac{(dy^2+dx^2)\,dx}{dy\,ddx-dx\,ddy}$$

und

$$5)\ x-\alpha=-\frac{(dy^2+dx^2)\,dy}{dy\,ddx-dx\,ddy}.$$

Substituirt man die letztern Werthe in 1) und zieht alsdann die Quadratwurzel aus, so ergiebt sich

$$\text{I.}\quad \gamma=\frac{(dy^2+dx^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,ddx-dx\,ddy}=\frac{ds^3}{dy\,ddx-dx\,ddy}.$$

Hier bezeichnet $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ das Element des Bogens der Curve und es ist hier keine der Veränderlichen x, y und s als urvariabel vorausgesetzt.

Zusatz 1. Nimmt man, wie es gewöhnlich geschieht, x als urvariabel, also

$$ddx=0$$

an, so erhält man sogleich

$$\text{II.}\quad \gamma=-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,ddy}=-\frac{ds^3}{dx\,ddy}.$$

In dieser Formel pflegt man wie hier das negative Zeichen zu wählen, wenn die Curve gegen die Abscissenaxe concav ist.

Unter derselben Voraussetzung, dass $ddx=0$ sei, erhält man aus $ds^2=dx^2+dy^2$:

$$ds\,dds=dy\,ddy,$$

und so, wenn man ddy aus II. eliminirt:

$$\text{III.}\quad \gamma=-\frac{ds^2.\,dy}{dx\,dds}.$$

Zusatz 2. Nimmt man y als urvariabel an, setzt also

$$ddy=0,$$

so folgt aus I.:

$$\text{IV.}\quad \gamma=\frac{ds^3}{dy\,ddx}.$$

Unter derselben Voraussetzung folgt aber aus $ds^2=dx^2+dy^2$:

$$ds\,dds=dx\,ddx,$$

und wenn man daher ddx aus IV. eliminirt:

$$\text{V.}\quad \gamma=\frac{ds^2.\,dx}{dy\,dds}.$$

Zusatz 3. Nimmt man endlich s als urvariabel, also

$$dds = 0$$

an, so wird aus $ds^2 = dx^2 + dy^2$:

$$0 = dx\,ddx + dy\,ddy.$$

Wenn man nun mittelst der letzten Gleichung zuerst ddy, dann ddx aus I. eliminirt, so erhält man

$$\text{VI.}\quad \gamma = \frac{ds\,dy}{ddx},$$

$$\text{VII.}\quad \gamma = -\frac{ds\,dx}{ddy}.$$

§. 2. **Aufgabe.** Man soll (Taf. II. Fig. 4.) den Krümmungshalbmesser im Punkt P der Curve AP ausdrücken durch Polarcoordinaten, indem dieser Punkt durch den Radius Vector $PM = r$ und den Winkel $PMA = v$ bestimmt wird.

Auflösung. Es sei die Länge AM, durch welche die Lage des Pols M gegen den vorigen Anfangspunkt bestimmt wird, constant

$$= a.$$

Alsdann erhalten wir sogleich zwischen den rechtwinkligen Coordinaten des §. 1. und den jetzigen Polarcoordinaten die zwei Gleichungen:

$$1)\quad x = a - r\cos v,$$

$$2)\quad y = r\sin v.$$

Differentiiren wir diese Gleichungen, ohne Annahme einer bestimmten Urvariabeln, so erhalten wir:

$$3)\quad dx = r\sin v\,dv - \cos v\,dr,$$

$$4)\quad dy = r\cos v\,dv + \sin v\,dr.$$

Aus 3) und 4) ergiebt sich sogleich, wie bekannt:

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 = r^2\,dv^2 + dr^2.$$

Differentiiren wir ferner 3) und 4) noch einmal, so folgt:

$$5)\quad ddx = r\cos v\,dv^2 + 2\sin v\,dr\,dv + r\sin v\,ddv - \cos v\,ddr,$$

$$6)\quad ddy = -r\sin v\,dv^2 + 2\cos v\,dr\,dv + r\cos v\,ddv + \sin v\,ddr.$$

Substituirt man die so erhaltenen Werthe von dx, dy, ddx und ddy in I., so ergiebt sich:

$$\text{VIII.}\quad \gamma = \frac{(r^2\,dv^2 + dr^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2\,dv^3 + 2\,dr^2\,dv - r\,dv\,ddr + r\,dr\,ddv}$$

$$= \frac{ds^3}{r^2\,dv^3 + 2\,dr^2\,dv - r\,dv\,ddr + r\,dr\,ddv}.$$

Hier ist keine der drei veränderlichen Grössen s, r und v als urvariabel angenommen.

Zusatz 1. Nimmt man v als urvariabel, also

$$ddv = 0$$

an, so erhält man aus VIII. unmittelbar:

$$\text{IX.}\quad \gamma = \frac{ds^3}{r^2 dv^3 + 2 dr^2 dv - r dv\, ddr}.$$

Unter dieser Voraussetzung wird aber aus $ds^2 = r^2 dv^2 + dr^2$:

$$ds\, dds = r dr\, dv^2 + dr\, ddr,$$

und wenn man mittelst der letzten Gleichung ddr aus IX. eliminirt, nach einiger Reduction:

$$\text{X.}\quad \gamma = \frac{ds^2 dr}{2 ds\, dr\, dv - r\, dds\, dv}.$$

Zusatz 2. Nimmt man r als urvariabel, also

$$ddr = 0$$

an, so erhält man aus VIII.:

$$\text{XI.}\quad \gamma = \frac{ds^3}{r^2 dv^3 + 2 dr^2 dv + r\, dr\, ddv}.$$

Wir erhalten aber bei dieser Annahme aus $ds^2 = r^2 dv^2 + dr^2$:

$$ds\, dds = r\, dr\, dv^2 + r^2 dv\, ddv,$$

und wenn man nun ddv aus XI. eliminirt und reducirt:

$$\text{XII.}\quad \gamma = \frac{r ds^2 dv}{r ds\, dv^2 + dr\, dds}.$$

Zusatz 3. Endlich wollen wir s als urvariabel oder

$$dds = 0$$

annehmen. Alsdann folgt aus $ds^2 = r^2 dv^2 + dr^2$:

$$0 = r dr\, dv^2 + r^2 dv\, ddv + dr\, ddr.$$

Eliminirt man mittelst dieser Gleichung zuerst ddr, dann ddv aus VIII., so erhält man nach kurzer Reduction:

$$\text{XIII.}\quad \gamma = \frac{ds\, dr}{2 dr\, dv + r\, ddv},$$

$$\text{XIV.}\quad \gamma = \frac{rds\,dv}{rdv^2 - ddr}$$

Anmerkung. Hiermit sind alle einzelnen Fälle, welche bei rechtwinkligen und Polarcoordinaten vorkommen können, erschöpft; dagegen lässt sich noch ein recht einfacher Ausdruck für den Krümmungshalbmesser darstellen, indem man das vom Pol M auf die Tangente in P gefällte Perpendikel MQ als veränderliche Grösse einführt. Setzen wir demnach $MQ = p$, den Winkel PTM, welchen die Tangente mit der Abscissenaxe bildet, $= \delta$ und den Winkel $QPM = \varepsilon$; so ist bekanntlich

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{dy}{dx},\ \sin \delta = \frac{dy}{ds} \text{ und } \cos \delta = \frac{dx}{ds}.$$

Ferner haben wir

$$\varepsilon = \delta + v,$$

$$\sin \varepsilon = \frac{\cos v dy + \sin v dx}{ds}.$$

Substituirt man hier die Werthe von dx und dy aus §. 2. unter No. 3. und 4., so wird:

$$\sin \varepsilon = \frac{rdv}{ds}$$

und

$$p = r \sin \varepsilon = \frac{r^2 dv}{ds}.$$

Nimmt man nun, wie in §. 2. Zusatz 1., v als urvariabel, also

$$ddv = 0$$

an, so erhält man durch Differentiation der letzten Gleichung:

$$dp = \frac{2rdr\,dv}{ds} - \frac{r^2\,dv\,dds}{ds^2}$$

$$= \frac{2rdr\,dv}{ds} - \frac{r^2 dv}{ds^2} \cdot \frac{r\,dr\,dv^2 + dr\,ddr}{ds} \quad \text{(§. 2. Zus. 1.)}$$

$$= \frac{rdr\{r^2\,dv^3 - rdv\,ddr + 2dr^2\,dv\}}{ds^3}.$$

Vergleicht man diesen Werth mit IX., so erhält man sogleich

$$\text{XV.}\quad \gamma = \frac{rdr}{dp}.$$

Es scheint nicht unangemessen, diese seltener vorkommende Formel durch einige Beispiele zu erläutern.

Beispiel 1. Es sei $ATMB$ (Taf. II. Fig. 5.) eine Ellipse, deren halbe grosse Axe $=a$ und halbe kleine Axe $=b$ ist. Für den Mittelpunkt C als Anfangspunkt oder Pol und die grosse Axe als Abscissenaxe, sei die Abscisse CQ des beliebigen Punktes $M=x$, die Ordinate $MQ=y$, der Radius Vector $CM=r$, TMR die in M gezogene Tangente und $CT=p$ das auf sie gefällte Perpendikel. Aus der Gleichung

$$1)\quad y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

folgt sogleich

$$2)\quad \operatorname{tang}\alpha=-\frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

Ferner

$$p=(\frac{y}{\operatorname{tang}\alpha}+x)\sin\alpha,$$

d. h. weil $\sin\alpha=\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ ist:

$$3)\quad p=\frac{xdy-ydx}{\sqrt{dx^2+dy^2}};$$

oder, indem man dx eliminirt:

$$4)\quad p=\frac{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)a^2b^2}{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}}.$$

Aus

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ und } x^2+y^2=r^2$$

erhält man aber

$$x^2=\frac{a^2(r^2-b^2)}{a^2-b^2} \text{ und } y^2=\frac{b^2(a^2-r^2)}{a^2-b^2},$$

und wenn man diese Werthe in 4) substituirt:

$$5)\quad p=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2-r^2}}.$$

Hieraus erhält man durch Differentiation:

$$\frac{dp}{dr}=\frac{abr}{(a^2+b^2-r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und so nach XV.

$$\gamma=\frac{(a^2+b^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Beispiel 2. Es bleibe alles wie im vorigen Beispiele, jedoch liege der Anfangspunkt der Coordinaten oder der Pol in dem einen Brennpunkte F. Es sei der Radius Vector $FM = r'$ und das aus F auf die Tangente gefällte Perpendikel $FT' = p'$. Alsdann ist, weil der Abstand $FC = ae$ ist, wo

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

die Excentricität bezeichnet,

$$p' = p + ae \sin \alpha$$

oder

$$1)\ p' = \frac{ab + bex}{\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}}.$$

Ist nun F' der zweite Brennpunkt, so wird im Dreiecke FMF', dessen Seite FF' in C halbirt ist, nach einem bekannten Satze der Elementargeometrie:

$$r'^2 + (2a - r')^2 = 2r^2 + 2a^2e^2 = 2r^2 + 2a^2 - 2b^2$$

und so:

$$2)\ a^2 + b^2 - r^2 = 2ar' - r'^2.$$

Ferner aus $r'^2 = y^2 + (ae + x)^2$:

$$3)\ ex = r' - a.$$

Substituirt man nun die Werthe von 2) und 3) in 1); so erhält man

$$4)\ p' = \frac{br'}{\sqrt{2ar' - r'^2}}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Differentiation:

$$5)\ \frac{dp'}{dr'} = \frac{abr'}{(2ar' - r'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und nun nach XV.

$$\gamma = \frac{(2ar' - r'^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Dieser Ausdruck würde sich auch unmittelbar ergeben haben, wenn man den Werth von $a^2 + b^2 - r^2$ aus 2) in die Gleichung für γ des vorigen Beispiels substituirt hätte.

Beispiel 3. Es sei AMB (Taf. II. Fig. 6.) eine hyperbolische Spirallinie, also wenn $\angle HCM = v$ und der Radius Vector $CM = r$ gesetzt wird, ihre Gleichung

$$1)\ rv = a,$$

wo a constant ist. Die gerade Linie TMR sei eine Tangente an der Curve, dieselbe bilde verlängert mit der Axe ACR einen Winkel $=\delta$. Ferner sei $CT=p$ das von C auf die Tangente gefällte Perpendikel, endlich $CG=x$ und $MG=y$ die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes M in Bezug auf C als Anfangspunkt und CR als Abscissenaxe. Da nun

$$2)\ x=-r\cos v,$$

$$3)\ y=r\sin v;$$

so ergiebt sich durch Differentiation der Gleichungen 1), 2) und 3) und Verbindung derselben:

$$4)\ dx=r\sin v dv+\frac{r\cos v dv}{v},$$

$$5)\ dy=r\cos v dv-\frac{r\sin v dv}{v}.$$

Hieraus folgt:

$$6)\ \operatorname{tang}\delta=-\frac{dy}{dx}=\frac{\sin v-v\cos v}{\cos v+v\sin v},$$

$$7)\ \sin\delta=\frac{\sin v-v\cos v}{\sqrt{1+v^2}}.$$

Ferner

$$8)\ RG=\text{subtang}=r\sin v\frac{\cos v+v\sin v}{\sin v-v\cos v},$$

$$9)\ CR=x+\text{subtang}=\frac{rv}{\sin v-v\cos v};$$

endlich, weil $CT=CR\sin\delta$:

$$10)\ p=\frac{rv}{\sqrt{1+v^2}}=\frac{ar}{\sqrt{r^2+a^2}}.$$

Aus 10) folgt:

$$\frac{dp}{dr}=\frac{a^3}{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und so nach XV.

$$\gamma=\frac{r(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3}.$$

Substituirt man statt r seinen Werth durch v nach 1), so erhält man auch:

$$\gamma=\frac{a(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}{v^3}.$$

5*

VI.

Bemerkungen über die Kurve der Krümmungsmittelpunkte.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Dass der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte für die Punkte einer Kurve von doppelter Krümmung keine Evolute der letztern ist, hat unter Andern Lacroix im Traité du calcul diff. etc. Tom. I. p. 625. Paris. 1810. synthetisch und p. 630—31 auch analytisch erwiesen *). Die Krümmungsradien tangiren weder den Ort der Krümmungsmittelpunkte, noch ist das Differential des Bogens der letztern dem Differential des Krümmungsradius gleich. Ich habe die Relation zwischen den beiden Differentialien, sowie die relative Lage der Tangente und des Krümmungsradius aufgesucht, was meines Wissens noch nicht geschehen ist, und deshalb hier mitgetheilt wird, weil es bei manchen Untersuchungen von Nutzen sein kann.

Bezeichnet x, y, z einen beliebigen Punkt einer Kurve im Raume, α, β, γ den ihm zugehörenden Krümmungsmittelpunkt, ϱ den Krümmungshalbmesser,

$$1.\quad A(x-\alpha)+B(y-\beta)+C(z-\gamma)=0$$

die Osculationsebene im Punkte x, y, z, deren Durchschnitt mit der Kugel

$$2.\quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\varrho^2$$

den Osculationskreis giebt, so gehören dem letztern, weil er durch drei unendlich einander benachbarte Punkte der Kurve geht, bekanntlich noch folgende Gleichungen an, die durch zweimalige Differentiation der beiden vorhergehenden nach x, y, z entstehen:

---

*) Man vergl. auch Littrow analyt. Geometrie. p. 294. Wien. 1823

$$3.\ A\partial x + B\partial y + C\partial z = 0,$$
$$4.\ (x-\alpha)\partial x + (y-\beta)\partial y + (z-\gamma)\partial z = 0,$$
$$5.\ A\partial^2 x + B\partial^2 y + C\partial^2 z = 0,$$
$$6.\ (x-\alpha)\partial^2 x + (y-\beta)\partial^2 y + (z-\gamma)\partial^2 z + \partial s^2 = 0;$$

wo $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$ ist. Man findet hier die Coefficienten der Osculationsebene:

$$7.\ \begin{cases} A = \partial y\,\partial^2 z - \partial z\,\partial^2 y, \\ B = \partial z\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 z, \\ C = \partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x; \end{cases}$$

und für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes die Gleichungen

$$8.\ D^2(x-\alpha) = P\partial s^2,\ D^2(y-\beta) = Q\partial s^2,\ D^2(z-\gamma) = R\partial s^2;$$

wenn wir zur Abkürzung

$$9.\ \begin{cases} C\partial y - B\partial z = P, \\ A\partial z - C\partial x = Q, \\ B\partial x - A\partial y = R, \\ A^2 + B^2 + C^2 = D^2 \end{cases}$$

setzen. Eliminirt man aus den drei Gleichungen 8. x (also auch y, z als bekannte Funktionen von x), so bekommt man zwei Gleichungen in α, β, γ, welche die Kurve der Krümmungsmittelpunkte ausdrücken.

Es sei nun Θ der Winkel, welchen die Tangente an die Kurve der Krümmungsmittelpunkte in einem bestimmten Punkte derselben α, β, γ mit dem entsprechenden Krümmungsradius bildet; da die Gleichungen der Tangente sind $X-\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}(Z-\gamma)$, $Y-\beta = \frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(Z-\gamma)$; die Gleichungen des Krümmungsradius $X - x = \frac{x-\alpha}{z-\gamma}(Z-z)$, $Y-y = \frac{y-\beta}{z-\gamma}(Z-z)$; so ist

$$10.\ \cos\Theta = \pm\frac{(x-\alpha)\partial\alpha + (y-\beta)\partial\beta + (z-\gamma)\partial\gamma}{\varrho\partial\sigma},$$

wo $d\sigma = \sqrt{\partial\alpha^2 + \partial\beta^2 + \partial\gamma^2}$ das Differential des Bogens der Kurve der Krümmungsmittelpunkte ist. Die Differentiation der Gleichung 2. mit Rücksicht auf 4. giebt aber

$$11.\ (x-\alpha)\partial\alpha + (y-\beta)\partial\beta + (z-\gamma)\partial\gamma = -\varrho\partial\varrho,$$

folglich nach 10. und 11.

$$12.\ \partial\varrho = \pm\cos\Theta\partial\sigma.$$

Es kommt jetzt darauf an, den Winkel Θ zu bestimmen. Zu dem Ende muss man eine andere Relation zwischen den Differentialen $\partial\varrho$, $\partial\sigma$ suchen.

Differenziren wir die Gleichungen 1. und 4., indem Alles veränderlich gedacht wird, und berücksichtigen dabei 3. und 6., so kommt

$$-A\partial\alpha - B\partial\beta - C\partial\gamma + (x-\alpha)\partial A + (y-\beta)\partial B + (z-\gamma)\partial C = 0,$$
$$\partial x\partial\alpha + \partial y\partial\beta + \partial z\partial\gamma = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen der Reihe nach $\partial\gamma$, $\partial\beta$, $\partial\alpha$ und setzt zur Abkürzung

$$13.\quad (x-\alpha)\partial A + (y-\beta)\partial B + (z-\gamma)\partial C = A\partial\alpha + B\partial\beta + C\partial\gamma = T,$$

so erhält man

$$14.\quad \begin{cases} Q\partial\alpha - P\partial\beta = T\partial z, \\ R\partial\beta - Q\partial\gamma = T\partial x, \\ P\partial\gamma - R\partial\alpha = T\partial y \end{cases}$$

Nun betrachte man die Gleichung 11., multiplicire sie der Reihe nach mit P, Q, R und setze im ersten Falle für $P\partial\beta$, $P\partial\gamma$, im zweiten für $Q\partial\alpha$, $Q\partial\gamma$, im dritten für $R\partial\alpha$, $R\partial\beta$ ihre sich aus 14. ergebenden Werthe, so kommt für $P(x-\alpha) + Q(y-\beta) + R(z-\gamma) = U$:

$$15.\quad \begin{cases} U\partial\alpha = T\partial z(y-\beta) - T\partial y(z-\gamma) - P\varrho\partial\varrho, \\ U\partial\beta = T\partial x(z-\gamma) - T\partial z(x-\alpha) - Q\varrho\partial\varrho, \\ U\partial\gamma = T\partial y(x-\alpha) - T\partial x(y-\beta) - R\varrho\partial\varrho. \end{cases}$$

Jetzt quadrire man diese Gleichungen, addire die Quadrate und ziehe die Wurzel aus, so erhält man

$$\begin{aligned} 16.\quad U\partial\sigma = \sqrt{[}&(T\partial z(y-\beta) - T\partial y(z-\gamma) - P\varrho\partial\varrho)^2 \\ &+ (T\partial x(z-\gamma) - T\partial z(x-\alpha) - Q\varrho\partial\varrho)^2 \\ &+ (T\partial y(x-\alpha) - T\partial x(y-\beta) - R\varrho\partial\varrho)^2]. \end{aligned}$$

Setzt man aber für $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ ihre Werthe aus 8., so wird $U = \frac{P^2+Q^2+R^2}{D^2}\partial s^2$; bekanntlich ist aber $P^2+Q^2+R^2 = D^2\partial s^2$, also

$$17.\quad U = \partial s^4.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung 16. giebt die Entwickelung

$$\{T\partial z(y-\beta) - T\partial y(z-\gamma)\}^2 + \{T\partial x(z-\gamma) - T\partial z(x-\alpha)\}^2 + \{T\partial y(x-\alpha) - T\partial x(y-\beta)\}^2 = T^2\varrho^2\partial s^2;$$

ferner, mit Berücksichtigung von 8.:

$$P\{\partial z(y-\beta) - \partial y(z-\gamma)\} + Q\{\partial x(z-\gamma) - \partial z(x-\alpha)\} + R\{\partial y(x-\alpha) - \partial x(y-\beta)\} = 0,$$

und somit verwandelt sich die Gleichung 16. in

$$18.\quad \partial s^3 \partial\sigma = \varrho\sqrt{T^2 + D^2\partial\varrho^2}.$$

Weil endlich der Krümmungsradius $\varrho = \frac{\partial s^3}{D}$, so hat man statt 18. die Gleichung

$$19.\quad \partial\sigma = \sqrt{\left(\frac{T}{D}\right)^2 + \partial\varrho^2}.$$

Aus dieser Relation folgt leicht $\frac{T}{D} = \sin\Theta\partial\sigma$ oder $\sin\Theta = \frac{T}{D\partial\sigma}$ $= \frac{A\partial\alpha + B\partial\beta + C\partial\gamma}{D\partial\sigma}$. Daraus sieht man, dass Θ zugleich der Winkel ist, welchen die Tangente mit der Osculationsebene bildet, dass folglich die Projection der Tangente auf die Osculationsebene der Krümmungsradius ist.

Für die Grösse T ist jetzt ein Ausdruck zu suchen, in welchem blos die Elemente der gegebenen Kurve vorkommen. Ein solcher ergiebt sich leicht aus

$$T = (x-\alpha)\partial A + (y-\beta)\partial B + (z-\gamma)\partial C.$$

Denn man hat

$$\begin{aligned}\partial A &= \partial y\partial^3 z - \partial z\partial^3 y,\\ \partial B &= \partial z\partial^3 x - \partial x\partial^3 z,\\ \partial C &= \partial x\partial^3 y - \partial y\partial^3 x;\end{aligned}$$

folglich, wenn man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung einführt und für $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ ihre Werthe aus 8. nimmt:

$$\begin{aligned}20.\quad T &= \frac{\partial s^4}{D^2}(A\partial^3 x + B\partial^3 y + C\partial^3 z)\\ &= \frac{\partial s^4}{D^2}\left[\partial x(\partial^2 y\,\partial^3 z - \partial^2 z\partial^3 y) + \partial y(\partial^2 z\partial^3 x - \partial^2 x\partial^3 z)\right.\\ &\qquad\left. + \partial z(\partial^2 x\partial^3 y - \partial^2 y\partial^3 x)\right].\end{aligned}$$

Bezeichnet τ den Flexionswinkel, so ist bekanntermassen

$$21.\quad T = \tau ds^3,$$

und die Grösse τ, also auch T verschwindet, oder es wird $\partial\varrho = \pm\partial\sigma$, $\Theta = 0$, wenn die gegebene Kurve von einfacher Krümmung ist. Nur in diesem Falle ist folglich die Kurve der Krümmungsmittelpunkte eine Evolute der gegebenen.

Für die Verhältnisse $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ endlich kann man die Cosinusse der Neigungswinkel der Osculationsebene gegen die Ebenen

der yz, xz, xy einführen; heissen diese resp. ν, μ, λ, so ist nach 20.:

$$22.\quad T=\frac{\partial s^4}{D}(\cos\nu\partial^3x+\cos\mu\partial^3y+\cos\lambda\partial^3z)$$
$$=\varrho\partial s(\cos\nu\partial^3x+\cos\mu\partial^3y+\cos\lambda\partial^3z).$$

VII.

Beweis eines Theorems von den Kegelschnitten.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Durch vier Punkte in einer Ebene sei ein beliebiger Kegelschnitt gelegt; es wird die Richtung der beiden Axen (der einen Axe der Parabel) gesucht.

Nimmt man zwei Gegenseiten des durch die vier Punkte bestimmten Vierecks als Coordinatenaxen an, welche den Winkel u einschliessen, und bezeichnet die Coordinaten der beiden auf der Axe der x liegenden Punkte durch α, 0; α', 0; die Coordinaten der beiden andern auf der Axe der y liegenden Punkte durch 0, β; 0, β'; die Gleichung des Kegelschnitts, der um das Viereck beschrieben worden, durch

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0;$$

so hat man folgende Relationen:

$$1.\quad C\alpha^2+2E\alpha+F=0,$$
$$2.\quad C\alpha'^2+2E\alpha'+F=0,$$
$$3.\quad A\beta^2+2D\beta+F=0,$$
$$4.\quad A\beta'^2+2D\beta'+F=0.$$

Eliminirt man E aus den beiden ersten Gleichungen, D aus den beiden andern, so kommt

$$5.\ C=\frac{F}{\alpha\alpha'},\ A=\frac{F}{\beta\beta'}.$$

Ist nun ξ der Winkel, welchen die Axen des Kegelschnitts mit der Axe der x bilden, so hat man bekanntermassen

$$6.\ \operatorname{tang} 2\xi=\frac{C\sin 2u-2B\sin u}{A-2B\cos u+C\cos 2u},$$

folglich, wenn man die Werthe von A und C aus 5. in 6. einführt:

$$7.\ \operatorname{tang} 2\xi=\frac{F\beta\beta'\sin 2u-2B\alpha\alpha'\beta\beta'\sin u}{F(\alpha\alpha'+\beta\beta'\cos 2u)-2B\alpha\alpha'\beta\beta'\cos u}.$$

Damit ist die Richtung der Axen nur von dem Verhältniss $\frac{B}{F}$ abhängig und somit noch unbestimmt, wie es auch sein muss, in dem durch vier Punkte unendlich viele Linien zweiten Grades gelegt werden können.

Indessen giebt es einen Fall, in welchem tang 2ξ von $\frac{B}{F}$ unabhängig ist, und um diesen aufzufinden, setze man tang $2\xi=\gamma$, indem γ eine constante Grösse bezeichnen soll. Bringt man die Gleichung

$$\frac{F\beta\beta'\sin 2u-2B\alpha\alpha'\beta\beta'\sin u}{F(\alpha\alpha'+\beta\beta'\cos 2u)-2B\alpha\alpha'\beta\beta'\cos u}=\gamma$$

auf Null, so erhält man

$$F\{\beta\beta'\sin 2u-\gamma(\alpha\alpha'+\beta\beta'\cos 2u)\}-2B\alpha\alpha'\beta\beta'(\sin u-\gamma\cos u)=0,$$

und da diese Gleichung für jedes B gelten soll, einzeln:

$$8.\ \beta\beta'\sin 2u-\gamma(\alpha\alpha'+\beta\beta'\cos 2u)=0,$$

$$9.\ \sin u-\gamma\cos u=0.$$

Eliminirt man γ aus diesen beiden Gleichungen, so entsteht $(\beta\beta'-\alpha\alpha')\sin u=0$, also, da $\sin u$ nicht verschwindet,

$$10.\ \beta\beta'=\alpha\alpha'.$$

Man erhält ferner aus 9. tang $u=\gamma$, also

$$11.\ \operatorname{tang} 2\xi=\operatorname{tang} u.$$

Man übersieht leicht, dass der Gleichung 10. der Fall entspricht, in welchem die vier Punkte in einer Kreislinie liegen, und da nach 11.

$$\xi=\tfrac{1}{2}u \text{ und } \xi=90^0+\tfrac{1}{2}u,$$

so haben wir folgendes Theorem, welches mir vor längerer Zeit als ein von Clausen gefundenes von dem Herrn Herausgeber gelegentlich zum Beweise vorgelegt wurde:

„**Beschreibt man durch vier in einer Kreislinie liegende Punkte unendlich viele Linien des zweiten Grades, so sind deren Axen einer und derselben Richtung parallel, derjenigen nämlich, welche die von den Gegenseiten des Vierecks gebildeten Winkel halbirt.**"

VIII.

Elementare Darstellung einer höchst einfachen Berechnung des Kreisverhältnisses.

Von

Herrn Doctor Wilh. Matzka,

Professor der Mathematik zu Tarnow.

1. J. Schwab (gestorben 1813 zu Nancy) hat bekanntlich in einem kleinen Werkchen (Elémens de géométrie. 8. Nancy. 1813. p. 104) ein äusserst einfaches Verfahren gelehrt *), das Verhältniss π der Kreislinie zum Durchmesser näherungsweise zu bestimmen, welches auch bereits einige (freilich nur wenige) neuere Lehrbücher der Geometrie aufgenommen haben; z. B. Vincent in seinem Cours de géométrie.

Es gründet sich dieses Verfahren auf den leicht nachweisbaren Zusammenhang umfangsgleicher regelmässiger Vielecke, dass, wenn R, r bei einem regelmässigen $n$ecke, und R', r' bei einem regelmässigen $2n$ecke, welche gleiche Umfänge haben, die Halbmesser der um- und eingeschriebenen Kreise vorstellen,

$$r' = \frac{r+R}{2}, \quad R' = \sqrt{Rr'}$$

*) Terquem weist in Liouville „Journal de mathém." t. 3. an. 1838. p. 98. nach, dass schon Descartes („Oeuvres de Descartes" publ. par V. Cousin. t. 11. p. 442.) diesen Vorgang gelehrt und Euler im J. 1763 („Novi comm. Petrop." t. 8. p. 157.) darauf aufmerksam gemacht hat. — So muss das in den Bibliotheken Vergrabene immer wieder neu erfunden werden!

ist. Verdoppelt man nun die Seitenzahl fortwährend und stellt die Halbmesser der successiven Vielecke in die Reihe

$$r, R; \; r', R'; \; r'', R''; \; r''', R'''; \; \ldots;$$

so ist vom dritten Gliede an jedes folgende erst das arithmetische und dann das geometrische Mittel; ja sogar, wenn bei weiterem Vorschreiten die Glieder sich hinreichend einander genähert haben, auch nur das arithmetische Mittel seiner beiden Vorgänger. Und die Grenze der Glieder ist der Halbmesser des Kreises, von demselben Umfange, wie alle diese regelmässigen Vielecke.

Sind dann einmal zwei solche Glieder A und B erreicht, deren geometrisches Mittel mit dem arithmetischen in so viel Dezimalziffern als man für die Grenze verlangt, übereinstimmt, so findet man sogleich die geforderte Grenze: $= B + \frac{A-B}{3} = B - \frac{B-A}{3}$.

2. Leider lässt diese so leicht herzuleitende und höchst einfache Rechnung, weil der Zusammenhang der eigentlich zu suchenden Zahl, π, mit der vorläufig zu berechnenden Hilfsgrösse — Halbmesser des Kreises von gegebenem Umfange — nicht offen und klar vor Augen liegt, nicht überschauen, wie man dem vorgesteckten Ziele, d. i. dem Verhältnisse der Kreislinie zu ihrem Durchmesser, durch allmälige Feststellung seiner nach einander folgenden Dezimalziffern, Schritt für Schritt näher rückt, was man bei einem mündlichen Vortrage dieses Verfahrens ungern vermisst. Das bewog mich, eine andere Hilfsgrösse ausfindig zu machen, welche diesem Mangel abhilft. Als solche fand ich, wie die nachfolgende Herleitung ausweisen soll, am zusagendsten das umgekerte obige Verhältniss, $\frac{1}{\pi}$, nemlich jenes **des Durchmessers zur Kreislinie, so wie zum Umfange des ein- oder umgeschriebenen regelmässigen Vieleckes**; da man hier dieselbe bequeme wiederholt abwechselnde Berechnung des arithmetischen und geometrischen Mittels benützen darf.

3. Sei (in Taf. III. Fig. 1.) d der Durchmesser eines Kreises; von dem ihm eingeschriebenen regelmässigen $n$ecke und $2n$ecke eine Seite AB und AC, der Umfang p und p'; von dem umgeschriebenen regelmässigen $n$ecke und $2n$ecke eine halbe Seite CE und GH, der Umfang P und P'; so dass man hat:

$$p = n.AB = n.2AD,$$
$$p' = 2n.AC = 2n.2AF,$$
$$P = n.2CE,$$
$$P' = 2n.2GH;$$

also

$$2n = \frac{p}{AD} = \frac{p'}{2AF = AC} = \frac{P}{CE} = \frac{P'}{2GH}.$$

4. Hiervon benutzen wir vor Allem die Proportion

$$P' : p = 2GH : DA,$$

verlängern CO zum Durchmesser CJ und führen AJ, wodurch $\Delta\, JDA \backsim OGH$ wird *). Aus diesem folgt:

$$GH:DA = OG:JD = \frac{d}{2}:JD,$$

daher wird $P':p = d:JD$.

Zur Wegschaffung der JD betrachten wir das Dreieck OCE, in welchem $DA \parallel CE \perp OC$; daher erhalten wir

$$OD:DA = OC:CE,$$

also wegen $DA:p = CE:P$:

$$OD:p = \frac{d}{2}:P = OD + \frac{d}{2}:p+P$$
$$= JD:p+P,$$

und hieraus

$$d:JD = P:\frac{p+P}{2}.$$

Mithin geben beide Proportionen vereint

$$P':p = P:\frac{p+P}{2};$$

und sofort, wenn p, P, P' in Bezug auf eine beliebige Längeneinheit die Maasszahlen oder Zahlwerthe der betreffenden Vielecks-Umfänge vorstellen:

$$P' = pP:\frac{p+P}{2} = \frac{pP}{(p+P):2}.$$

So einfach auch diese Gleichung schon ist, so wird sie doch noch einfacher, wenn man ihr Umgekehrtes nimmt und die Theilung einzeln vollbringt, da dann

$$\frac{1}{P'} = \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{p}\right):2$$

wird. Ihr gemäss ist für jede Längeneinheit der umgekehrte (reciproke) Werth des Umfanges P' des umgeschriebenen $2n$ecks das arithmetische Mittel der umgekehrten Werthe der Umfänge p und P der ein- und umgeschriebenen $n$ecke; oder der Umfang P' des

---

*) Aehnliche so wie auch congruente Dreiecke pflege ich jederzeit so zu bezeichnen, dass gleichvielte Buchstaben die Spitzen gleicher Winkel andeuten; wonach auch jede zwei mit gleichvielten Buchstaben bezeichneten Seiten homolog sind, und man demgemäss sehr leicht übersieht, welche Winkel gleich und welche Seiten gleichliegend seien.

umgeschriebenen $2n$ecks ist das harmonische Mittel der Umfänge p und P der ein- und umgeschriebenen $n$ecke *).

5. Die bei F und D rechtwinkligen Dreiecke CDA und CFO haben den Winkel an C gemeinschaftlich; also sind sie ähnlich, und daher ist

$$CA:DA = CO:FO, \text{ und nach dem Obigen in 3.}$$

$$= p':p,$$

folglich

$$p':p = \frac{d}{2}:FO.$$

Ferner ist zur Elimination von FO im Dreiecke OGH die $FA \parallel GH \perp OG$, mithin

$$GO:FO = GH:FA,$$

nemlich

$$\frac{d}{2}:FO = P':p';$$

also giebt die Vereinigung beider Proportionen die neue

$$P':p' = p':p,$$

und hieraus, wenn wieder p, p', P' die Zahlwerthe der betreffenden Umfänge vorstellen, ist

$$p' = \sqrt{p \cdot P'}.$$

Nimmt man, der Gleichförmigkeit wegen, auch hiervon das Umgekehrte, so wird

$$\frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{P'}}.$$

6. Zwischen den Umfängen p und P der beiden regelmässigen $n$ecke besteht eines Theils die Proportionalität derselben zu den Halbmessern OD und $\frac{d}{2}$ der ihnen eingeschriebenen Kreise, nemlich (wie auch in 4.):

$$p:P = OD:\frac{d}{2};$$

und andern Theils ist im rechtwinkligen Dreiecke OAD:

---

*) Die letztere Auslegung obiger Gleichung fand ich blos in van Swinden's „Elem. d. Geom.", übersetzt von Jacobi, Jena 1834, angezeigt; obwohl sie schon Lamy († 1715) und Horrebow (1737) kannten.

$$OD^2 = OA^2 - AD^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2n}\right)^2,$$

daher

$$p^2 : P^2 = d^2 - \left(\frac{p}{n}\right)^2 : d^2.$$

Diese Proportion wird vereinfacht, wenn man durch p^2 und d^2 theilend ihr die Form anweist:

$$\frac{1}{P^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{(nd)^2}$$

oder

$$\left(\frac{1}{p}\right)^2 - \left(\frac{1}{P}\right)^2 = \frac{1}{(nd)^2};$$

so dass man danach aus jedem der umgekehrten Werthe der Umfänge p und P den des andern leicht berechnen kann.

7. Die letzte Gleichung macht dadurch, dass sie noch mehr an Einfachheit gewinnt, wenn man sie mit d^2 multiplizirt, d. h. die Umfänge p und P zu dem Durchmesser d ins Verhältniss nimmt, folglich in

$$(1.)\quad \left(\frac{d}{p}\right)^2 - \left(\frac{d}{P}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

übergeht, darauf aufmerksam, dass dieses Verfahren füglich auch auf die früheren zwei Gleichungen anzuwenden sei. Geschieht dies, indem man selbe mit d multiplizirt, so erhalten sie folgende Gestalt:

$$(2.)\quad \frac{d}{P'} = \left(\frac{d}{P} + \frac{d}{p}\right) : 2,$$

$$(3.)\quad \frac{d}{p'} = \sqrt{\frac{d}{p} \cdot \frac{d}{P'}}.$$

8. Kennt man demnach eines der beiden Verhältnisse $\frac{d}{P}$ und $\frac{d}{p}$, so sucht man das andere mittelst der Gleichung (1.), dann zu ihnen gemäss der Gleichung (2.) das arithmetische Mittel $\frac{d}{P'}$, und zu diesem und zum nächst vorhergehenden Verhältnisse $\frac{d}{p}$ gemäss der Gleichung (3.) das geometrische Mittel $\frac{d}{p'}$.

Auf diese Weise liegt jedes nachfolgende Verhältniss zwischen den zwei unmittelbar vorhergehenden und diese Verhältnisse nähern sich, bei unendlichem Wachsen der Seitenzahl n, einer Grenze, welche, weil für $\lim n = \infty$, wenn man die Kreislinie c nennt, sowohl $\lim p = c$ als auch $\lim P = c$ ist, $\frac{d}{c} = 1 : \frac{c}{d} = 1 : \pi = \frac{1}{\pi}$ sein

muss. Da nun auch diese Grenze zwischen jeden zwei nach einander berechneten Verhältnissen liegt, so müssen diejenigen und so viele Anfangsziffern derselben richtig bestimmt sein, als welche und wie viele in beiden Verhältnissen die nemlichen sind.

9. Legt man z. B. das eingeschriebene regelmässige Sechseck, $n=6$, zu Grunde, so ist seine Seite gleich dem Halbmesser $\frac{d}{2}$; daher sein Umfang

$$p=6\frac{d}{2}=3d \text{ und sonach } \frac{d}{p}=\frac{1}{3}.$$

Daraus findet man

$$\frac{d}{P}=\sqrt{\frac{1}{3^2}-\frac{1}{6^2}}=\frac{1}{6}\sqrt{2^2-1}=\frac{1}{6}\sqrt{3}.$$

Bedient man sich bei der weitern Rechnung der 7stelligen Logarithmen, so findet man allmälig folgende zusammengehörigen Verhältnisse:

n	$d:P$	$d:p$
6	0·288675	0·333333
12	0·311004	0·321975
24	0·316489	0·319220
48	0·317854	0·318536.

Von 0·319220 und 0·317854 ist das arithmetische Mittel $=0·318537$ hinreichend nahe gleich dem geometrischen 0·3185364. Nimmt man nun die beiden letzten Zahlen 0·317854
und 0·318536

so ist ihr Unterschied 682
sein Drittel 227

also die Grenze $\frac{1}{\pi}$ = 0·318309.

Es ist demnach in 6 Anfangsziffern nahe richtig $\frac{1}{\pi}=d:c=0·318309$; daher findet man das eigentlich verlangte Kreisverhältniss $\pi=c:d$ $=3·14160$. Der richtige Werth ist $\pi=3·14159265$, daher der gefundene erst in der 6ten Ziffer um 1 zu gross.

Nachtrag.

10. Eben als ich das Manuscript zur Absendung bereit lege, fällt mir noch der Gedanke bei, dass sich selbst der Methode Schwab's der Vortheil verschaffen lässt, nicht erst die entferntere Hilfsgrösse, den Halbmesser des Kreises, von voraus festgesetztem Umfange, sondern die dem gesuchten π nächste Hilfsgrösse, $\frac{1}{\pi}$, sogleich zu berechnen, indem man gleich im Anfang

der Rechnung von den Halbmessern der regelmässigen Vielecke auf die Verhältnisse ihrer Durchmesser zu ihrem sich gleich bleibenden Umfange übergeht.

11. Hiebei nehme ich zugleich Gelegenheit, obige Beziehungsgleichungen zwischen den Vieleckshalbmessern nach einem Verfahren abzuleiten, das noch einfacher und überschaulicher als das von Schwab a. a. O. gewiesene ist, und welches, wie mir mein verehrter Freund, Herr Professor und Regierungsrath von Ettingshausen, im Juli 1838 erzählte, sein damaliger Adjunct, nunmehriger Professor der Physik zu Innsbruck, Herr Baumgarten, in einem alten Buche gefunden habe.

12. Sei (in Taf. III. Fig. 2.) AB die Seite eines regelmässigen, einem Kreise eingeschriebenen Vielecks. Führt man auf sie senkrecht den Halbmesser OC, so halbirt dieser den Winkel AOB, und die Sehnen CA, CB werden einander gleich. Verbindet man die Mitten A' und B' derselben durch die Gerade $A'B'$; so ist sie die Seite, OD' der kleinere und OA' der grössere Halbmesser eines regelmässigen Vieleckes, welches doppelt so viel Seiten, aber doch denselben Umfang wie das gegebene hat.

Denn so wie OC den Winkel AOB halbirt, eben so halbiren die zu den Mitten A' und B' der gleichen Sehnen CA und CB gehenden Radienvectoren OA' und OB' wieder seine Hälften COA und COB; folglich ist

$$COA' = A'OA = COB' = B'OB = \tfrac{1}{4} AOB$$

und

$$A'OB' = COA' + COB' = \tfrac{1}{2} AOB.$$

Ferner liegen die gleichen Sehnen CA, CB, also auch ihre Mitten A', B', vom Mittelpunkte gleich weit ab, nemlich es ist $OA' = OB'$, daher das Dreieck $A'OB'$ gleichschenklig, und des Winkels $A'OB'$ Halbirungslinie $OD' \perp A'B'$; folglich ist $A'OB'$ der Winkel am Mittelpunkte, $A'B'$ die Seite, OA' der grössere und OD' der kleinere Halbmesser eines regelmässigen Vielecks von doppelt so viel Seiten, als ihrer das gegebene besitzt.

Weil endlich im Dreieck ABC die $A'B' \parallel AB$, als zugleich senkrecht auf der OC, ist, dabei CA' und CB' die Hälften der Seiten CA und CB, also zu diesen proportional sind: muss $A'B'$ gleichfalls die Hälfte derselben AB sein. Das entstehende regelmässige Vieleck hat daher doppelt so viel, aber halb so kleine Seiten als das ursprüngliche, mithin einen eben so grossen Umfang wie dieses.

13. Sei nun $OA = OB = OC = R$ der grössere, $OD = r$ der kleinere Halbmesser im ursprünglichen regelmässigen Vieleck; daher im doppelt- so viel-seitigen der grössere Halbmesser $OA' = OB' = R'$ und der kleinere $OD' = r'$.

So wie $CA' = AA'$ muss wegen $A'D' \parallel AD$ auch $CD' = DD'$, also D' die Mitte von CD sein; dann ist OD' das arithmetische Mittel von OC und OD, nemlich

$$OD = \frac{OC + OD}{2},$$

oder

$$r' = \frac{R+r}{2}.$$

Die OA' ist, weil auf ihr die AC senkrecht steht, eine Projection der OC; und OD', weil auf ihr die $A'B'$ senkrecht steht, ihre Rückprojection; oder in dem bei A' rechtwinkligen Dreiecke $OA'C$ ist $A'D' \perp OC$; daher ist OA' die mittlere Proportionale zwischen OC und OD'; nemlich

$$OC : OA' = OA' : OD',$$

oder

$$R : R' = R' : r'.$$

Mithin ist

$$R' = \sqrt{Rr'} \text{ *)}.$$

14. Bezeichnen wir jetzt bei diesen zwei regelmässigen Vielecken ihre kleineren Durchmesser mit d, d' und ihre grösseren mit D, D', so dass diese Durchmesser die Doppelten der gleichnamigen Halbmesser r, r', R, R' vorstellen; so bestehen zwischen den Durchmessern ähnliche Gleichungen wie zwischen den gleichnamigen Halbmessern, nemlich:

$$d' = \frac{D+d}{2},\ D' = \sqrt{Dd'}.$$

Stellen wir endlich noch durch p den in beiden Vielecken gleichen Umfang vor, so gelten offenbar auch noch ähnliche Gleichungen für die Verhältnisse der vier verbundenen Durchmesser zu diesem sich gleich bleibenden Umfange, nämlich

$$\frac{d'}{p} = \left(\frac{d}{p} + \frac{D}{p}\right) : 2,\ \frac{D'}{p} = \sqrt{\frac{D}{p} \cdot \frac{d'}{p}}.$$

Folglich ist

erstlich $\frac{d'}{p}$ das arithmetische Mittel von $\frac{d}{p}$ und $\frac{D}{p}$,

dann $\frac{D'}{p}$ das geometrische Mittel von $\frac{D}{p}$ und $\frac{d'}{p}$.

15. Geht man nun auch hier vom regelmässigen Sechsecke aus, so ist seine Seite $AB = R$, daher sein Umfang $p = 6R$, und das Verhältniss $\frac{D}{p} = \frac{2R}{6R} = \frac{1}{3}$. Zugleich macht die halbe Seite $\frac{R}{2}$ mit den beiden Halbmessern r und R ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse R ist; folglich hat man

*) Zur Ableitung dieser Sätze in 12. und 13. würde auch schon die auf einer Seite der OC liegende Halbscheid der Figur ausreichen.

$$r^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2=R^2 \text{ und daraus } r=\frac{R}{2}\sqrt{3}.$$

Mithin ist das Verhältniss

$$\frac{d}{p}=\frac{2r}{6R}=\frac{R\sqrt{3}}{6R}=\frac{1}{6}\sqrt{3}.$$

Man läuft daher von denselben zwei Zahlen $\frac{1}{6}\sqrt{3}=\frac{d}{p}$ und $\frac{1}{3}=\frac{D}{p}$ aus und rechnet in gleicher Weise; folglich erhält man auch dieselbe Zahlenreihe wie in obigem Täfelchen in Art. 9., nur wird das Verhältniss $\frac{d}{p}$ durch $\frac{D}{p}$ ersetzt. Demnach findet man auch wieder als Grenzverhältniss $\frac{d}{c}=\frac{1}{\pi}$.

15. Schlussbemerkung. Diese letztere Rechnungsweise des Kreisverhältnisses lässt sich also nicht blos am einfachsten durchführen, sondern auch am leichtesten rein geometrisch ableiten und sobin dürfte sie wohl die vorzüglichste sein.

IX.

Ueber den Satz von dem Inhalte der Obelisken.

Von
dem Herausgeber.

1.

Herr Oberlehrer K. Koppe an dem Gymnasium zu Soest hat sich bekanntlich durch die sehr zweckmässige Einführung einer neuen Art von Körpern unter dem Namen Obelisken in die Elemente der Stereometrie verdient gemacht, und deren Inhaltsbestimmung auf einen bemerkenswerthen Satz zurückgeführt. Für diesen Satz hat Herr Koppe selbst in einem besondern, unter dem Titel: Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie. Von Karl Koppe. Essen. 1843. erschienenen Schriftchen und in

seinen Anfangsgründen der reinen Mathematik. Zweiter Theil. Zweite Auflage. Essen. 1846, ferner Herr Professor Steiner in Crelle's Journal. Band 23. Heft 3., und Herr Professor Bretschneider in seinem Lehrgebäude der niedern Geometrie. Jena. 1844. elementare Beweise gegeben. Ich glaube aber, dass diese Beweise, wenn auch nicht in ihrem Wesen, doch in der Form noch einer Vereinfachung fähig sind, da der Satz wirklich an sich so einfach ist, dass er sich eigentlich, bei nur einiger aufmerksamen Betrachtung, auf der Stelle ganz von selbst darbietet, und will daher in diesem Aufsatze die Art und Weise, wie ich den Beweis darstellen würde, in der Kürze mittheilen.

II.

Ein Obelisk ist ein Körper, welcher von zwei parallelen Vielecken von gleich vielen Seiten als Grundflächen und eben so vielen Trapezen, als die Grundflächen Seiten haben, als Seitenflächen eingeschlossen wird.

Die Anzahl der Seiten der beiden Grundflächen bestimmt zugleich auch die Anzahl der Seiten des Obelisken.

Die Entfernung der beiden parallelen Grundflächen von einander wird die Höhe des Obelisken genannt.

Die Figur, welche entsteht, wenn ein Obelisk von einer seinen Grundflächen parallelen Ebene in gleichen Abständen von den beiden Grundflächen geschnitten wird, heisst seine mittlere Durchschnittsfigur.

Wenn man durch einen beliebigen Punkt in der Ebene der einen der beiden Grundflächen Parallelen zu den Seitenkanten eines Obelisken zieht, so heisst das Vieleck, dessen Ecken die Durchschnittspunkte dieser Parallelen mit der mittlern Durchschnittsfigur sind, die Ergänzungsfigur des Obelisken *).

Sehr leicht lässt sich beweisen und bedarf daher hier keiner besondern Erläuterung, dass die beiden Grundflächen eines Obelisken und dessen mittlere Durchschnittsfigur jederzeit gleiche Winkel haben und dass jeder dreiseitige Obelisk eine abgekürzte dreiseitige Pyramide ist, d. h. dass die Seitenkanten eines dreiseitigen Obelisken, gehörig verlängert, jederzeit in einem und demselben Punkte zusammenstossen. Eben so leicht erhellet, dass die mittlere Durchschnittsfigur und die Ergänzungsfigur immer gleiche Winkel haben. Endlich fällt auch auf der Stelle in die Augen, dass die Seiten der mittleren Durchschnittsfigur die halben Summen, die Seiten der Ergänzungsfigur die halben Differenzen der ihnen parallelen Seiten der Grundflächen des Obelisken sind.

*) Dies weicht von der Koppe'schen Erklärung der Ergänzungsfigur, nach welcher man die Parallelen mit den Seitenkanten durch einen beliebigen Punkt in der Ebene der mittlern Durchschnittsfigur ziehen soll, ab, kommt aber offenbar im Wesentlichen auf dasselbe hinaus und erleichtert, wie es mir scheint, die Darstellung des Beweises.

III.

Wenn man in Taf. III. Fig. 3. durch eine Ecke A eines dreiseitigen Obelisken $ABCA'B'C'$ eine der dieser Ecke gegenüberstehenden Seitenfläche $BCB'C'$ parallele Ebene $AD'E'$ legt, so entsteht ein Körper $ABCB'D'E'C'$, welcher von dem Dreieck ABC und Viereck $B'D'E'C'$ als parallelen Grundflächen, und dem Trapez $BCB'C'$, den beiden Parallelogrammen $ABB'D'$ und $ACC'E'$ und dem Dreieck $AD'E'$ als Seitenflächen eingeschlossen wird.

Jeder Körper $ABCDEFG$ (Taf. III. Fig. 4.) dieser Art ist einem Prisma gleich, welches die mittlere Durchschnittsfigur $D'E'F'G'$ des Körpers zur Grundfläche und die Entfernung seiner parallelen Grundflächen von einander, d. h. seine Höhe, zur Höhe hat.

Die Richtigkeit hiervon erhellet auf der Stelle, wenn man durch die Linie $D'E'$ eine den parallelen Linien AF, CG parallele Ebene legt, welche die nöthigenfalls gehörig erweiterten Grundflächen ABC und $DEFG$ in den Linien HJ und KL, die ebenfalls, wenn es nöthig ist, gehörig erweiterten parallelen Seitenflächen $BCDG$ und AEF in den Linien HK und JL schneidet. Dadurch erhält man die beiden dreiseitigen Prismen $ABHJD'E'$ und $DEKLD'E'$, von denen auf der Stelle erhellet, dass sie zur Deckung gebracht werden können, wobei man sich am besten etwa das obere Prisma um die Linie $D'E'$ gedreht und in das untere Prisma gelegt denkt. Hieraus ergiebt sich aber ferner auf der Stelle durch die einfachsten Schlüsse die zu beweisende Gleichheit des Körpers $ABCDEFG$ und des Prisma $ACHJFGKL$, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

IV.

Wenn nun $ABCDEA'B'C'D'E'$ (Taf. III. Fig. 5.) ein Obelisk von beliebiger Seitenzahl ist, so lege man durch eine beliebige Ecke A die den Seitenkanten BB', CC', DD', EE' parallelen Linien AB'', AC'', AD'', AE'', und ziehe die Linien $B''C''$, $C''D''$, $D''E''$, wodurch man die Pyramide $AA'B''C''D''E''$ erhält. Zieht man nun noch die Linien AC, AD und $C'C''$, $D'D''$, so sind $ABCB'C'B''C''$, $ACDC'D'C''D''$, $ADED'E'D''E''$ offenbar Körper von der Beschaffenheit der in III. betrachteten Körper. Ueberlegt man daher jetzt nur, dass der Obelisk, dessen mittlere Durchschnittsfigur, Ergänzungsfigur, Höhe und Inhalt wir respective durch M, E, H, O bezeichnen wollen, die Summe der Pyramide $AA'B''C''D''E''$ und der drei vorher genannten Körper, so wie ferner, dass nach einem allgemein bekannten stereometrischen Satze der Inhalt der Grundfläche der Pyramide offenbar $4E$, dass endlich die Summe der mittlern Durchschnittsfiguren der drei die Pyramide zum Obelisken ergänzenden Körper augenscheinlich $M-E$ ist; so erhellet nach dem bekannten Satze von dem Inhalte der Pyramide und aus III. auf der Stelle die Richtigkeit der Gleichung

$$O=\frac{1}{3}.4E.H+(M-E)H,$$

d. i.

$$O=(M-E+\frac{4}{3}E)H,$$

folglich

$$O=(M+\frac{1}{3}E)H,$$

woraus sich unmittelbar der folgende Satz ergiebt:

Jeder Obelisk ist der Summe eines Prisma und einer Pyramide gleich, welche respective die mittlere Durchschnittsfigur und die Ergänzungsfigur des Obelisken zu Grundflächen und die Höhe des Obelisken zur gemeinschaftlichen Höhe haben.

Stellt man den Beweis dieses von Koppe gefundenen Satzes auf die obige Weise dar, so bedarf man des sogenannten Schlusses von n auf $n+1$ gar nicht, der Beweis gewinnt, wie es mir scheint, überhaupt in mehrfacher Beziehung an Einfachheit, und legt auch die grosse Einfachheit des Satzes an sich deutlich vor Augen. Was bei der obigen Darstellung der Kürze wegen etwa noch unerörtert geblieben ist, wird Jeder leicht selbst hinzufügen können. Ueber die Anwendung des Satzes zur Berechnung verschiedener Arten von Körpern findet man vielfache Belehrung in dem oben angeführten besondern Schriftchen von Koppe, auf welches daher zu verweisen für deutsche Leser völlig genügt. Weil jedoch das Archiv sich auch einer grossen Anzahl von Lesern ausserhalb Deutschlands, ich darf wohl sagen fast in ganz Europa, selbst auch jenseits des Oceans, in Amerika, erfreuet, so mag, um den Satz, wie er ungeachtet seiner grossen Einfachheit allerdings verdient, in einem möglichst grossen Kreise bekannt zu machen, hier in der Kürze noch Folgendes dem Obigen hinzugefügt werden.

V.

Eine abgekürzte Pyramide ist offenbar ein Obelisk mit einander ähnlichen Grundflächen. Bezeichnen wir daher die eine Grundfläche einer abgekürzten Pyramide durch F und das Verhältniss einer beliebigen Seite derselben zu der gleichliegenden Seite der andern Grundfläche durch $m:n$, so ist nach II. $m:\frac{1}{2}(m+n)$ das Verhältniss der gleichliegenden Seiten der Grundfläche F und der mittlern Durchschnittsfigur M, und $m:\pm\frac{1}{2}(m-n)$ das Verhältniss der gleichliegenden Seiten der Grundfläche F und der Ergänzungsfigur E. Daher ist nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Aehnlichkeit

$$F:M=m^2:\frac{1}{4}(m+n)^2;$$

$$F:E=m^2:\frac{1}{4}(m-n)^2;$$

folglich

$$M=\left(\frac{m+n}{2m}\right)^2 F,\quad E=\left(\frac{m-n}{2m}\right)^2 F;$$

also nach IV.

$$O=\left\{\left(\frac{m+n}{2m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2m}\right)^2\right\} HF$$

oder

$$O=\frac{1}{4}\left\{\left(1+\frac{n}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{n}{m}\right)^2\right\} HF.$$

Entwickelt man die Quadrate, so ergiebt sich

$$O=\frac{1}{3}\left(1+\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}\right)HF.$$

Bezeichnet man aber den Inhalt der andern Grundfläche der abgekürzten Pyramide durch F', so ist

$$F:F'=m^2:n^2,$$

also

$$\frac{n}{m}=\sqrt{\frac{F'}{F}},\quad \frac{n^2}{m^2}=\frac{F'}{F};$$

folglich

$$O=\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{\frac{F'}{F}}+\frac{F'}{F}\right)HF$$

oder

$$O=\frac{1}{3}H(F+\sqrt{FF'}+F'),$$

welches die aus den Elementen der Stereometrie bekannte Formel zur Berechnung des Inhalts der abgekürzten Pyramide ist.

Ein Ponton ist ein Obelisk, dessen beide Grundflächen Rechtecke sind. Bezeichnen wir nun die parallelen Seiten dieser Rechtecke durch a, a' und b, b'; so ist nach II. offenbar

$$M=\frac{1}{2}(a+a')\cdot\frac{1}{2}(b+b')=\frac{1}{4}(a+a')(b+b'),$$

$$E=\frac{1}{2}(a-a')\cdot\frac{1}{2}(b-b')=\frac{1}{4}(a-a')(b-b');$$

folglich, wenn h die Höhe des Pontons ist:

$$O=\frac{1}{4}h\left\{(a+a')(b+b')+\frac{1}{3}(a-a')(b-b')\right\},$$

oder, wie hieraus durch leichte Rechnung folgt:

$$O=\frac{1}{6}h\{a(2b+b')+a'(b+2b')\},$$

oder auch

$$O=\frac{1}{6}h\{b(2a+a')+b'(a+2a')\};$$

welches die gewöhnlichen Formeln zur Berechnung der Pontons sind.

Auch aus diesen wenigen Beispielen sieht man schon, dass Herrn Koppe's Satz zu vielen bemerkenswerthen Resultaten auf sehr einfache Weise führt, und jedenfalls sehr verdient, in den stereometrischen Elementarunterricht immer allgemeiner aufgenommen zu werden.

X.

Ueber die Entstehung der Obelisken und eine geometrische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

In der euclidischen Geometrie hat es von jeher als Regel einer guten Methode gegolten, und wird auch immer dafür gelten müssen, dass jederzeit erst die Realität eines geometrischen Objects nachgewiesen werden müsse, bevor man es überhaupt unternehmen dürfe, weitere Untersuchungen über dasselbe anzustellen, woraus sich auch überall die öfters scheinbar willkührliche Aneinanderreihung der geometrischen Sätze in dem euclidischen Systeme auf das Genügendste erklären lässt, so dass sich, wenn man nur diesen Gesichtspunkt stets festhält, dieses System, was man auch in neuerer Zeit hin und wieder dagegen gesagt, und wenn man auch öfters mit einer gewissen Geringschätzung von einer Veraltung desselben gesprochen haben mag, in allen seinen Theilen auf das Vollkommenste und Schönste abrundet. Auch wüsste ich, selbst auf die Gefahr hin, mit einer gewissen Hartnäckigkeit am

Althergebrachten festzuhalten beschuldigt zu werden, in der That kein neueres System, welches sich in Bezug auf wahre geometrische Strenge und Evidenz der Darstellung der eigentlichen geometrischen Grundelemente — denn nur von diesen, keineswegs von den grossen und schönen Erweiterungen, mit denen in neuester Zeit die Geometrie durch Auffassung allgemeinerer Gesichtspunkte so sehr bereichert worden ist, deren hohe Wichtigkeit Niemand mehr als ich anzuerkennen bereit sein kann, ist und kann hier die Rede sein — dem euclidischen Systeme an die Seite stellen liesse, weshalb ich denn auch dieses System namentlich für den strengen geometrischen Schulunterricht — ohne daneben auf die Einführung neuerer Entdeckungen in denselben zu verzichten — durchaus für das geeignetste halte, und es fortwährend als erste und eigentliche Grundlage jedes strengeren mathematischen Studiums betrachte, wobei ich auch nicht umhin kann, zu bemerken, dass sich nach meiner Ansicht die Art und Weise, auf welche manche neuere Bearbeiter der Elemente gewisse bekannte Knoten, deren Lösung Euclides uns hinterlassen hat, etwas cavalièrement zu durchhauen suchen, keinesweges billigen lässt, wie auch in dieser Zeitschrift schon hin und wieder hervorgehoben worden ist.

Die Einführung der besonderen Art von Körpern, welche man Obelisken genannt hat, in die Elemente der Stereometrie, ist jedenfalls sehr verdienstlich und verdient alle Anerkennung. Man hat die Inhaltsbestimmung dieser Körper auf einen sehr einfachen Satz zurückgeführt, welcher eine Quelle vieler anderen Inhaltsbestimmungen geometrischer Körper ist, und ich selbst habe in dem vorhergehenden, absichtlich von dem vorliegenden getrennten Aufsatze eine für den Elementarunterricht so wünschenswerthe, möglichst einfache Begründung dieses Satzes zu geben versucht. Aber noch Niemand hat, so viel mir bekannt geworden ist, den strengen Nachweis der Möglichkeit oder Realität der Obelisken zu führen gesucht, was sich nach meinen oben dargelegten Ansichten über die geometrische Methode nicht rechtfertigen lässt. Nach der Erklärung der Obelisken hat man, ohne um deren Realität sich weiter zu bekümmern, sogleich einige Eigenschaften derselben bewiesen, und hat dann, wahrscheinlich um recht bald etwas in der Praxis Anwendbares zu gewinnen, mit einer gewissen Eile den körperlichen Inhalt dieser besonderen Art von Körpern zu bestimmen gesucht. Die Nachweisung der Realität der Obelisken dürfte aber um so nöthiger sein und ein besonderes Interesse gewähren, weil man, wie sich nachher zeigen wird, wenn man dieselbe zu geben versucht, zuletzt auf ganz natürlichem Wege zu einem Probleme geführt wird, welches sich, so viel ich weiss, bis jetzt in den stereometrischen Elementen noch nicht findet, und nach meiner Ansicht durchaus aufgelöst werden muss, bevor man überhaupt zur weiteren Betrachtung der Obelisken übergehen darf. Es ist hier eine Lücke im geometrischen Systeme vorhanden, welche man sich hätte auszufüllen bemühen sollen. Wir werden bald sehen, welches dieses Problem ist. Eine Auflösung bloss mit Hülfe der synthetischen Geometrie, welche allerdings, um jene Lücke genügend auszufüllen, erforderlich sein würde und vielleicht ziemlich einfach sein kann, zu geben, ist in diesem Aufsatze nicht meine Absicht. Es genügt mir vielmehr für jetzt, auf das Problem aufmerksam zu machen und die syn-

thetische Auflösung den Lesern zu überlassen; dagegen werde ich aber, um eine genauere Einsicht in die Natur desselben zu vermitteln, im Folgenden eine analytische Auflösung geben, welche mir, sowie die Aufgabe selbst, nicht ganz uninteressant zu sein scheint.

Wir wollen uns also jetzt zuerst mit der Entstehung der Obelisken, deren Erklärung wir als bekannt voraussetzen, beschäftigen, indem wir vorläufig nur bemerken, dass man im Folgenden stets festzuhalten hat, dass in Folge der Definition alle einen Obelisken begränzende Flächen ohne Ausnahme Ebenen sein sollen. Hiernach kann man sich aber die Entstehung eines Obelisken auf folgende Art denken, wobei wir im Folgenden der Kürze wegen, wenn das Schneiden zweier geraden Linien gefordert wird, deren Parallelismus dabei nie ausschliessen werden.

Es sei eine beliebige ebene geradlinige Figur $A_1A_2A_3A_4...A_n$, welche wir im Folgenden der Kürze wegen durch F bezeichnen wollen, gegeben. Durch den Punkt A_1 lege man eine beliebige, nicht in die Ebene der Figur F fallende gerade Linie. Hierauf lege man durch den Punkt A_2 eine nicht in die Ebene der Figur F fallende gerade Linie, welche die vorhergehende durch den Punkt A_1 gelegte gerade Linie in einem gewissen Punkte schneidet, was offenbar jederzeit möglich ist. Ferner lege man durch den Punkt A_3 eine nicht in die Ebene der Figur F fallende gerade Linie, welche die vorhergehende, durch den Punkt A_2 gelegte gerade Linie in einem gewissen Punkte schneidet, was wieder offenbar jederzeit möglich ist. Auf diese Art weiter gehend wird man endlich zu dem Punkte A_n gelangen. Durch diesen Punkt werden wir wieder eine nicht in die Ebene der Figur F fallende gerade Linie legen, welche die vorhergehende, durch den Punkt A_{n-1} gelegte gerade Linie in einem gewissen Punkte schneidet, zu legen haben, was offenbar jederzeit möglich sein würde. Soll nun aber, wie es nach der Definition des Obelisken erforderlich ist, auch die letzte durch die Kante A_nA_1 gehende Seitenfläche desselben eine Ebene sein, so ist es augenscheinlich nöthig, dass die letzte durch den Punkt A_n gelegte, nicht in die Ebene der Figur F fallende gerade Linie nicht bloss die vorletzte, durch den Punkt A_{n-1} gelegte, sondern zugleich auch die erste, durch den Punkt A_1 gelegte gerade Linie schneidet, und wir werden also, indem wir den Nachweis der Realität der Obelisken zu führen suchen, offenbar zuletzt zu der Aufgabe: — wenn zwei gerade Linien im Raume und ein in keiner derselben liegender Punkt gegeben sind, durch diesen Punkt eine die beiden gegebenen geraden Linien schneidende gerade Linie zu legen — geführt. Die Auflösung dieser Aufgabe muss also im geometrischen Systeme nothwendig der Theorie der Obelisken vorangehen. Ist aber die Möglichkeit derselben nachgewiesen, so wird man ohne Weiteres mittelst einer der Figur F parallelen Ebene einen nach allen Seiten hin von Ebenen begränzten Körper von der Natur der Obelisken herstellen können, und also die Realität der letzteren, wie es die geometrische Strenge fordert, bewiesen haben.

Alles kommt also, wie man hieraus sieht, auf die Auflösung der oben namhaft gemachten Aufgabe an, welche wir nun, die Aufsuchung einer synthetischen Auflösung für jetzt den Lesern

überlassend, analytisch auflösen wollen, um eine etwas ge... Einsicht in ihre Natur zu vermitteln.

Aufgabe.

Es seien zwei gerade Linien im Raume und ein in keiner derselben liegender Punkt gegeben; man soll durch diesen Punkt eine die *beiden* gegebenen geraden Linien schneidende gerade Linie legen.

Auflösung.

Die Gleichungen der beiden gegebenen geraden Linien seien

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{\cos\alpha_1}=\dfrac{y-b_1}{\cos\beta_1}=\dfrac{z-c_1}{\cos\gamma_1}, \\ \dfrac{x-a_2}{\cos\alpha_2}=\dfrac{y-b_2}{\cos\beta_2}=\dfrac{z-c_2}{\cos\gamma_2}; \end{cases}$$

und a_3, b_3, c_3 seien die Coordinaten des gegebenen Punktes. Da die gesuchte gerade Linie durch den Punkt $(a_3 b_3 c_3)$ gehen soll, so sind ihre Gleichungen von der Form:

$$2)\quad \frac{x-a_3}{\cos\varphi}=\frac{y-b_3}{\cos\psi}=\frac{z-c_3}{\cos\chi}.$$

Weil nun diese gerade Linie sowohl die erste, als auch die zweite der beiden geraden Linien 1) schneiden soll; so haben wir, wenn die Coordinaten der respectiven Durchschnittspunkte durch x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 bezeichnet werden, die folgenden Gleichungen

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{x_1-a_1}{\cos\alpha_1}=\dfrac{y_1-b_1}{\cos\beta_1}=\dfrac{z_1-c_1}{\cos\gamma_1}, \\ \dfrac{x_1-a_3}{\cos\varphi}=\dfrac{y_1-b_3}{\cos\psi}=\dfrac{z_1-c_3}{\cos\chi} \end{cases}$$

und

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{x_2-a_2}{\cos\alpha_2}=\dfrac{y_2-b_2}{\cos\beta_2}=\dfrac{z_2-c_2}{\cos\gamma_2}, \\ \dfrac{x_2-a_3}{\cos\varphi}=\dfrac{y_2-b_3}{\cos\psi}=\dfrac{z_2-c_3}{\cos\chi}. \end{cases}$$

Nimmt man zu diesen acht Gleichungen endlich noch die be... kannte Gleichung

$$5)\quad \cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\chi^2=1,$$

so hat man neun Gleichungen, mittelst welcher die neun unbeka... ten Grössen $x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \varphi, \psi, \chi$ bestimmt wer... müssen.

Eliminirt man aus den vier Gleichungen 3) die drei Grö... x_1, y_1, z_1; so erhält man nach leichter Rechnung die Gleich...

$$6)\quad \left.\begin{aligned} &\{(b_1-b_3)\cos\gamma_1-(c_1-c_3)\cos\beta_1\}\cos\varphi\\ &+\{(c_1-c_3)\cos\alpha_1-(a_1-a_3)\cos\gamma_1\}\cos\psi\\ &+\{(a_1-a_3)\cos\beta_1-(b_1-b_3)\cos\alpha_1\}\cos\chi \end{aligned}\right\}=0;$$

und auf ganz ähnliche Art ergiebt sich durch Elimination von x_2, y_2, z_2 aus den vier Gleichungen 4) die Gleichung:

$$7)\quad \left.\begin{aligned} &\{(b_2-b_3)\cos\gamma_2-(c_2-c_3)\cos\beta_2\}\cos\varphi\\ &+\{(c_2-c_3)\cos\alpha_2-(a_2-a_3)\cos\gamma_2\}\cos\psi\\ &+\{(a_2-a_3)\cos\beta_2-(b_2-b_3)\cos\alpha_2\}\cos\chi \end{aligned}\right\}=0.$$

Diese beiden Gleichungen liefern in Verbindung mit der Gleichung 5) die zur Bestimmung der drei unbekannten Grössen φ, ψ, χ erforderliche Anzahl von Gleichungen.

Setzt man der Kürze wegen

$$8)\quad \begin{cases} A_1=(a_1-a_3)\cos\beta_1-(b_1-b_3)\cos\alpha_1,\\ A_2=(a_2-a_3)\cos\beta_2-(b_2-b_3)\cos\alpha_2;\\ B_1=(b_1-b_3)\cos\gamma_1-(c_1-c_3)\cos\beta_1,\\ B_2=(b_2-b_3)\cos\gamma_2-(c_2-c_3)\cos\beta_2;\\ C_1=(c_1-c_3)\cos\alpha_1-(a_1-a_3)\cos\gamma_1,\\ C_2=(c_2-c_3)\cos\alpha_2-(a_2-a_3)\cos\gamma_2; \end{cases}$$

so werden die beiden Gleichungen 6) und 7):

$$9)\quad \begin{cases} B_1\cos\varphi+C_1\cos\psi+A_1\cos\chi=0,\\ B_2\cos\varphi+C_2\cos\psi+A_2\cos\chi=0; \end{cases}$$

woraus sich

$$10)\quad \begin{cases} \cos\psi=\dfrac{A_1B_2-B_1A_2}{C_1A_2-A_1C_2}\cos\varphi,\\ \cos\chi=\dfrac{B_1C_2-C_1B_2}{C_1A_2-A_1C_2}\cos\varphi \end{cases}$$

ergiebt. Also ist nach 5):

$$\cos\varphi=\pm\frac{C_1A_2-A_1C_2}{\sqrt{(A_1B_2-B_1A_2)^2+(B_1C_2-C_1B_2)^2+(C_1A_2-A_1C_2)^2}},$$

raus sich, in Verbindung mit 10), die folgenden Formeln zur stimmung von φ, ψ, χ ergeben, in denen die obern und untern chen auf einander zu beziehen sind:

$$\cos\varphi=\pm\frac{C_1A_2-A_1C_2}{\sqrt{(A_1B_2-B_1A_2)^2+(B_1C_2-C_1B_2)^2+(C_1A_2-A_1C_2)^2}},$$

$$\cos\psi=\pm\frac{A_1B_2-B_1A_2}{\sqrt{(A_1B_2-B_1A_2)^2+(B_1C_2-C_1B_2)^2+(C_1A_2-A_1C_2)^2}},$$

$$\cos\chi=\pm\frac{B_1C_2-C_1B_2}{\sqrt{(A_1B_2-B_1A_2)^2+(B_1C_2-C_1B_2)^2+C_1A_2-A_1C_2)^2}}.$$

Hat man aber die Winkel φ, ψ, χ mittelst dieser Formeln gefunden, so erhält man die Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 leicht mittelst der Gleichungen 3) und 4), was wir hier nicht weiter entwickeln wollen.

Die Gleichungen der gesuchten durch den Punkt $(a_3 b_3 c_3)$ gehenden und die beiden gegebenen, durch die Gleichungen 1) charakterisirten Linien schneidenden geraden Linien sind nach 2) und 11):

$$12)\quad \frac{x-a_3}{C_1A_2-A_1C_2}=\frac{y-b_3}{A_1B_2-B_1A_2}=\frac{z-c_3}{B_1C_2-C_1B_2}.$$

Zu einer andern Auflösung gelangt man auf folgende Weise.

Die Gleichungen der beiden gegebenen geraden Linien seien

$$13)\quad \begin{cases} x=a_1z+b_1,\ y=\alpha_1z+\beta_1; \\ x=a_2z+b_2,\ y=\alpha_2z+\beta_2; \end{cases}$$

und f, g, h seien die Coordinaten des gegebenen Punktes. Also sind die Gleichungen der gesuchten geraden Linie von der Form

$$14)\quad x-f=A(z-h),\ y-g=\mathfrak{A}(z-h).$$

Sind nun x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Linie mit den beiden gegebenen geraden Linien, so haben wir zur Bestimmung der acht unbekannten Grössen x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; A, $\mathfrak{A}$ die folgenden acht Gleichungen:

$$15)\quad \begin{cases} x_1=a_1z_1+b_1,\ y_1=\alpha_1z_1+\beta_1; \\ x_2=a_2z_2+b_2,\ y_2=\alpha_2z_2+\beta_2; \\ x_1-f=A(z_1-h),\ y_1-g=\mathfrak{A}(z_1-h), \\ x_2-f=A(z_2-h),\ y_2-g=\mathfrak{A}(z_2-h). \end{cases}$$

Aus den vier letzten Gleichungen erhält man durch Elimination von A und $\mathfrak{A}$:

$$16)\quad \begin{cases} (x_1-f)(z_2-h)-(x_2-f)(z_1-h)=0, \\ (y_1-g)(z_2-h)-(y_2-g)(z_1-h)=0; \end{cases}$$

also vermöge der vier ersten Gleichungen:

$$17)\quad \begin{cases} (a_1z_1+b_1-f)(z_2-h)-(a_2z_2+b_2-f)(z_1-h)=0, \\ (\alpha_1z_1+\beta_1-g)(z_2-h)-(\alpha_2z_2+\beta_2-g)(z_1-h)=0; \end{cases}$$

oder

$$18)\quad \begin{cases} \{(a_1-a_2)z_1+(a_2h+b_1-f)\}z_2 \\ =(b_1-b_2)h+(a_1h+b_2-f)z_1, \\ \{(\alpha_1-\alpha_2)z_1+(\alpha_2h+\beta_1-g)\}z_2 \\ =\{(\beta_1-\beta_2)h+(\alpha_1h+\beta_2-g)z_1; \end{cases}$$

glich

$$19)\quad \{a_2h+b_1-f+(a_1-a_2)z_1\}\{(\beta_1-\beta_2)h+(\alpha_1h+\beta_2-g)z_1\}$$
$$=\{\alpha_2h+\beta_1-g+(\alpha_1-\alpha_2)z_1\}\{(b_1-b_2)h+(a_1h+b_2-f)z_1\},$$

also, wie man nach leichter Entwickelung findet:

$$20)\quad 0=\{(b_1-b_2)(\alpha_2h+\beta_1-g)-(\beta_1-\beta_2)(a_2h+b_1-f)\}h$$
$$+\left\{\begin{array}{l}(\alpha_1-\alpha_2)(b_1-b_2)h+(a_1h+b_2-f)(\alpha_2h+\beta_1-g)\\-(a_1-a_2)(\beta_1-\beta_2)h-(a_2h+b_1-f)(\alpha_1h+\beta_2-g)\end{array}\right\}z_1$$
$$+\{(\alpha_1-\alpha_2)(a_1h+b_2-f)-(a_1-a_2)(\alpha_1h+\beta_2-g)\}z_1^2.$$

Für $z_1=h$ wird, wie man leicht findet, die Gleichung 19), folglich auch die Gleichung 20), erfüllt, so dass also

$$0=\{(b_1-b_2)(\alpha_2h+\beta_1-g)-(\beta_1-\beta_2)(a_2h+b_1-f)\}h$$
$$+\left\{\begin{array}{l}(\alpha_1-\alpha_2)(b_1-b_2)h+(a_1h+b_2-f)(\alpha_2h+\beta_1-g)\\-(a_1-a_2(\beta_1-\beta_2)h-(a_2h+b_1-f)(\alpha_1h+\beta_2-g)\end{array}\right\}h$$
$$+\{(\alpha_1-\alpha_2)(a_1h+b_2-f)-(a_1-a_2)(\alpha_1h+\beta_2-g)\}h^2$$

ist. Subtrahirt man diese Gleichung von der Gleichung 20), so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$21)\left\{\begin{array}{l}M=\ (\alpha_1-\alpha_2)(b_1-b_2)h+(a_1h+b_2-f)(\alpha_2h+\beta_1-g)\\ \qquad-(a_1-a_2)(\beta_1-\beta_2)h-(a_2h+b_1-f)(\alpha_1h+\beta_2-g),\\ N=\ (\alpha_1-\alpha_2)(a_1h+b_2-f)-(a_1-a_2)(\alpha_1h+\beta_2-g)\end{array}\right.$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$22)\quad (z_1-h)\{M+N(z_1+h)\}=0,$$

so dass also entweder

$$z_1-h=0$$

oder

$$M+N(z_1+h)=0,$$

d. h. entweder

$$23)\quad z_1=h$$

oder

$$24)\quad z_1+h=-\frac{M}{N},\ z_1=-h-\frac{M}{N}$$

ist.

Wollten wir aber $z_1=h$ setzen, so würde aus der fünften und sechsten der Gleichungen 15) $x_1=f$, $y_1=g$ folgen, und wegen der ersten und zweiten dieser Gleichungen müsste also

$$f=a_1h+b_1,\ g=\alpha_1h+\beta_1$$

sein, d. h der gegebene Punkt (fgh) würde in der ersten der beiden gegebenen Linien liegen, was gegen die Voraussetzung streitet, da wir angenommen haben, dass der gegebene Punkt in keiner der beiden gegebenen Linien liegen soll.

Hiernach können wir also bloss

$$25)\quad z_1 = -h - \frac{M}{N}$$

setzen.

Bis hierher haben wir die Rechnung absichtlich ganz allgemein geführt. Um uns jedoch die fernere Rechnung zu erleichtern, wollen wir, was offenbar verstattet ist, jetzt den gegebenen Punkt als Anfang der Coordinaten annehmen, d. h. wir wollen im Vorhergehenden $f=g=h=0$ setzen.

Dies vorausgesetzt, ist im Vorhergehenden

$$26)\quad \left\{\begin{array}{l} M = b_2\beta_1 - b_1\beta_2, \\ N = b_2(\alpha_1 - \alpha_2) - \beta_2(a_1 - a_2); \end{array}\right.$$

folglich nach 25):

$$27)\quad z_1 = -\frac{b_1\beta_2 - b_2\beta_1}{(a_1 - a_2)\beta_2 - (\alpha_1 - \alpha_2)b_2}.$$

Nach der ersten der beiden Gleichungen 18) ist

$$z_2 = \frac{b_2 z_1}{b_1 + (a_1 - a_2) z_1},$$

also, wenn man den vorhergehenden Werth von z_1 einführt:

$$28)\quad z_2 = -\frac{b_1\beta_2 - b_2\beta_1}{(a_1 - a_2)\beta_1 - (\alpha_1 - \alpha_2) b_1}.$$

Führt man nun ferner die gefundenen Ausdrücke von z_1 und z_2 in die aus 15) bekannten Gleichungen

$$x_1 = a_1 z_1 + b_1,\; y_1 = \alpha_1 z_1 + \beta_1;$$
$$x_2 = a_2 z_2 + b_2,\; y_2 = \alpha_2 z_2 + \beta_2$$

ein, so erhält man für die Coordinaten der Durchschnittspunkte der gesuchten Linie mit den beiden gegebenen Linien überhaupt die folgenden Ausdrücke:

$$29)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{b_1(\alpha_2 b_2 - a_2\beta_2) - b_2(\alpha_1 b_1 - a_1\beta_1)}{(a_1 - a_2)\beta_2 - (\alpha_1 - \alpha_2) b_2}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{\beta_1(\alpha_2 b_2 - a_2\beta_2) - \beta_2(\alpha_1 b_1 - a_1\beta_1)}{(a_1 - a_2)\beta_2 - (\alpha_1 - \alpha_2) b_2}, \\[2ex] z_1 = -\dfrac{b_1\beta_2 - b_2\beta_1}{(a_1 - a_2)\beta_2 - (\alpha_1 - \alpha_2) b_2} \end{array}\right.$$

und

$$30)\begin{cases} x_2 = \dfrac{b_1(\alpha_2 b_2 - a_2\beta_2) - b_2(\alpha_1 b_1 - a_1\beta_1)}{(a_1 - a_2)\beta_1 - (\alpha_1 - \alpha_2) b_1}, \\ y_2 = \dfrac{\beta_1(\alpha_2 b_2 - a_2\beta_2) - \beta_2(\alpha_1 b_1 - a_1\beta_1)}{(a_1 - a_2)\beta_1 - (\alpha_1 - \alpha_2) b_1}, \\ z_2 = -\dfrac{b_1\beta_2 - b_2\beta_1}{(a_1 - a_2)\beta_1 - (\alpha_1 - \alpha_2) b_1}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der gesuchten Linie sind

$$31)\begin{cases} x = -\dfrac{b_1(\alpha_2 b_2 - a_2\beta_2) - b_2(\alpha_1 b_1 - a_1\beta_1)}{b_1\beta_2 - b_2\beta_1} z, \\ y = -\dfrac{\beta_1(\alpha_2 b_2 - a_2\beta_2) - \beta_2(\alpha_1 b_1 - a_1\beta_1)}{b_1\beta_2 - b_2\beta_1} z \end{cases}$$

oder

$$32)\begin{cases} \dfrac{x}{b_1(\alpha_2 b_2 - a_2\beta_2) - b_2(\alpha_1 b_1 - a_1\beta_1)} \\ = \dfrac{y}{\beta_1(\alpha_2 b_2 - a_2\beta_2) - \beta_2(\alpha_1 b_1 - a_1\beta_1)} \\ = -\dfrac{z}{b_1\beta_2 - b_2\beta_1}. \end{cases}$$

Ist der gegebene Punkt nicht der Anfang der Coordinaten, sondern überhaupt durch die Coordinaten f, g, h bestimmt, so braucht man sich durch denselben bloss ein dem primitiven Coordinatensysteme paralleles Coordinatensystem gelegt zu denken, und wird dann leicht finden, dass man, um die nöthigen Ausdrücke zur Bestimmung der Lage der gesuchten Linie zu erhalten, in den vorhergehenden Formeln bloss für

$$x, y, z$$

respective

$$x-f, y-g, z-h;$$

und für

$$b_1, \beta_1; \; b_2, \beta_2$$

respective

$$a_1 h + b_1 - f, \alpha_1 h + \beta_1 - g; \; a_2 h + b_2 - f, \alpha_2 h + \beta_2 - g$$

setzen, alles Uebrige aber ungeändert lassen muss, was wir weiter auszuführen dem Leser überlassen.

Schliesslich wiederholen wir, dass wir eine Auflösung der vorhergehenden Aufgabe bloss durch Construction, so dass dieselbe Platz in den Elementen der Stereometrie finden kann, für wünschenswerth halten.

XI.

Sur les dérivées d'une fonction de fonction.

Par

Monsieur Ubbo H. Meyer

de Groningue.

Divers procédés ont été proposés pour déterminer, en forme finie, les dérivées d'une fonction qui dépend d'une autre fonction. Ce problème, loin d'être généralement résolu, n'est abordé que pour des cas très spéciaux. Convaincu de l'imperfection de la théorie des dérivées, M. Oscar Schlömilch (Archiv. T. VII. p. 204.) a tenté de déterminer les dérivées des fonctions f_{x^λ} et f_{e^x}. Il a trouvé

$$\partial_x^n f_{x^\lambda} = \frac{1}{x^n} \left\{ \overset{n}{A}_1 x^\lambda f'_{x^\lambda} + \overset{n}{A}_2 x^{2\lambda} f''_{x^\lambda} + \dots + \overset{n}{A}_n x^{n\lambda} f^{(n)}_{x^\lambda} \right\},$$

dans laquelle

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1.2\dots n}{1.2\dots p} \left\{ (p\lambda)_n - (\overline{p-1}\lambda)_n p_1 + (\overline{p-2}\lambda)_n p_2 - \dots \pm \lambda_n p_{p-1} \right\};$$

et

$$\partial_x^n f_{e^x} = \overset{n}{A}_1 e^x f'_{e^x} + \overset{n}{A}_2 e^{2x} f''_{e^x} + \dots + \overset{n}{A}_n e^{nx} f^{(n)}_{e^x},$$

le coefficient $\overset{n}{A}_p$ étant donné dans cette formule par l'équation

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1.2\dots p} \left\{ p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - \dots \pm 1^n p_{p-1} \right\},$$

en observant que dans les deux formules $p_1, p_2, \dots$ désignent les coefficients binominaux de l'exposant p. L'auteur a démontré ces formules par induction, en indiquant qu'elles seront vérifiées pour les dérivées de l'ordre $n+1$, lorsqu'on les suppose exactes pour l'ordre n. Il a ajouté être parvenu à la détermination des coefficients

par une méthode qui lui est propre; et il est à regretter qu'il ne l'a pas communiquée, puisque la méthode est souvent plus instructive que le résultat n'est intéressant.

Depuis longtemps j'avais trouvé les mêmes formules, mais, occupé par d'autres recherches, je ne les avais pas rédigées. En lisant récemment l'article cité de M. Schlömilch, j'ai fixé de nouveau l'attention sur ce sujet, et, en attendant que l'auteur fasse connaître la méthode par laquelle il est parvenu à ses formules, j'exposerai le procédé qui m'a conduit à une formule générale qui embrasse les formules citées comme cas particuliers.

Puisqu'on a généralement

$$\partial^n_x \varphi_{x+h} = \partial^n_h \varphi_{x+h},$$

il faut que soit

$$\partial^n_x \varphi_x = \partial^n_\varepsilon \varphi_{x+\varepsilon},$$

lorsque ε désigne une variable qui s'évanouit après les différentiations. Si donc y représente une fonction de x, et qu'on pose

$$y = y_x,$$

on aura de même

$$\text{(1)} \qquad \partial^n_x f_y = \partial^n_\varepsilon f_{y_{x+\varepsilon}},$$

et lorsqu'on fait

$$\text{(2)} \qquad y_{x+\varepsilon} = y + \Theta_\varepsilon,$$

il s'ensuit

$$f_{y_{x+\varepsilon}} = f_{y+\Theta_\varepsilon},$$

ce qui change l'équation (1) en

$$\text{(3)} \qquad \partial^n_x f_y = \partial^n_\varepsilon f_{y+\Theta_\varepsilon}.$$

De plus, on tire de l'équation (2)

$$\text{(4)} \qquad \Theta_\varepsilon = y_{x+\varepsilon} - y,$$

ce qui montre, non seulement que Θ_ε dépend de x et ε, mais encore que Θ_ε s'évanouira avec ε, du moins si l'on excepte les valeurs particulières de x pour lesquelles il y a solution de continuité. On aura par suite

$$f_{y+\Theta_\varepsilon} = f_y + f'_y \Theta_\varepsilon + \frac{1}{1.2} f''_y \Theta_\varepsilon^2 + \frac{1}{1.2.3} f'''_y \Theta_\varepsilon^3 + \ldots,$$

et, en vertu de l'équation (3),

$$\partial_x^n f_y = \partial_\varepsilon^n \{ f_y + f'_y \Theta_\varepsilon + \frac{1}{1.2} f''_y \Theta_\varepsilon^2 + \frac{1}{1.2.3} f'''_y \Theta_\varepsilon^3 + \ldots \},$$

ou, puisque y est indépendant de ε,

$$(5)\quad \partial_x^n f_y = f'_y \partial_\varepsilon^n \Theta_\varepsilon + \frac{1}{1.2} f''_y \partial_\varepsilon^n \Theta_\varepsilon^2 + \frac{1}{1.2.3} f'''_y \partial_\varepsilon^n \Theta_\varepsilon^3 + \ldots.$$

On s'assurera aisément que la série dans le second membre de cette formule s'arrêtera au terme

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n} f_y^{(n)} \partial_\varepsilon^n \Theta_\varepsilon^n,$$

parceque, selon l'équation (4), le premier terme du développement de Θ_ε suivant les puissances entières et positives de ε étant proportionel à ε, le premier terme du développement de Θ_ε^m sera proportionel à ε^m, et qu'un terme de la forme $\partial_\varepsilon^m \varepsilon^m \varphi_\varepsilon$ s'évanouira avec ε, lorsque m est plus grand que n, et que φ_ε reste fonction continue pour $\varepsilon = 0$. La formule (5) peut donc être mise sous la forme

$$\partial_x^n f_y = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k!} f_y^{(k)} \partial_\varepsilon^n \Theta_\varepsilon^k,$$

dans laquelle on a posé, pour abréger,

$$(6)\qquad k! = 1.2.3\ldots k;$$

et, si l'on substitue à Θ_ε sa valeur tirée de l'équation (4), il viendra

$$(7)\qquad \partial_x^n f_y = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k!} f_y^{(k)} \partial_\varepsilon^n \{ y_{x+\varepsilon} - y \}^k.$$

Posons encore, pour abréger,

$$(8)\qquad \overset{m}{(k)} = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-m+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ m};$$

on aura, en développant le binome $(y_{x+\varepsilon} - y_x)^k$,

$$\partial_x^n f_y = \sum_{k=1}^{k=n+1} \left\{ \frac{1}{k!} f_y^{(k)} \sum_{m=0}^{m=k+1} (-1)^m \overset{m}{(k)} y^m \partial_\varepsilon^n y_{x+\varepsilon}^{k-m} \right\},$$

et, si l'on a égard à l'équation (1), et qu'on observe que $\partial_x^n y^0 = \partial_x^n 1 = 0$, il résultera enfin

$$(9)\qquad \partial_x^n f_y = \sum_{k=1}^{k=n+1} \sum_{m=0}^{m=k} \frac{(-1)^m}{k!} \overset{m}{(k)} y^m f_y^{(k)} \partial_x^n y^{k-m}.$$

Voici la formule générale annoncée qui subsistera pour toute fonction f_y de y et pour toute fonction y de x, en exceptant toujours les cas particuliers où l'on attribue à x une valeur telle que

continuité sera interrompue. En prenant successivement $y=x^\lambda$ $y=e^x$, elle fournira les formules de M. Schlömilch rapportées au commencement de cet article. Il faut observer toutefois que, quoique la formule (9) soit plus développée que la formule (7), celle-ci l'emporte par sa simplicité: c'est pour quoi nous allons nous en occuper encore un instant.

Faisons

$$y=y_x=e^x,$$

on aura

$$y_{x+\varepsilon}=e^{x+\varepsilon}=e^x e^\varepsilon,$$

d'où

$$y_{x+\varepsilon}-y=e^x(e^\varepsilon-1),$$

et la formule (7) donnera

$$(10)\qquad \partial_x^n f_{e^x}=\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{k!}e^{kx}f_{e^x}^{(k)}\partial_\varepsilon^n(e^\varepsilon-1)^k.$$

Or, ε étant égal à zéro,

$$\frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n(e^\varepsilon-1)^k$$

sera le coefficient de u^n dans le développement de

$$(e^u-1)^k$$

suivant les puissances entières et positives de u. Donc, si l'on désigne ce coefficient par $B_{k,n}$, on aura

$$(11)\qquad \partial_x^n f_{e^x}=\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{n!}{k!}B_{k,n}e^{kx}f_{e^x}^{(k)}.$$

Lorsqu'on voudra appliquer la formule (7) à la détermination de la dérivée $\partial_x^n f_{x^\mu}$, il sera plus commode de substituer d'abord $x\varepsilon$ à ε et par suite $\frac{1}{x}\partial_\varepsilon$ à ∂_ε, ce qui la changera en

$$(12)\qquad \partial_x^n f_y=\frac{1}{x^n}\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{k!}f_y^{(k)}\partial_\varepsilon^n\{y_{x(1+\varepsilon)}-y\}^k.$$

Maintenant si l'on fait

$$y=y_x=x^\mu,$$

on aura

$$y_{x(1+\varepsilon)}=x^\mu(1+\varepsilon)^\mu,$$

d'où

$$y_{x(1+\varepsilon)}-y=x^\mu\{(1+\varepsilon)^\mu-1\},$$

et l'on trouvera, à l'aide de la formule (12),

$$(13)\qquad \partial_x^n f_{x^\mu} = \frac{1}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k!} x^{k\mu} f_{x^\mu}^{(k)} \partial_\varepsilon^n \{(1+\varepsilon)^\mu - 1\}^k;$$

donc, si l'on pose

$$(14)\qquad \partial_x^n f_{x^\mu} = \frac{1}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{n!}{k!} A_{k,n}\, x^{k\mu} f_{x^\mu},$$

il suivra que $A_{k,n}$ sera le coefficient de u^n dans le développement de

$$\{(1+u)^\mu - 1\}^k$$

suivant les puissances entières et positives de u. Soit encore

$$y = y_x = lx,$$

on aura

$$y_{x(1+\varepsilon)} = lx(1+\varepsilon) = lx + l(1+\varepsilon),$$

d'où

$$y_{x(1+\varepsilon)} - y = l(1+\varepsilon).$$

Cette valeur de y substituée dans la formule (12), il viendra

$$\partial_x^n f_{lx} = \frac{1}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k!} f_{lx}^{(k)} \partial_\varepsilon^n \{l(1+\varepsilon)\}^k,$$

et, si l'on pose

$$\partial_x^n f_{lx} = \frac{1}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{n!}{k!} C_{k,n} f_{lx}^{(k)},$$

on sera assuré que $C_{k,n}$ représente le coefficient de u^n dans le développement de

$$\{l(1+u)\}^k$$

suivant les puissances entières et positives de u. On voit, par ce qui précède, en quoi consiste l'avantage que fournit la formule (7), puisqu'elle montre l'origine des coefficients A, B, C, de manière qu'on pourra maintenant étudier ces coefficients indépendamment des formules dans lesquelles ils se sont présentés.

Nous examinerons donc ces coefficients dans un article spécial.

Anmerkung des Herausgebers. In Theil VIII. Nr. XXXIII. und Nr. XLI. befinden sich noch zwei Abhandlungen des Herrn Professor Dr. Schlömilch über höhere Differenzialquotienten.

XII.

Sur le développement de la fonction

$$\left\{\frac{(1+u)^{\mu}-1}{\mu u}\right\}^{x}.$$

Par

Monsieur Ubbo H. Meyer

de Groningue.

Les applications du No. précédent nous ont conduit aux coefficients des puissances de u dans le développement des fonctions

$$\{(1+u)^{\mu}-1\}^{k},\ (e^{u}-1)^{k} \text{ et } \{l(1+u)\}^{k}.$$

La détermination de ces coefficients offre beaucoup de difficultés, et jusqu'ici on n'a pas trouvé d'expressions dont la simplicité soit comparable à celle des coefficients binomiaux. Afin de contribuer à la connaissance de ces coefficients, je vais en signaler quelques relations.

Le développement de la fonction

$$(1+u)^{\mu}-1$$

en série suivant les puissances entières et positives de u commence par μu, donc le développement de

$$\frac{(1+u)^{\mu}-1}{\mu u}$$

commencera par l'unité. Au lieu de la fonction

$$\{(1+u)^{\mu}-1\}^{x}$$

nous considérons donc plutôt la fonction

$$\left\{\frac{(1+u)^{\mu}-1}{\mu u}\right\}^{x},$$

dont le développement aura l'unité pour premier terme. De même nous nous occuperons des fonctions

$$\left\{\frac{e^u-1}{u}\right\}^\varkappa \text{ et } \left\{\frac{l(1+u)}{u}\right\}^\varkappa$$

au lieu des fonctions

$$\{e^u-1\}^\varkappa \text{ et } \{l(1+u)\}^\varkappa;$$

et nous posons

$$(1)\qquad \left\{\frac{(1+u)^\mu-1}{\mu u}\right\}^\varkappa = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathfrak{A}_{\varkappa,n,\mu} u^n,$$

$$(2)\qquad \left\{\frac{e^u-1}{u}\right\}^\varkappa = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathfrak{B}_{\varkappa,n} u^n,$$

$$(3)\qquad \left\{\frac{l(1+u)}{u}\right\}^\varkappa = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathfrak{C}_{\varkappa,n} u^n;$$

n étant un nombre entier et positif, tandisque $\varkappa$ et μ désignent des nombres quelconques. Il suit de là qu'entre les coefficients A, B, C de l'article précédent et entre les coefficients $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ il y a les relations

$$(4)\qquad A_{k,n} = \mu^k \mathfrak{A}_{k,n-k,\mu};\ B_{k,n} = \mathfrak{B}_{k,n-k};\ C_{k,n} = \mathfrak{C}_{k,n-k};$$

k étant un nombre entier et positif. On s'assurera de plus, par le théorème de Cauchy, que les équations (1) et (3) ne subsistent que pour un module de u inférieur à 1, et que l'équation (2) ne subsiste que pour un module de u inférieur à 2π.

Désignons maintenant par ε une variable qui s'évanouit après les différentiations, on aura, par le théorème de Maclaurin:

$$(5)\qquad \mathfrak{A}_{\varkappa,n,\mu} = \frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n \left\{\frac{(1+\varepsilon)^\mu-1}{\mu\varepsilon}\right\}^\varkappa,$$

$$(6)\qquad \mathfrak{B}_{\varkappa,n} = \frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n \left\{\frac{e^\varepsilon-1}{\varepsilon}\right\}^\varkappa,$$

$$(7)\qquad \mathfrak{C}_{\varkappa,n} = \frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n \left\{\frac{l(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\right\}^\varkappa;$$

équations qui suffisent pour déterminer $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ pour tout nombre entier et positif n, et auxquelles on pourra joindre

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_{\varkappa,0,\mu} = 1,\ \mathfrak{B}_{\varkappa,0} = 1,\ \mathfrak{C}_{\varkappa,0} = 1; \\ \mathfrak{A}_{\varkappa,-n,\mu} = 0,\ \mathfrak{B}_{\varkappa,-n} = 0,\ \mathfrak{C}_{\varkappa,-n} = 0. \end{cases}$$

En remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{\mu}$ et par suite ∂_ε par $\mu\partial_\varepsilon$, on tire de l'équation (5)

$$\frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n \left\{\frac{(1+\frac{\varepsilon}{\mu})^\mu-1}{\varepsilon}\right\}^\varkappa = \left(\frac{1}{\mu}\right)^n \mathfrak{A}_{\varkappa,n,\mu}.$$

Or, lorsqu'on fait $\mu=\infty$, ou $\frac{1}{\mu}=0$, la valeur de $(1+\frac{\varepsilon}{\mu})^\mu$ se changera en e^ε. Donc si la valeur de ι est égale à zéro, on aura

$$\frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n\left\{\frac{e^\varepsilon-1}{\varepsilon}\right\}^x=\iota^n\mathfrak{A}_{x,n,\frac{1}{\iota}};$$

ou, en vertu de l'équation (6),

$$\text{(9)}\qquad \mathfrak{B}_{x,n}=\iota^n\mathfrak{A}_{x,n,\frac{1}{\iota}}.$$

Si, au contraire, on pose $\mu=\iota=0$, il suit de l'équation (5)

$$\frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n\left\{\frac{l(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\right\}^x=\mathfrak{A}_{x,n,\iota};$$

ou, suivant l'équation (7),

$$\text{(10)}\qquad \mathfrak{C}_{x,n}=\mathfrak{A}_{x,n,\iota}.$$

On voit donc qu'il suffit de déterminer d'une manière générale le coefficient $\mathfrak{A}$, puisque les équations (9) et (10) fournissent le moyen de déduire $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{A}$.

Posons, pour abréger,

$$\text{(11)}\qquad f_\varepsilon=f_{\varepsilon,x}=\left\{\frac{(1+\varepsilon)^\mu-1}{\mu\varepsilon}\right\}^x;$$

on aura

$$\text{(12)}\qquad \partial_\varepsilon lf_\varepsilon=x\mu\frac{(1+\varepsilon)^{\mu-1}}{(1+\varepsilon)^\mu-1}-\frac{x}{\varepsilon},$$

d'où

$$\varepsilon(1+\varepsilon)\partial_\varepsilon f_\varepsilon=x\mu\varepsilon\frac{(1+\varepsilon)^\mu}{(1+\varepsilon)^\mu-1}f_\varepsilon-x(1+\varepsilon)f_\varepsilon,$$

et puisque

$$\frac{(1+\varepsilon)^\mu}{(1+\varepsilon)^\mu-1}=\frac{1}{(1+\varepsilon)^\mu-1}+1,$$

on tire de la précédente:

$$\text{(13)}\qquad \varepsilon(1+\varepsilon)\partial_\varepsilon f_\varepsilon=x\frac{\mu\varepsilon}{(1+\varepsilon)^\mu-1}f_\varepsilon+x(\overline{\mu-1}\,\varepsilon-1)f_\varepsilon,$$

ou, suivant l'équation (11),

$$\varepsilon(1+\varepsilon)\partial_\varepsilon f_{\varepsilon,x}=xf_{\varepsilon,x-1}+x(\overline{\mu-1}\,\varepsilon-1)f_{\varepsilon,x},$$

puis

$$\text{(14)}\qquad \partial_\varepsilon^n\{\varepsilon(1+\varepsilon)\partial_\varepsilon f_{\varepsilon,x}\}=x\partial_\varepsilon^n f_{\varepsilon,x-1}+x\partial_\varepsilon^n\{(\overline{\mu-1}\,\varepsilon-1)f_{\varepsilon,x}\}.$$

Pour développer les dérivées de cette équation, on peut se servir de la formule de Leibnitz

$$(15)\qquad \partial_x^n \varphi_x \psi_x = \sum_{m=0}^{m=n+1} \overset{m}{(n)} \partial_x^{n-m} \varphi_x \partial_x^m \psi_x,$$

n et m étant des nombres entiers et positifs, et $\overset{m}{(n)}$ donné par l'équation

$$(16)\qquad \overset{m}{(n)} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,m}.$$

En effet, si l'on suppose que φ_x reste fonction continue pour $x=0$, et qu'on fasse $\psi_x = x^p$, p étant un nombre entier et positif, la formule (15) se réduira à

$$(17)\qquad \partial_\varepsilon^n \varepsilon^p \varphi_\varepsilon = \overset{p}{(n)} p!\, \partial_\varepsilon^{n-p} \varphi_\varepsilon = \frac{n!}{(n-p)!} \partial_\varepsilon^{n-p} \varphi_\varepsilon.$$

En appliquant cette formule à l'équation (14), on obtiendra

$$n\partial_\varepsilon^n f_{\varepsilon,\varkappa} + n(n-1)\partial_\varepsilon^{n-1} f_{\varepsilon,\varkappa} = \varkappa \partial_\varepsilon^n f_{\varepsilon,\varkappa-1} + \varkappa(\mu-1)\, n \partial_\varepsilon^{n-1} f_{\varepsilon,\varkappa} - \varkappa \partial_\varepsilon^n f_{\varepsilon,\varkappa},$$

d'où l'on déduit, en ayant égard aux équations (5) et (11),

$$(18)\qquad (\varkappa+n)\mathfrak{A}_{\varkappa,n} = \varkappa \mathfrak{A}_{\varkappa-1,n} + (\overline{\mu-1}\,\varkappa - n + 1)\mathfrak{A}_{\varkappa,n-1}.$$

On pourra partir de cette équation aux différences partielles pour déterminer $\mathfrak{A}_{\varkappa,n}$, en y joignant les équations (8) et la condition que $\mathfrak{A}_{\varkappa,n}$ ne contienne point de termes périodiques par rapport à $\varkappa$.

Posons pour cela

$$(19)\qquad \mathfrak{A}_{\varkappa,n} = \frac{P_{\varkappa,n}}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)\dots(\varkappa+n)};$$

substituons cette valeur de $\mathfrak{A}$ dans l'équation (18), et faisons disparaître le facteur commun aux deux membres. On trouvera

$$P_{\varkappa,n} = P_{\varkappa-1,n} + (\overline{\mu-1}\,\varkappa - n + 1)P_{\varkappa,n-1},$$

d'où

$$\Delta_\varkappa P_{\varkappa-1,n} = (\overline{\mu-1}\,\varkappa - n + 1)P_{\varkappa,n-1};$$

et puisque $\mathfrak{A}_{0,n}=0$, si n n'est pas égal à zéro, on aura de même $P_{0,n}=0$ sous la même condition. Si donc k_1 représente une variable dont l'accroissement est égal à l'unité, on déduit de la précédente

$$P_{\varkappa-1,n} = \sum_{k_1=1}^{k_1=\varkappa} (\overline{\mu-1}\,k_1 - n + 1)P_{k_1,n-1}$$

ou

$$(20)\qquad P_{\varkappa,n} = \sum_{k_1=1}^{k_1=\varkappa+1} (\overline{\mu-1}\,k_1 - n + 1)P_{k_1,n-1},$$

ayant soin de réduire à zéro la fonction périodique par rapport à $\varkappa$ que l'intégration finie introduit, si $\varkappa$ n'est pas un nombre entier et positif.

En changeant k_1 en k_2, $\varkappa$ en k_1, et n en $n-1$, l'équation (20) se réduit à

$$P_{k_1,n-1} = \sum_{k_2=1}^{k_2=k_1+1} (\overline{\mu-1}\,k_2 - n + 2)P_{k_2,n-2},$$

et substituant cette valeur de $P_{k_1,n-1}$ dans l'équation (20), on obtiendra

$$P_{\varkappa,n}=\sum_{k_1=1}^{k_1=\varkappa+1}\sum_{k_2=1}^{k_2=k_1+1}(\overline{\mu-1}\,k_1-n+1)(\overline{\mu-1}\,k_2-n+2)\,P_{k_2,n-2}.$$

En continuant ainsi, et observant que

$$P_{\varkappa,0}=\mathfrak{A}_{\varkappa,0}=1,$$

il viendra

$$P_{\varkappa,n}=$$

$$\sum_{k_1=1}^{k_1=\varkappa+1}\sum_{k_2=1}^{k_2=k_1+1}\cdots\sum_{k_n=1}^{k_n=k_{n-1}+1}(\overline{\mu-1}\,k_1-n+1)(\overline{\mu-1}\,k_2-n+2)\ldots(\overline{\mu-1}\,k_n),$$

et, en vertu de l'équation (19), on aura enfin

$$(21)\quad \mathfrak{A}_{\varkappa,n}=$$

$$\sum_{k_1=1}^{k_1=\varkappa+1}\sum_{k_2=1}^{k_2=k_1+1}\cdots\sum_{k_n=1}^{k_n=k_{n-1}+1}\frac{\overline{\mu-1}\,k_1-n+1}{\varkappa+n}\cdot\frac{\overline{\mu-1}\,k_2-n+2}{\varkappa+n-1}\cdots\frac{\overline{\mu-1}\,k_n}{\varkappa+1},$$

$k_1, k_2, \ldots k_n$ désignant des variables dont l'accroissement est 1, et les intégrales étant prises de manière que les fonctions périodiques par rapport à $\varkappa$ s'évanouissent. Cette équation est peu commode pour l'évaluation du coefficient $\mathfrak{A}$, toutefois elle semble mériter quelque attention, parcequ'il n'est pas impossible de réduire l'intégration multiple à une integration simple. Ajoutons que les équations (9) et (10) fournissent le moyen d'obtenir immédiatement des relations analogues pour les coefficients $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$. L'équation (18) donnera

$$(22)\qquad (\varkappa+n)\mathfrak{B}_{\varkappa,n}=\varkappa\mathfrak{B}_{\varkappa-1,n}+\varkappa\mathfrak{B}_{\varkappa,n-1},$$

$$(23)\qquad (\varkappa+n)\mathfrak{C}_{\varkappa,n}=\varkappa\mathfrak{C}_{\varkappa-1,n}-(\varkappa+n-1)\mathfrak{C}_{\varkappa,n-1};$$

et l'équation (21) se réduira à

$$(24)\quad \mathfrak{B}_{\varkappa,n}=\sum_{k_1=1}^{k_1=\varkappa+1}\sum_{k_2=1}^{k_2=k_1+1}\cdots\sum_{k_n=1}^{k_n=k_{n-1}+1}\frac{k_1}{\varkappa+n}\cdot\frac{k_2}{\varkappa+n-1}\cdots\frac{k_n}{\varkappa+1},$$

$$(25)\quad \mathfrak{C}_{\varkappa,n}=$$

$$\sum_{k_1=1}^{k_1=\varkappa+1}\sum_{k_2=1}^{k_2=k_1+1}\cdots\sum_{k_n=1}^{k_n=k_{n-1}+1}(-1)^n\frac{k_1+n-1}{\varkappa+n}\cdot\frac{k_2+n-2}{\varkappa+n-1}\cdots\frac{k_n}{\varkappa+1}$$

L'équation (13) conduit encore à d'autres relations. On en tire d'abord

$$\varkappa f_\varepsilon=\frac{(1+\varepsilon)^\mu-1}{\mu\varepsilon}\{\varepsilon(1+\varepsilon)\partial_\varepsilon f_\varepsilon-\varkappa(\overline{\mu-1}\,\varepsilon-1)f_\varepsilon\},$$

puis

$$\frac{\varkappa}{n!}\partial_\varepsilon^n f_\varepsilon=\frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n\left\{\frac{(1+\varepsilon)^\mu-1}{\mu\varepsilon}\{\varepsilon(1+\varepsilon)\partial_\varepsilon f_\varepsilon-\varkappa(\overline{\mu-1}\,\varepsilon-1)f_\varepsilon\}\right\}.$$

En y appliquant la formule de Leibnitz (15), qu'on peut mettre aussi sous la forme

$$\frac{\partial_x^n \varphi x \psi x}{n!} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \frac{\partial_x^{n-m} \varphi x}{(n-m)!} \cdot \frac{\partial_x^m \psi x}{m!},$$

on trouvera

$$\frac{\varkappa}{n!}\partial_\varepsilon^n f_\varepsilon =$$

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} \frac{1}{(n-m)!}\partial_\varepsilon^{n-m}\frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\mu\varepsilon} \cdot \frac{1}{m!}\partial_\varepsilon^m \{\varepsilon(1+\varepsilon)\partial_\varepsilon f_\varepsilon - \varkappa(\overline{\mu-1}\,\varepsilon - 1) f_\varepsilon\}.$$

Or, on a

$$\frac{1}{(n-m)!}\partial_\varepsilon^{n-m}\frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\mu\varepsilon} = \frac{\overset{n-m+1}{(\mu)}}{\mu} = \frac{\overset{n-m}{(\mu-1)}}{n-m+1},$$

et, eu égard à la formule (17),

$$\frac{1}{m!}\partial_\varepsilon^m \{\varepsilon(1+\varepsilon)\partial_\varepsilon f_\varepsilon - \varkappa(\overline{\mu-1}\,\varepsilon - 1) f_\varepsilon\}$$

$$= \frac{m}{m!}\partial_\varepsilon^m f_\varepsilon + \frac{m-1}{(m-1)!}\partial_\varepsilon^{m-1} f_\varepsilon - \frac{\varkappa\overline{\mu-1}}{(m-1)!}\partial_\varepsilon^{m-1} f_\varepsilon + \frac{\varkappa}{m!}\partial_\varepsilon^m f_\varepsilon$$

$$= \frac{\varkappa+m}{m!}\partial_\varepsilon^m f_\varepsilon - \frac{\overline{\mu-1}\,\varkappa - m + 1}{(m-1)!}\partial_\varepsilon^{m-1} f_\varepsilon;$$

donc l'équation précédente se changera en

$$\frac{\varkappa}{n!}\partial_\varepsilon^n f_\varepsilon = \sum_{m=0}^{m=n+1} \frac{\overset{n-m}{(\mu-1)}}{n-m+1}\left\{\frac{\varkappa+m}{m!}\partial_\varepsilon^m f_\varepsilon - \frac{\overline{\mu-1}\,\varkappa - m + 1}{(m-1)!}\partial_\varepsilon^{m-1} f_\varepsilon\right\},$$

ou, en vertu des équations (5) et (11),

$$(26)\qquad \varkappa\mathfrak{A}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \frac{\overset{n-m}{(\mu-1)}}{n-m+1}\{(\varkappa+m)\mathfrak{A}_{\varkappa,m} - (\overline{\mu-1}\,\varkappa - m + 1)\mathfrak{A}_{\varkappa,m-1}\}.$$

Le second membre deviendra plus simple, si l'on observe qu'en général on a

$$\sum_{m=0}^{m=n+1}\{\varphi_m + \psi_{m-1}\} = \varphi_n + \psi_{-1} + \sum_{m=0}^{m=n}\{\varphi_m + \psi_m\},$$

et que par suite l'équation (26) peut être changée en

$$\varkappa\mathfrak{A}_{\varkappa,n} = (\varkappa+n)\mathfrak{A}_{\varkappa,n} - \frac{\overset{n}{(\mu-1)}}{n+1}(\overline{\mu-1}\,\varkappa + 1)\mathfrak{A}_{\varkappa,-1}$$

$$+ \sum_{m=0}^{m=n}\left\{\frac{\overset{n-m}{(\mu-1)}}{n-m+1}(\varkappa+m) - \frac{\overset{n-m-1}{(\mu-1)}}{n-m}(\overline{\mu-1}\,\varkappa - m)\right\}\mathfrak{A}_{\varkappa,m}.$$

Mais, suivant l'équation (8), on a

$$\mathfrak{A}_{\varkappa,-1} = 0,$$

et de l'équation (16) on deduit

$$\overset{n-m}{(\mu-1)}=\frac{\mu-n+m}{n-m}\overset{n-m-1}{(\mu-1)};$$

donc, après quelques réductions, l'équation précédente deviendra

$$(27)\quad n\mathfrak{A}_{\varkappa,n}=\sum_{m=0}^{m=n}\frac{(\overline{n-m}\,\varkappa-m)\,\mu-(\varkappa+m)}{(n-m)(n-m+1)}\overset{n-m-1}{(\mu-1)}\mathfrak{A}_{\varkappa,m}.$$

Remarquons encore qu'à l'aide de la relation (18) on déduit de l'équation (26)

$$(28)\qquad \mathfrak{A}_{\varkappa,n}=\sum_{m=0}^{m=n+1}\frac{\overset{n-m}{(\mu-1)}}{n-m+1}\mathfrak{A}_{\varkappa-1,m}.$$

On parvient à une relation semblable à l'équation (27), en opérant sur l'équation (12) présentée sous la forme

$$\partial_\varepsilon lf_\varepsilon=\frac{\varkappa\mu}{1+\varepsilon-(1+\varepsilon)^{1-\mu}}-\frac{\varkappa}{\varepsilon},$$

d'oú l'on tire

$$\varkappa\mu f_\varepsilon=\left\{1-\frac{(1+\varepsilon)^{1-\mu}-1}{\varepsilon}\right\}\left\{\varepsilon\partial_\varepsilon f_\varepsilon+\varkappa f_\varepsilon\right\}.$$

En prenant la dérivée de l'ordre n par rapport à ε des deux membres de cette équation, et se servant des formules (15) et (17), on obtiendra après quelques réductions

$$(29)\qquad n\mathfrak{A}_{\varkappa,n}=\sum_{m=0}^{m=n}(\varkappa+m)\frac{\overset{n-m+1}{(1-\mu)}}{\mu}\mathfrak{A}_{\varkappa,m},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(30)\quad n\mathfrak{A}_{\varkappa,n}=\sum_{m=0}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(\varkappa+m)\,(1-\mu)}{(n-m)(n-m+1)}\overset{n-m-1}{(\mu+n-m-1)}\mathfrak{A}_{\varkappa,m}.$$

Ajoutons encore que l'on trouvera des relations analogues pour les coefficients $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ à l'aide des équations (9) et (10). L'équation (27) conduira à

$$(31)\qquad n\mathfrak{B}_{\varkappa,n}=\sum_{m=0}^{m=n}\frac{\overline{n-m}\,\varkappa-m}{(n-m+1)!}\mathfrak{B}_{\varkappa,m},$$

$$(32)\qquad n\mathfrak{C}_{\varkappa,n}=\sum_{m=0}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{\varkappa+m}{(n-m)(n-m+1)}\mathfrak{C}_{\varkappa,m}.$$

L'équation (28) donnera

$$(33)\qquad \mathfrak{B}_{\varkappa,n}=\sum_{m=0}^{m=n+1}\frac{1}{(n-m+1)!}\mathfrak{B}_{\varkappa-1,m},$$

$$(34)\qquad \mathfrak{C}_{\varkappa,n}=\sum_{m=0}^{m=n+1}\frac{(-1)^{n-m}}{n-m+1}\mathfrak{C}_{\varkappa-1,m}.$$

Enfin l'équation (29) ou (30) fournira seulement

$$(35) \qquad n\mathfrak{B}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n} (-1)^{n-m+1} \frac{\varkappa+m}{(n-m+1)!} \mathfrak{B}_{\varkappa,m},$$

car pour $\mu=0$ elle coïncidera avec l'équation (27) et se réduira donc à la relation (32).

A ces relations peuvent se joindre celles qu'on obtient, en appliquant la formule de Leibnitz au second membre de l'équation

$$\partial_\varepsilon^n \left\{\frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\mu\varepsilon}\right\}^\varkappa = \partial_\varepsilon^n \left\{\left\{\frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\mu\varepsilon}\right\}^{\varkappa-\lambda} \left\{\frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\mu\varepsilon}\right\}^\lambda\right\}.$$

On arrivera à

$$(36) \qquad \mathfrak{A}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \mathfrak{A}_{\lambda,m} \mathfrak{A}_{\varkappa-\lambda,\, n-m},$$

puis, au moyen des équations (9) et (10),

$$(37) \qquad \mathfrak{B}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \mathfrak{B}_{\lambda,m} \mathfrak{B}_{\varkappa-\lambda,\, n-m},$$

$$(38) \qquad \mathfrak{C}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \mathfrak{C}_{\lambda,m} \mathfrak{C}_{\varkappa-\lambda,\, n-m}.$$

Dans toutes les formules rapportées ci-dessus la valeur de μ reste invariable; c'est pour quoi nous avons écrit partout simplement $\mathfrak{A}_{\varkappa,n}$ au lieu de $\mathfrak{A}_{\varkappa,n,\mu}$. Cherchons à présent des relations dans lesquelles il entre à-la-fois diverses valeurs de μ.

Soit y une fonction de x déterminée par l'équation

$$(39) \qquad y = y_x = (1+x)^\mu - 1;$$

il s'en suit

$$\frac{y}{\mu x} = \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu x}.$$

De plus on tire de l'équation (39)

$$x = (1+y)^{\frac{1}{\mu}} - 1,$$

d'où

$$\frac{\mu x}{y} = \frac{(1+y)^{\frac{1}{\mu}} - 1}{\frac{1}{\mu} y};$$

donc on aura

$$(40) \qquad \frac{y}{\mu x} = \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu x} = \left\{\frac{(1+y)^{\frac{1}{\mu}} - 1}{\frac{1}{\mu} y}\right\}^{-1},$$

puis

$$\partial_x^n \left\{\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu x}\right\}^\varkappa = \partial_x^n \left\{\frac{(1+y)^{\frac{1}{\mu}} - 1}{\frac{1}{\mu} y}\right\}^{-\varkappa}.$$

Rappelons-nous maintenant la formule (7) du No. précédent

(41) $$\partial_x^n f_y = \sum_{m=0}^{m=n+1} \frac{1}{m!} f_y^{(m)} \partial_\varepsilon^n \{y_{x+\varepsilon} - y\}^m,$$

et appliquons cette formule au second membre de l'équation précédente; nous obtiendrons, en égard à l'équation (39),

$$\partial_x^n \left\{\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu x}\right\}^x =$$

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} \frac{1}{m!} \partial_y^m \left\{\frac{(1+y)^{\frac{1}{\mu}} - 1}{\frac{1}{\mu} y}\right\}^{-x} \partial_\varepsilon^n \{(1+x+\varepsilon)^\mu - (1+x)^\mu\}^m.$$

En faisant $x=0$, et observant que y s'évanouit avec x, on déduit de la précédente jointe à l'équation (5):

$$\mathfrak{A}_{x,n,\mu} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \mathfrak{A}_{-k,m,\frac{1}{\mu}} \frac{\partial_\varepsilon^n}{n!} \{(1+\varepsilon)^\mu - 1\}^m.$$

Mais, à l'aide des équations (5) et (17), on trouvera

$$\frac{1}{n!} \partial_\varepsilon^n \{(1+\varepsilon)^\mu - 1\}^m = \frac{\mu^m}{n!} \partial_\varepsilon^n \varepsilon^m \left\{\frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\mu\varepsilon}\right\}^m$$

$$= \frac{\mu^m}{(n-m)!} \partial_\varepsilon^{n-m} \left\{\frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\mu\varepsilon}\right\}^m = \mu^m \mathfrak{A}_{m,n-m,\mu};$$

donc on aura

$$\mathfrak{A}_{x,n,\mu} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \mu^n \mathfrak{A}_{-x,m,\frac{1}{\mu}} \mathfrak{A}_{m,n-m,\mu},$$

ou, en écrivant $-x$ au lieu de x,

(42) $$\mathfrak{A}_{-x,n,\mu} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \mu^n \mathfrak{A}_{x,m,\frac{1}{\mu}} \mathfrak{A}_{m,n-m,\mu}.$$

De plus on en tire, en vertu des équations (9) et (10),

(43) $$\mathfrak{B}_{-x,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \mathfrak{C}_{x,m} \mathfrak{B}_{m,n-m},$$

(44) $$\mathfrak{C}_{-x,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \mathfrak{B}_{x,m} \mathfrak{C}_{m,n-m}.$$

Le théorème de Burmann conduit encore à une relation plus simple. En effet, en vertu de ce théorème, on a

$$\partial_x^n \varphi_y = \partial_y^{n-1} \left\{\left(\frac{y}{x}\right)^n \partial_y \varphi_y\right\},$$

en faisant $x=0$ après les différentiations, et supposant que y s'évanouit avec x, tandisque la rapport $\frac{y}{x}$ reste fini. Il s'en suit

$$\partial_x^n \left(\frac{y}{x}\right)^{\varkappa} = \partial_y^{n-1} \left\{ \left(\frac{y}{x}\right)^n \partial_y \left(\frac{y}{x}\right)^{\varkappa} \right\} = \frac{\varkappa}{\varkappa + n} \partial_y^n \left(\frac{y}{x}\right)^{\varkappa + n},$$

et

$$\partial_x^n \left(\frac{y}{\mu x}\right)^{\varkappa} = \mu^n \frac{\varkappa}{\varkappa + n} \partial_y^n \left(\frac{y}{\mu x}\right)^{\varkappa + n}.$$

Si donc y dépend de x par l'équation (39), d'où l'on a déduit l'équation (40), on obtiendra

$$\partial_x^n \left\{ \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu x} \right\}^{\varkappa} = \mu^n \frac{\varkappa}{\varkappa + n} \partial_y^n \left\{ \frac{(1+y)^{\frac{1}{\mu}} - 1}{\frac{1}{\mu} y} \right\}^{-\overline{\varkappa + n}};$$

et puisque les valeurs de x et y sont nulles après les différentiations, on aura, suivant l'équation (5),

$$(45) \qquad \mathfrak{A}_{\varkappa, n, \mu} = \mu^n \frac{\varkappa}{\varkappa + n} \mathfrak{A}_{-\overline{\varkappa + n}, n, \frac{1}{\mu}};$$

d'où encore, en ayant égard aux équations (9) et (10),

$$(46) \qquad \mathfrak{B}_{\varkappa, n} = \frac{\varkappa}{\varkappa + n} \mathfrak{C}_{-\overline{\varkappa + n}, n},$$

$$(47) \qquad \mathfrak{C}_{\varkappa, n} = \frac{\varkappa}{\varkappa + n} \mathfrak{B}_{-\overline{\varkappa + n}, n}.$$

Avant de terminer cet article, nous ferons connaître les formules par lesquelles les coefficients $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sont exprimés d'une manière indépendante.

Considérons d'abord le cas ou $\varkappa$ sera un nombre entier et positif, que nous désignerons par p. On aura

$$\mathfrak{A}_{p,n} = \frac{1}{n!} \partial_\varepsilon^n \left\{ \frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\mu \varepsilon} \right\}^p,$$

d'où, suivant la formule (17),

$$\mathfrak{A}_{p,n} = \frac{1}{\mu^p} \frac{1}{(p+n)!} \partial_\varepsilon^{p+n} \{ (1+\varepsilon)^\mu - 1 \}^p,$$

puis

$$\mathfrak{A}_{p,n} = \frac{(-1)^p}{\mu^p} \sum_{q=0}^{q=p+1} (-1)^q \overset{q}{(p)} \frac{1}{(p+n)!} \partial_\varepsilon^{p+n} (1+\varepsilon)^{q\mu},$$

ou

$$(48) \qquad \mathfrak{A}_{p,n} = \frac{(-1)^p}{\mu^p} \sum_{q=0}^{q=p+1} (-1)^q \overset{q}{(p)} \overset{p+n}{(q\mu)}.$$

Soit ensuite u une fonction de x déterminée par l'équation

$$(49) \qquad u = u_x = \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu x} - 1,$$

d'où

$$\partial_x^n \left\{\frac{(1+x)^\mu-1}{\mu x}\right\}^\varkappa = \partial_x^n (1+u)^\varkappa.$$

Appliquons l'équation (41) au second membre, et observons que

$$\frac{1}{m!}\partial_u^m (1+u)^\varkappa = \overset{m}{(\varkappa)}(1+u)^{\varkappa-m},$$

il viendra

$$\partial_x^n \left\{\frac{(1+x)^\mu-1}{\mu x}\right\}^\varkappa = \sum_{m=0}^{m=n+1} \overset{m}{(\varkappa)}(1+u)^{\varkappa-m}\,\partial_\varepsilon^n (u_{x+\varepsilon}-u)^m;$$

et, puisque $u=0$, lorsque $x=0$, on trouvera, en prenant $x=0$ et recourant à l'équation (5),

$$(50)\qquad \mathfrak{A}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \alpha_{m,n}\overset{m}{(\varkappa)},$$

dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$\alpha_{m,n} = \frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n u_\varepsilon^m,$$

ou, suivant l'équation (49),

$$\alpha_{m,n} = \frac{(-1)^m}{n!}\partial_\varepsilon^n \left\{1-\frac{(1+\varepsilon)^\mu-1}{\mu\varepsilon}\right\}^m;$$

de plus, m étant un nombre entier et positif, on tire de la précédente jointe à l'équation (5),

$$(51)\qquad \alpha_{m,n} = (-1)^m \sum_{p=0}^{p=m+1} (-1)^p \overset{p}{(m)}\mathfrak{A}_{p,n}.$$

Donc, lorsqu'on aura trouvé la valeur de $\mathfrak{A}_{p,n}$ par l'équation (48), on évaluera $\alpha_{m,n}$ par l'équation (51), et l'équation (50) donnera enfin la valeur de $\mathfrak{A}_{\varkappa,n}$, quel que soit $\varkappa$.

On trouvera pareillement, pour l'évaluation de $\mathfrak{B}$,

$$(52)\qquad \mathfrak{B}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \beta_{m,n}\overset{m}{(\varkappa)},$$

$$(53)\qquad \beta_{m,n} = (-1)^m \sum_{p=0}^{p=m+1} (-1)^p \overset{p}{(m)}\mathfrak{B}_{p,n},$$

$$(54)\qquad \mathfrak{B}_{p,n} = \frac{(-1)^p}{(p+n)!}\sum_{q=0}^{q=p+1} (-1)^q \overset{q}{(p)} q^{p+n}.$$

Quant au coefficient $\mathfrak{C}$, on aura encore

$$(55)\qquad \mathfrak{C}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \gamma_{m,n}\overset{m}{(\varkappa)},$$

$$(56)\qquad \gamma_{m,n} = (-1)^m \sum_{p=0}^{p=m+1} (-1)^p \overset{p}{(m)}\mathfrak{C}_{p,n};$$

mais, lorsqu'on voudra déduire la valeur de $\mathfrak{C}_{p,n}$ de l'équation (48),

en y faisant $\mu=0$, on sera conduit à la forme $\frac{0}{0}$. Pour éviter inconvénient, on différentie p fois par rapport à ε l'équation

$$\varepsilon^p \mathfrak{A}_{p,n,\varepsilon} = (-1)^p \sum_{q=0}^{q=p+1} (-1)^q \overset{q}{(p)} \overset{p+n}{(q\varepsilon)},$$

et l'on trouvera, en ayant égard aux équations (10) et (17),

$$p!\,\mathfrak{C}_{p,n} = (-1)^p \sum_{q=0}^{q=p+1} (-1)^q \overset{q}{(p)} \partial_\varepsilon^p \overset{p+n}{(q\varepsilon)},$$

ou, si l'on substitue ε à εq et par suite $q\partial_\varepsilon$ à ∂_ε,

$$p!\,\mathfrak{C}_{p,n} = \partial_\varepsilon^p \overset{p+n}{(\varepsilon)}\, (-1)^p \sum_{q=0}^{q=p+1} (-1)^q \overset{q}{(p)} q^p.$$

Or, comme on a

$$\mathfrak{B}_{p,0} = 1,$$

on déduit de l'équation (54)

$$1 = \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{q=0}^{q=p+1} (-1)^q \overset{q}{(p)} q^p,$$

ce qui change l'équation précédente en

$$\mathfrak{C}_{p,n} = \partial_\varepsilon^p \overset{p+n}{(\varepsilon)}\,; \tag{57}$$

d'où l'on voit que $\frac{1}{p!}\mathfrak{C}_{p,n}$ sera le coefficient de x^p dans le développement de

$$\overset{p+n}{(x)} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-p-n+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots\;(p+n)}$$

suivant les puissances entières et positives de x. Ayant évalué ce coefficient, soit par le théorème de Girard, soit par d'autres moyens, on calculera $\gamma_{m,n}$ par l'équation (56), et l'équation (55) fournira ensuite la valeur de $\mathfrak{C}_{\varkappa,n}$ pour tout $\varkappa$. Il faut remarquer toutefois qu'il sera plus simple de déduire la valeur de $\mathfrak{C}$ des équations (47) et (52), ce qui donnera immédiatement

$$\mathfrak{C}_{\varkappa,n} = \frac{\varkappa}{\varkappa+n} \sum_{m=0}^{m=n+1} \beta_{m,n}\, \overset{m}{(-\varkappa-n)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathfrak{C}_{\varkappa,n} = \frac{\varkappa}{\varkappa+n} \sum_{m=0}^{m=n+1} (-1)^m \beta_{m,n}\, \overset{m}{(\varkappa+n+m-1)}. \tag{58}$$

XIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\frac{1}{10^2-1}+\frac{1}{14^2-1}+\ldots\text{ in inf. }=\frac{\pi}{8}.$$

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\frac{1}{8^2-1}+\ldots\text{ in inf. }=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{8^2-1}+\frac{1}{12^2-1}+\ldots\text{ in inf. }=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}.$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^3}+\frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^4}+\ldots\text{ in inf.}=\frac{2}{\pi}.$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^3}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^4}+\frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^5}+\ldots\text{ in inf.}=\frac{4}{\pi}-1.$$

Zwischen den Schenkeln AB und AC des Winkels BAC soll die Linie DE so gezogen werden, dass der innerhalb des Winkels BAC gegebene Punkt F der Schwerpunkt des Dreiecks ADE werde.

(Die Figur zu dieser und der folgenden Aufgabe wird sich ein Jeder leicht selbst entwerfen können.)

Ausserhalb der Schenkel AB, AC des Winkels BAC ist ein Punkt E und innerhalb dieser Schenkel eine durch die Spitze A des Winkels gehende Linie AD gegeben; man soll die, die Schenkel AB und AC in M und N schneidende Gerade MN dergestalt ziehen, dass sie verlängert durch E gehe und, wenn O den Durchschnittspunkt dieser Linie mit AD bezeichnet, zugleich $MO=ON$ sei.

Auf einer Geraden *OP* rollt ein Kreis, dessen Halbmesser *R* ist, mit einer Geschwindigkeit *V*. Auf dem Umfange dieses Kreises rollt ein zweiter Kreis, welcher den ersten im Anfange der Bewegung in einem bestimmten Punkte *G* berührt, mit einer Geschwindigkeit *v*. Ist nun *r* der Halbmesser dieses Kreises, so verlangt man den Ort eines bestimmten Punktes *M* des Umfangs des letztern Kreises am Ende der Zeit *t*, so wie die Kurve, welche dieser Punkt beschrieben hat.

Es ist

$$ab+(a+d)be+(a+2d)be^2+(a+3d)be^3+\ldots+(a+(n-1)d)be^{n-1}$$
$$=\frac{(e-1)(a+(n-1)d)be^n-(e^n-1)bd-(a-d)b(e-1)}{(e-1)^2}.$$

So findet man für $a=1$, $e=b$, $d=1$:

$$b+2b^2+3b^3+4b^4+\ldots+nb^n=\frac{nb^{n+2}-(n+1)b^{n+1}+b}{(b-1)^2}.$$

Es ist

$$r(r-1)(r-2)\ldots.1+(r+1)r(r-1)\ldots2.x+(r+2)(r+1)\ldots3.x^2+\ldots$$
$$\ldots+(r+m)(r+m-1)\ldots(m+1)x^m$$
$$=r(r-1)\ldots.1\Big[\pm\frac{x^{m+r+1}-x}{(x-1)^{r+1}}\mp\frac{m+r+1}{1}\cdot\frac{x^{m+r}-1}{(x-1)^r}$$
$$\pm\frac{(m+r+1)(m+r)}{1.2}\cdot\frac{x^{m+r-1}}{(x-1)^{r-1}}\mp\frac{(m+r+1)(m+r)(m+r-1)}{1.2.3}\cdot\frac{x^{m+r-2}}{(x-1)^{r-2}}$$
$$\ldots\ldots+\frac{(m+r+1)(m+r)\ldots(m+2)}{1.2.3\ldots r}\cdot\frac{x^{m+1}}{x-1}\Big],$$

wobei das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades r gilt.

So findet sich z. B. für $r=3$:

$$3.2.1+4.3.2.x+5.4.3.x^2+\ldots+(m+3)(m+2)(m+1)x^m$$
$$=6\Big[-\frac{x^{m+4}-x}{(x-1)^4}+(m+4).\frac{x^{m+3}-1}{(x-1)^3}-\frac{(m+4)(m+3)}{1.2}\cdot\frac{x^{m+2}}{(x-1)^2}$$
$$+\frac{(m+4)(m+3)(m+2)}{1.2.3}\cdot\frac{x^{m+1}}{x-1}\Big].$$

Für $x=1$ bietet sich die Summe unter der Form $\frac{0}{0}$ dar, deren wahrer Werth jedoch alsdann leicht zu ermitteln ist.

$$bx + abx^2 + (a+1)bx^3 + (a+2)bx^4 + \ldots + (a+n-2)bx^n$$
$$= ab\frac{x^{n+1}-x^2}{x-1} + b\frac{(n-2)x^{n+2}-(n-1)x^{n+1}+2(x^3-x^2)+x}{(x-1)^2}.$$

XIV.

Miscellen.

Die durch grosse Gelehrsamkeit, namentlich auch in philologischen Dingen, ausgezeichnete Schrift: Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen am 23–25. Aug. 1843 im Namen der vereinigten Universität Halle und Wittenberg dargebracht von Dr. J. S. C. Schweigger, Professor der Naturwissenschaft in Halle. (Ueber naturwissenschaftliche Mysterien in ihrem Verhältniss zur Litteratur des Alterthums.) Halle. 4. enthält auch manche für die Geschichte der Mathematik interessante Bemerkungen, und verdient daher in dieser Beziehung um so mehr hier empfohlen und in Erinnerung gebracht zu werden, weil solche Gelegenheitsschriften oft weniger Beachtung finden, als sie verdienen. Ich werde daher hier und gelegentlich wieder in den folgenden Heften des Archivs Einiges aus derselben ausheben, wünsche aber, dass dadurch Niemand abgehalten werden möge, sich mit dem ganzen Inhalte dieser gewiss recht sehr Beachtung verdienenden Schrift des würdigen Herrn Verfassers und anderer, eine ähnliche Tendenz habender Schriften desselben näher bekannt zu machen, was insbesondere auch den Herren Philologen anzurathen sein möchte.

Ich hebe für diesmal die folgende, das berühmte Problem von der Verdoppelung des Würfels betreffende Stelle mit einer ausführlichen Note zu derselben heraus, die sich S. 12 und 13 und S. 44 und 45 finden, und hoffe, dass beides für sich verständlich sein wird, indem ich nur noch bemerke, dass die Note sich hauptsächlich auf die im Texte mit Cursivschrift gedruckten Worte bezieht.

G.

„Wenn *Aristoteles,* da wo er in seiner Physik vom *Raum* redet, die ungeschriebenen Lehrsätze (ἄγραφα δόγματα) des Plato erwähnt, so ist es klar, dass man sich dabei nicht ein eigenes, dogmatisch geordnetes philosophisches System zu denken habe, wie *Tennemann* meint, eben so wenig aber, wie neuerdings *Hermann* annimmt, „eine weitere Entwickelung der Sokratischen Keime unter dem Einfluss anderer Philosophien oder eigener Erfahrungen", was auf spätere, von der schriftlichen Mittheilung verschiedene Zusätze hinauslaufen würde, von denen jedoch schwer zu

beweisen wäre, dass sie lediglich eine weitere Entwickelung Sokratischer Keime waren, also der Hauptsache nach auf Moralphilosophie sich bezogen. Eher das Gegentheil lässt sich wahrscheinlich machen mit Beziehung auf eine Andeutung *Cicero's*, der ausdrücklich hervorhebt, dass Plato sich von ägyptischen Priestern in astronomischen und mathematischen Dingen habe unterrichten lassen, auch die Pythagoräer aufgesucht, um sich über Dinge zu belehren, welche *Sokrates verschmähte*. Und man darf nur einen Blick werfen auf die Geschichte der Mathematik, um sich zu überzeugen, dass Plato und seine Schule auch in mathematischer Beziehung einen bedeutenden Ruf habe. Von Aufgaben ganz anderer Art handelt es sich hier, als diejenigen sind, worauf wohl zuweilen in den Platonischen Schriften angespielt wird. Im mathematischen Fache müssen wir also ganz entschieden ungeschriebene Platonische Lehrsätze annehmen. Selbst mit einem Ausspruche des Delphischen Gottes hängt Platos Ruf als Mathematiker zusammen, indem er das geometrische Problem gelöst haben soll, wovon das Delphische Orakel das Aufhören der Pest in Athen abhängig machte. Was man auch halten mag von dieser Sage oder Fabel: auf alle Fälle ist ihre Entstehung nur unter der Voraussetzung denkbar, dass nicht bloss im Orient, sondern auch in Griechenland, und namentlich in dem durch seine Eleusinischen Mysterien berühmten Athen, mathematische und religiöse Beziehungen in engerer Verbindung standen, als man gewöhnlich sich vorstellt. Wie aber, aus ganz guten, wissenschaftlichen sowohl als moralischen Gründen, wir lieber gar keine Mathematik und Naturwissenschaft werden haben wollen, als eine solche traditionelle, welche noch heut zu Tage bei den Brahminen in Ostindien religiös sich geltend macht: so konnte dasselbe auch bei *Sokrates* der Fall sein, welcher eben darum bloss auf Moralphilosophie sich einliess, die ihrer Natur nach entgegengesetzt ist jedem falschen Mysticismus."

13. „*Cicero* de finibus V. 29. — Die übrigen hierher gehörigen, auf *Plato's* mathematische nur mündlich, nicht in seinen Schriften vorgetragene Lehrsätze sich beziehenden Beweisstellen, findet man gesammelt in *Montucla's* Geschichte der Mathematik, B. I. S. 163—185, wo umständlich die Rede ist von den bedeutenden Verdiensten Plato's und der Platonischen Schule um Mathematik. — So wie aber der Ruhm des *Sokrates* mit dem Ausspruche des *Delphischen Gottes*, der ihn für den weisesten erklärte, zusammenhängt: so reiht eine Sage den Ruhm *Plato's als Mathematikers* an den Ausspruch desselben Gottes an. Um sogleich zu verstehn, dass von dem sogenannten *Delischen Problem*, die *Verdoppelung des Cubus* betreffend, die Rede sei, lese man S. 13. Z. 12 (— oben Z. 18. — G.) statt „das *Delphische* Orakel" vielmehr „das *Delische* Orakel", obwohl der Orakel gebende Gott derselbe ist, nämlich *Apollo*. Apollo soll die Verdoppelung der Masse seines cubischen Altars, gemäss den von *Montucla* angeführten Zeugnissen, zur Bedingung des Aufhörens einer Pest in Attica gemacht haben. Natürlich darf man nicht an jene berühmte Pest denken, welche den Perikles hinwegraffte, sondern muss eine spätere Rückkehr der Seuche annehmen, sofern nämlich *Plato* das Problem gelöst haben soll, obwohl *Montucla* gezeigt hat, dass es schon vor ihm gelöst war. Uebrigens giebt es noch eine ganz andere, hinsichtlich auf Namen und Localität verschiedene Erzählungsart der Entstehung dieses Problems. Und eben darum, weil von einer ganz schwankenden und ihrer Natur nach nicht an eine bestimmte Localität zu bindenden Fabel die Rede ist: so kann man (wie *Hutton* es that und eben so auch *Bar*-

low, jeder in seinem mathematical and philosophical dictionary,) das *Delische Problem* bloss als *Appollinisches Problem* auffassen, da Apollo auch *Delius* heisst; und mag dann, wie es gleichfalls von *Hutton* und *Barlow* geschah, auch *Delphisches* Orakel schreiben, statt *Delisches Orakel*. Letzteres aber müsste nach der *Plutarchi*schen Erzählung (de genio Sokratis c. 7.) genannt werden, obwohl Plutarch in derselben Stelle uns schon auf eine *viel allgemeinere Auffassung der Erzählung* hinleitete. — Schon erwähnt nämlich wurde, wie günstig sich das Delphische Orakel über Sokrates aussprach, was in der *Platonischen Apologie* als ein Aufruf des Gottes dargestellt wird zu einer den Forschungsgeist anregenden Lehrweise. Und gerade aus demselben Gesichtspunkte fasst *Plato* das geometrische Problem desselben Gottes auf. Es erzählt nämlich *Plutarch*, dass Plato, über Lösung dieses Problems befragt, sich an etwas erinnert habe, was bei seinem Aufenthalt in Aegypten sich ereignet hatte. Es sei nämlich eine Nachzeichnung einer ägyptischen Aufschrift, welche in einem Grabmal der *Alkmene*, der Mutter des *Herkules*, auf einer Tafel gefunden wurde, nach Aegypten gesandt und diese Aufschrift von *Chonuphis*, dem Propheten wie er genannt wird, erklärt worden in folgender Weise: die Griechen würden zu einem ruhigen und friedlichen Leben ermahnt, sie sollten der *Philosophie* (d. h. im alten Sinne des Wortes *Naturwissenschaft*) sich befleissigen und mit Gründen statt mit Waffen ihre Streitigkeiten entscheiden. — In diesem Sinne nun habe *Plato* geantwortet: Apollo wolle, indem er ein geometrisches Problem vorlege, die Griechen wegen ihrer Unwissenheit verhöhnen und sie erinnern, dass sie fleissiger *Geometrie* treiben möchten. Der Gott verlange gar nicht die Verdoppelung der Masse seines cubischen Altars, sondern befehle den Griechen das Unheil des Krieges zu vermeiden, sich den Musen zu widmen, und freundlich mit einander zu verkehren, nachdem sie durch *Wissenschaften* und namentlich *Mathematik* die Leidenschaften besänftiget (διὰ λόγων καὶ διὰ μαθημάτων τὰ πάθη καταπραΰνοντας). — Vergleicht man damit eine Stelle des *Plutarch* in dem Leben des Nikias c. 23.: so wird man mit Verwunderung erfüllt, zu sehen, wie viele Mühe es kostete und wie künstliche Umwege man wählen musste, um der Mathematik und den Naturwissenschaften zunächst nur Duldung wenigstens im Leben und endlich allgemeinere Verbreitung zu verschaffen, wobei man dann getrost der still wirkenden Kraft der Wahrheit vertrauen konnte. Selbst Orakelsprüche mussten in dieser Beziehung zur Hülfe genommen werden. Das lange Sprechen des Sokrates in der Platonischen Apologie über den ihn betreffenden Ausspruch des Delphischen Orakels erscheint in diesem Zusammenhang in einem ganz anderen Lichte. Zugleich merkt man, dass bei den Orakeln des Apollo wohl mehr unterrichtete Priester in Thätigkeit mögen gewesen sein, als jene erblichen waren in den Eleusinischen Mysterien aus der Familie der Eumolpiden. — Ueberhaupt hatten die Mysterien vorzugsweise die Traditionen der alten Zeit, die Orakel aber die Gegenwart und Zukunft im Auge; theilweise eben darum den durch die Mysterien veranlassten Hemmungen entgegengesetzt. Als diese ihren Einfluss verloren und namentlich die mathematischen Wissenschaften Gemeingut der Menschheit wurden, schwiegen bald auch die Orakel und mussten schweigen."

Ueber Dezimalbrüche.

Von Herrn Simon Spitzer zu Wien.

(Von Herrn Director v. Littrow dem Herausgeber zur Aufnahme in das Archiv gütigst mitgetheilt.)

Bei Abfassung des gegenwärtigen Aufsatzes war es nicht meine Absicht, die Anzahl der bestehenden Rechnungs-Vortheile

um Einen zu vermehren, da ich weiss, dass sie selten weiter als in der engen Sphäre der Schule ihre Anwendung finden; es war bloss meine Absicht, auf die zahlreichen Gesetze aufmerksam zu machen, die in den Dezimalen herrschen, die wie aus einer unausschöpfbaren Quelle jedem darüber Denkenden von selbst auffallen.

Die Verwandlung mehrerer gemeiner Brüche in Dezimalen ist das erste, was ich hier betrachte. Es wird gewiss Jeden überraschen, wenn ich behaupte, ja selbst durch die That zeige, dass ich gemeine Brüche, deren Nenner 19, 29, 39, 49, u. s. w. sind, so schnell in Dezimalbrüche verwandle, dass kaum Jemand das Resultat so schnell abschreiben könnte, als ich es ausrechne.

Ich will zuerst den eigentlichen Rechnungsmechanismus durch mehrere Beispiele erläutern und dann die Richtigkeit des Verfahrens durch einen einfachen Beweis bestätigen. Es sei $\frac{16}{19}$ das gewählte Beispiel, so sage ich: 2 in 16 geht 8mal (der Quotient wird jedesmal aufgeschrieben und als neuer Dividend betrachtet), 2 in 8 geht 4mal, 2 in 4 geht 2mal, 2 in 2 geht 1mal, 2 in 1 geht 0mal, bleibt 1 (der Rest wird immer verzehnfacht), 2 in 10 geht 5mal, 2 in 5 geht 2mal, bleibt 1 (1 als Rest wird verzehnfacht und der Quotient 2 dazu addirt), 2 in 12 geht 6mal, 2 in 6 geht 3mal, 2 in 3 geht 1mal, bleibt 1, 2 in 11 geht 5mal u. s. f., so dass man hat $\frac{16}{19} = 0{\cdot}84210526315\ldots.$

Zweites Beispiel. $\frac{9}{29}$. Hier ist der beständige Divisor 3; also 3 in 9 geht 3mal, 3 in 3 geht 1mal, 3 in 1 geht 0mal, 3 in 10 geht 3mal, bleibt 1, 3 in 13 geht 4mal, bleibt 1, 3 in 14 geht 4mal, bleibt 2, 3 in 24 geht 8mal, 3 in 8 geht 2mal, bleibt 2, 3 in 22 geht 7mal, bleibt 1, 3 in 17 geht 5mal, bleibt 2, 3 in 25 geht 8mal, bleibt 1 u. s. w.; daher $\frac{9}{29} = 0{\cdot}31034482758\ldots.$

Drittes Beispiel. $\frac{1}{49}$. Hier sage ich 5 in 1 geht 0mal, 5 in 10 geht 2mal, 5 in 2 geht 0mal, 5 in 20 geht 4mal, 5 in 4 geht 0mal, 5 in 40 geht 8mal, 5 in 8 geht 1mal, bleibt 3, 5 in 31 geht 6mal, bleibt 1, 5 in 16 geht 3mal, bleibt 1, 5 in 13 geht 2mal, bleibt 3, 5 in 32 geht 6mal, bleibt 2, 5 in 26 geht 5mal, u. s. w., so dass $\frac{1}{49} = 0{\cdot}020408163265\ldots.$

Wer sich die Mühe nimmt, diese angeführten Beispiele aufmerksam durchzulesen, sie selbst auf dem Papier zu arbeiten und sich durch drei bis vier Stunden in mehreren ähnlichen Beispielen übt, wird sich gewiss überzeugen, dass ich vorher nichts Uebertriebenes behauptete.

Jetzt zum Beweis. Es sei Z der Zähler und $10N-1$ der Nenner, so heisst der Bruch $\frac{Z}{10N-1}$, und wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt, findet man:

$$\frac{Z}{10N-1}=\frac{Z}{10N}+\frac{Z}{10^2N^2}+\frac{Z}{10^3N^3}+\frac{Z}{10^4N^4}+\ldots,$$

d. h. es entsteht eine unendliche Reihe, deren 1stes Glied 10tel, deren 2tes Glied 100tel, 3tes Glied 1000tel u. s. w. enthält. Ferner sieht man aus der Reihe: man findet die 1ste Dezimalziffer, wenn man Z durch N dividirt, die 2te Ziffer erhält man aus der ersten, wenn man diese durch N dividirt, eben so erhält man die 3te aus der 2ten, wenn man diese durch N dividirt u. s. f. Dass man den jedesmaligen Rest verzehnfacht, folgt ebenfalls aus der Betrachtung der Reihe oder auch unmittelbar aus dem Geiste des dekadischen Zahlensystems.

Fast noch einfacher lässt sich der Satz beweisen durch Anwendung der Fourierschen Divisions-Methode, die ich hier als bekannt voraussetze. Ich bezeichne der Einfachheit wegen 79 mit $8\dot{1}$, 29 mit $3\dot{1}$, so dass der Punkt über dem Einer minus bedeutet; es ist auf diese Art z. B.

$$\frac{5}{79}=5{\cdot}0:8\dot{1}=0{\cdot}06329113 \qquad \frac{8}{59}=8:6\dot{1}=0{\cdot}135593$$

26	21
23	33
72	35
9	55
11	19
31	13
u. s. w.	u. s. w.

Dass die jedesmalige Verbesserung nicht abgezogen, sondern hinzuaddirt wird, folgt daraus, weil die Einheit im Dividend nicht positiv, wie bei der gewöhnlichen Fourierschen, sondern negativ ist, daher sich die Subtraction in eine Addition verwandelt.

Bei der Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche stiessen mir oft solche Perioden auf, deren Gesetz in der Zifferfolge ganz jenem der arithmetischen Reihen glich, z. B.

0·24 27 30 33 36 39 42 45 48 51... oder 0·105 110 115 120 125 130 135 140...

Sie nach der gewöhnlichen Methode in gemeine Brüche zu verwandeln, ist gewiss unausführbar und ausserordentlich zeitraubend. Ein bedeutend einfacherer Weg dürfte der folgende sein:

$$S=0{\cdot}24\ 27\ 30\ 33\ 36\ 39\ 42\ 45\ldots;$$

multiplicirt man diese Gleichung mit 100 und zieht man die Gegebene von der so erhaltenen ab, so ist

$$100\,S=24\cdot27\ 30\ 33\ 36\ 39\ 42\ 45\ 48\ldots,$$

folglich

$$99\,S=24\cdot0303030303030303\ldots$$

oder

$$99\,S = 24 + \frac{3}{99} = \frac{2379}{99}\text{, daher } S = \frac{2379}{99^2} = \frac{2379}{9810}.$$

Eben so erhält man aus

$$\begin{aligned} S &= 0\cdot105\,110\,115\,120\,125\ldots \\ 1000\,S &= 105\cdot110\,115\,120\,125\,130\ldots \\ \hline 999\,S &= 105\cdot005\,005\,005\,005\,005\ldots = 105 + \frac{5}{999} = \frac{104900}{999}; \end{aligned}$$

daher

$$S = \frac{104900}{999^2} = \frac{104900}{998001}.$$

Nachdem ich diese Aufgabe so einfach gelöst, versuchte ich Perioden, deren Ziffern in arithmetischen Reihen höherer Grade fortschritten, in gemeine Brüche zu verwandeln, welches mir auch eben so leicht gelang. Es ist z. B.

$$\begin{aligned} S &= 0\cdot01\,04\,09\,16\,25\,36\,49\ldots \\ 100\,S &= 1\cdot04\,09\,16\,25\,36\,49\,64\ldots \\ \hline 99\,S &= 1\cdot03\,05\,07\,09\,11\,13\,15\ldots \end{aligned}$$

Dadurch reduzirt sich die Aufgabe auf die frühere, weil die Ziffern nach arithmetischen Reihen des 1sten Grades fortschreiten; man hat nämlich

$$9900\,S = 103\cdot05\,07\,09\,11\,13\,15\,17\ldots;$$

daher

$$9900\,S - 99\,S = 102\,.\,02\,02\,02\,02\,02\,02\,02\ldots = 102 + \frac{2}{99} = \frac{10100}{99};$$

$$99\,S(100-1) = \frac{10100}{99}\text{, daher } S = \frac{10100}{99^3} = \frac{10100}{970299}.$$

Es sei

$$\begin{aligned} S &= 0\cdot001008027064125216\ldots \\ 1000\,S &= 1\cdot008027064125216343\ldots \\ \hline 999\,S &= 1\cdot007019037061091127\ldots \end{aligned}$$

Die Ziffern dieser Reihe sind nach einer arithmetischen Reihe des zweiten Grades gebildet; daher reducirt sich diese Auflösung wieder auf die nächstvorhergehende. Aus den wenigen Beispielen kann man den Schluss ziehen: Alle gemeinen Brüche, deren Nenner Potenzen von 9, 99, 999, 9999, u. s. w. sind, geben, in Dezimalbrüche verwandelt, Perioden, deren Ziffern nach arithmetischen Reihen des so vielten Grades gebildet sind, als der um 1 vergrösserte Exponent anzeigt.

Ich ende hier mit diesem meinen ersten Aufsatze mit der Hoffnung, dass er den geneigten Leser nicht ganz unbefriedigt gelassen.

XV.

Ueber das Elektron der Alten und die praktische Bedeutung alterthümlicher Naturwissenschaft, namentlich der symbolischen Hieroglyphe, für die neuere Zeit.

Von

Herrn Professor Dr. J. S. C. Schweigger

an der Universität zu Halle.

Einleitung.

Es giebt dreierlei Anwendungen der fortschreitenden Naturwissenschaft, unter denen die älteste die auf Medicin ist. Diese wurde in neuester Zeit dadurch beschränkt, dass die Medicin sich abgetrennt (auf unsern Universitäten sogar der Facultät nach) von der Pharmacie, und die sich geltend machende Homöopathie, der alten Pharmacie Hohn sprechend, mehr einen zeitgemässen dunkeln mystischen, als einen heitern naturwissenschaftlichen Charakter angenommen hat. Erfreulicher ist es, hinzublicken auf die grossartigen Fortschritte, welche die Technik dem Einflusse fortschreitender Naturwissenschaft verdankt, wozu in England vorzugsweise die sogenannten Institutions beitragen, jene nachahmungswerthen praktisch naturwissenschaftlichen Bürgergesellschaften, welche den geistigen Mittelpunkt der Gewerbthätigkeit Englands bilden. Es giebt aber noch eine dritte Anwendung der fortschreitenden Naturwissenschaft, nämlich die zur Aufklärung der Dunkelheit des Alterthums, welche Dunkelheit durch Verbreitung nächtlicher Schatten von jeher nur allzu einflussreich war auf die neuere Zeit. Das vorliegende Archiv für Mathematik und Physik, auf allen gelehrten philologischen Schulen unsers deutschen Vaterlandes verbreitet, ist gegenwärtig die einzige Zeitschrift, worin es möglich, alterthümliche naturwissenschaftliche Dinge auf eine gründliche Weise zur Sprache zu bringen. Denn die philologischen

Journale mögen sich nicht auf naturwissenschaftliche, die naturwissenschaftlichen nicht auf philologische Gegenstände einlassen. So gab mir allerdings die Histoire de la Chimie depuis le temps les plus reculés par Dr. Ferdin. Höfer. Paris 1842., wovon in einem chemischen Journal zu sprechen wenigstens zulässig scheinen musste, eine wohlgegründete Veranlassung im Journal für praktische Chemie. B. 34. S. 385. ff. vom Elektron der Alten wenigstens nebenbei zu sprechen in einer sich dem Hauptinhalte nach auf experimentelle naturwissenschaftliche Gegenstände beziehenden Abhandlung. Sehr gern würde ich mich mit dieser kurzen Mittheilung begnügt haben, wenn nicht Missverständnisse entstanden wären, deren Aufklärung im Interesse der Wissenschaft mir eine Ehrensache für dieses chemische Journal zu sein schien. Da aber die auf Missverständnissen beruhenden Einwendungen in einer von demselben Verleger herausgegebenen Zeitschrift (in Poggendorff's Annalen der Physik. B. 65. S. 621—637.) mitgetheilt worden waren, und zwar in grosser Ausführlichkeit, wodurch es nöthig wurde, die Sache umständlicher und philologisch strenger zu behandeln: so war kein Raum mehr zur Fortsetzung der Abhandlung in derselben Zeitschrift, worin sie angefangen war. Für die entstandene unangenehme Verspätung in Publication der folgenden Mittheilungen giebt nun die vorliegende Zeitschrift reichlichen Ersatz. Denn es ist ein sehr günstiger Umstand, dass bei dem zunächst unsere höheren Lehranstalten ins Auge fassenden Archiv für Mathematik und Physik zugleich mathematisch und philologisch gebildete Leser vorausgesetzt werden können. Gern werden dieselben sich die umständlich darzulegenden Einzelnheiten gefallen lassen; aber sie werden nicht dabei stehen zu bleiben verlangen, wozu andere, sich in Einzelnheiten verlierende Disciplinen oft nur allzusehr, ja in dem Grade geneigt machen, dass man, um mit Göthe zu reden, „Unordnung und Wust als das wahre Element ansieht, in welchem das Wissen einzig gedeihen könne.“ Dagegen wird durch die mathematische Anschauung der rechte Sinn geweckt, eine lange Reihe von Gedanken zu verfolgen, Ueberblicke zu gewinnen und zerstreut liegende Bruchstücke geistig zu einem Ganzen zu vereinen, wodurch scheinbar Unbedeutendes erst Bedeutung gewinnt. Da aber nicht vorausgesetzt werden kann, dass die Leser dieses Archivs mit jener frühern in einem chemischen Journal mitgetheilten, wie gesagt, nur nebenbei vom Elektron der Alten sprechenden Abhandlung bekannt seien, so ist daraus einiges hervorzuheben, wozu wenige Nummern ausreichen werden.

1. Höfer sagt in der oben angeführten Histoire de la Chimie. p. 133.: Quant au métal que l'on rencontrait dans les mines d'or (elutia), et qui, après le lavage du minérai, se présentait sous la forme de calculs noirs, variés de taches blanches à peu près du même poids que l'or, et se trouvant pêle-mêle avec les sables aurifères au fond des corbeilles destinées à recueillir ce métal, ce n'est là certainement pas l'étain. Quel était alors ce métal blanc, et aussi pesant que l'or? — Ce métal ne pouvait être que le platine. D'ailleurs, il n'est pas étonnant que les anciens aient connu le platine, puisque ce métal se rencontre souvent dans les mines d'or, et qu'il se présente,

ainsi que l'or, avec l'aspect qui le charactérise. In der Note wird folgende Stelle des Plinius angeführt: Inveniuntur (eae arenae) et in aurariis metallis, quae elutia vocant, aqua immissa eluente calculos nigros paulum candore variatos, quibus eadem gravitas quae auro, et ideo in calathis, in quibus aurum colligitur, remanent cum eo. (Hist. nat. XXXIV. 16.) — Plinius nennt diese Körner von getrübtem weisslichen Schimmer (da niger sehr häufig blos das Dunkelfarbigere bezeichnet), eben ihrer Schwere und ihrer dem Blei näher als dem Silber stehenden Farbe wegen, plumbum album oder candidum, und beginnt den Abschnitt, welcher die verschiedenartigsten Notizen über plumbum album und nigrum zusammenstellt, sogleich mit Hindeutung auf fabelhafte, dieses plumbum album betreffende Angaben, sowie auf das hohe Alterthum desselben: plumbi duo genera, nigrum atque candidum; pretiosissimum candidum, a Graecis appellatum cassiteron, fabuloseque narratum in insulas maris atlantici peti. — Album habuit auctoritatem et Iliacis temporibus, teste Homero, cassiteron ab ipso dictum. Aus dem weissen Blei, sagt er, kann man kein Silber ausschmelzen, wohl aber aus dem schwarzen (non fit ex albo plumbo argentum, cum fiat ex nigro). Wenn aber dabei steht: plumbum nigrum cum argento nascitur mixtisque venis conflatur; ejus qui primus fluit in fornace liquor, stannum appellatur, qui secundus, argentum: so sieht man leicht, dass in dieser Stelle das Wort stannum keineswegs seine gewöhnliche Bedeutung habe, oder, den Angaben aller unserer Wörterbücher gemäss, durch Zinn übersetzt werden könne, sondern, wie schon Beckmann in einer gelehrten Abhandlung über Zinn (Beiträge zur Geschichte der Erfindungen. B. IV. S. 321—381.) hervorhebt, Plinius hier silberhaltiges Blei mit dem Ausdrucke stannum bezeichne. Ebenso wenig kann man an Zinn denken, wenn es von dem weissen Blei heisst: „Silber sei schmelzbarer als dieses weisse Blei und lasse sich eben deswegen damit nicht löthen; überhaupt sei dieses weisse Blei unvermischt mit andern Metallen zu nichts zu brauchen“ (albi plumbi natura plus aridi habet, contraque nigri tota humida est; ideo album nulli rei sine mixtura utile est; neque argentum ex eo plumbatur, quoniam prius liquescit argentum). Diess heisst doch offenbar, man fand grosse Schwierigkeit bei der Bearbeitung dieses sogenannten weissen Bleies, oder, nach Höfers naturgemässer Auffassungsweise, der im Flusssande neben Gold gefundenen Platinkörner, und konnte sie blos schmelzen durch Vermischung mit andern Metallen. In der That ist Platin, gleich reinem Eisen, wohl schweissbar, aber nicht schmelzbar in unseren Oefen.

2. Man sieht, dass in den angeführten Stellen des Plinius (woher er sie auch mag entnommen haben) von der ältesten Bedeutung des Wortes plumbum album oder candidum die Rede sei. In die fabelhafte trojanische Zeit werden wir zurückgeführt und auf den gleichgeltenden Homerischen Ausdruck κασσίτερος hingewiesen. Schneider, der einzige Philolog neuerer Zeit, der sich ernstlich mit Naturwissenschaften beschäftigte, sagt, um Einwendung zu machen gegen die Uebersetzung des Homerischen Kassiteros durch Zinn, in seinem bekannten Schullexikon: „Aus der angeführten Stelle erhellt, dass man den κασσίτερος im Feuer er-

weicht und mit dem Hammer zu Platten gearbeitet verbrauchte. Hephästos ist es, welcher zu Schienen für Achill den κασσίτερος verarbeitet, „der schrecklich schallte vom Speer getroffen.“ Von einem klingenden Metall also ist die Rede. Uebrigens führt Homer sogar in eine vortrojanische Zeit bei seinem Kassiteros uns zurück, indem der Harnisch des Agamemnon, worauf Streifen von Gold und Kassiteros angebracht, als Gastgeschenk dargestellt wird, das ein Urenkel Phaethon's, der reiche Herrscher in Kypros, gegeben, welcher Paphos erbaut, wodurch wir in den berühmtesten Mythenkreis hineinkommen, dem auch Achill und Diomed angehören. Bei diesen drei Königen allein ist Kassiteros als Schmuck genannt, und schon dadurch als grosse Seltenheit bezeichnet. Wie aber Kassiteros bei Homer stets neben Gold steht: so kommt es auch in der Natur nach Poseidonius (dessen Zeugniss Strabo anführt) neben Gold und Silber im Flusssande vor und wird zugleich mit diesen edlen Metallen ausgewaschen. Auch bei Strabo ist also dasselbe natürliche Vorkommen neben Gold bezeichnet, das Plinius hervorhebt. Und mit Recht legt Höfer eben hierauf das Hauptgewicht, wodurch zugleich der Beisatz eadem gravitas quae auro bedeutend wird. In dieser letzten Beziehung führte ich noch an, dass Herodot (I. 50.), wo er von den Geschenken des Krösus für den Delphischen Apollo redet, Platten nennt aus gelbem im Feuer geläuterten Golde und aus weissem Golde, welche, ganz gleich an Grösse, dem Gewichte nach sich verhielten wie 1,5 : 2 = 3 : 4. Und da gehämmertes Platin nach Brisson ein specifisches Gewicht von 20,336, gewalztes sogar von 22,069 hat, nach Mohs aber das natürlich in Geschieben vorkommende Gold von hochgelber Farbe ein specifisches Gewicht zeigt von 14,857: so kommen wir dadurch, je nachdem wir das Gold weniger oder mehr im Feuer geläutert voraussetzen, ungefähr auf die Zahlen 15:20 oder 16,5:22 = 3:4, wie das Verhältniss gleicher Platten gelben und weissen Goldes von Herodot bestimmt ist. Und wir können uns die Angabe 3:4 um so mehr gefallen lassen, da man sich die Goldplatten gegossen denken kann, die von Platin aber, nach der von Homer bezeichneten Bearbeitung des Kassiteros, in heftigster Glühhitze mit dem Hammer geschlagen sein mussten. Jedoch diese Stelle Herodot's wurde von den Philologen willkürlich corrigirt unter der Voraussetzung, dass bei weissem Golde man nothwendig an eine Mischung aus Gold und Silber denken müsse. Aber da, wo Herodot (III. 115.) von Elektron und Kassiteros redet, welche aus ihm ganz unbekannten westlichen Gegenden, aus Inseln kommen (wohin nach Strabo die Phönicier ihre Fahrt sehr geheim hielten), da fügt er am Schlusse bei: „Von dem äussersten Ende her kommt Kassiteros und Elektron. Auch dass im Norden Europas überaus viel Gold sei, ist offenbare Thatsache; wie es aber gewonnen wird, darüber weiss ich nichts zuverlässiges zu sagen.“ Wenn nun das Alterthum mit dem Gold im Norden Europas bekannt war, warum sollte die ebendaselbst vorkommende Platina durchaus unbekannt geblieben sein? Eben in Sibirien, das noch jetzt als ein heiliges Land den Indischen Brahminen gilt, finden wir die Ansicht Werner's bestätigt, dass vorzüglich im zerklüfteten Erdreich, wo die Natur im Grossen die Auswaschung vorgenommen, edle Metalle reichlich zu finden sind, folglich in geognostischer Beziehung allerdings ein

goldenes Zeitalter anzunehmen sei, wo edle Metalle in reichem Masse umherlagen auf der Erde. Eben darum schloss ich meine Abhandlung über Platina (im Journal für praktische Chemie. B. 34. S. 419.) mit folgenden Worten: „wenn wir zugeben müssen, dass Platina dem höheren Alterthume bekannt war, so ist kein vernünftiger Grund mehr vorhanden, welcher uns hindern könnte, in dem Zusammenhange, in welchem Homer sein Kyanos nennt, an das in der Natur gewöhnlich vereint mit Platina vorkommende Palladium zu denken. Man vergesse nämlich nicht, dass reines gediegenes Palladium in Körnern neben den Platinkörnern natürlich vorkommt. Wollaston suchte solche Palladiumkörner aus Brasilianischen Platinkörnern aus, indem das Ansehen der erstern wie faserig war und die Fasern von dem einen Ende aus zu divergiren schienen. Ein noch einfacheres Unterscheidungsmittel möchte die Erhitzung sein nach Bréant's Methode, wobei die Palladiumkörner durch die blaue Farbe sich kenntlich machen würden. Und diese Unterscheidungsmethode scheint eben durch den alterthümlichen Namen Kyanos angedeutet, in welcher Beziehung also selbst aus dem alten Homer, dem nächsten Zweck einer chemischen Zeitschrift gemäss, noch etwas zu lernen für praktische Chemie."

Jetzt ist es Zeit, auf das in der oben angeführten Stelle des Herodot neben Kassiteros genannte Elektron überzugehen und die Hauptstellen anzuführen aus dem dritten Abschnitt jener Abhandlung über Platina, welcher überschrieben: „Platina unter dem mystischen Namen Elektron (ἤλεκτρον)." Vorangestellt ist folgende Stelle aus Höfer's Geschichte der Chemie. S. 109.

3. L'électrum signifie chez les anciens deux choses bien differentes: d'abord l'électrum proprement dit, c'est à dire l'ambre jaune ou le succin, qui est une substance organique (espèce de résine fossile); en second lieu, une alliage d'or et d'argent, comme nous l'apprend Pausanias: ἄλλο ἤλεκτρον ἀναμεμιγμένος ἐστὶν ἀργύρῳ χρυσός, „il existe un autre electrum qui est une alliage d'or et d'argent." Comp. Plin. XXXIII. 4.: „Tout or est allié d'argent; la proportion en varie. C'est quelquefois la dixième, la neuvième, la huitième partie du poids. Lorsque la proportion de l'argent est d'un cinquième, l'or perd son nom et prend le nom d'électrum. Un auteur italien Cortinovis (opuscoli scelti sulle scienze etc. Milano. 1760. 4⁰.) chercha à prouver dans une savante dissertation, que le platine était connue des anciens sous le nom d'électrum. Les raisons, qu'il en donne, ne sont pas valables."

Es ist meine Absicht, mich an Cortinovis anzuschliessen, dessen Abhandlung ich übrigens noch nicht zu sehen bekam. Die gewöhnlich nur mit obigen Worten angeführte Stelle des Pausanias (lib. V. cap. 12. p. 406. ed. Casaub.) lautet nämlich im Zusammenhange gelesen nach wörtlich treuer Uebersetzung also: „Dieses Elektron, woraus die Bildsäule des Augustus gemacht und welches als Naturprodukt (αὐτόματον) sich findet im Sande des Eridanus, ist sehr selten, und steht daher in hohem Werthe bei den Menschen; das andere Elektron aber ist mit Silber gemischtes Gold." Pausanias setzt offenbar das Naturpro-

dukt dem Kunstprodukt entgegen. Man suchte also das im Sande des Eridanus (welcher Fluss, wie schon Herodot a. a. O. andeutet, dem noch unerforschten „äussersten Westen“ angehörte) vorkommende Naturprodukt (was unmöglich Bernstein sein konnte, woraus sich auch keine Statue machen lässt) durch Mischung von Gold und Silber nachzuahmen. Also muss jenes Naturprodukt nothwendig ein edles (wie Pausanias sagt, „sehr seltenes“) Metall gewesen sein, das auch an Werth dem Golde vergleichbar, nur von hellerer Farbe war. Dem natürlichen Vorkommen gemäss im Flusssande werden wir also nothwendig an Platina denken müssen. Ein Zeitgenosse des Augustus (von dessen Bildsäule aus Elektron in obiger Stelle des Pausanias die Rede ist) nämlich Virgil in seiner Aeneide (VIII. 624.), lässt Beinschienen aus Electrum und reinem Gold (ocreas electro auroque recocto) vom Vulcan für den Aeneas machen in offenbarer Nachahmung Homer's, der (Il. XVIII. 613.) Schienen für Achill vom Hephästos machen lässt aus Kassiteros. Virgil übersetzte also κασσίτερος durch electrum.

Nun aber wird es nöthig sein, vorzugsweise davon zu sprechen, wie das Homerische nach Plinius dem plumbum album gleichbedeutende κασσίτερος (d. h., dem Dargelegten gemäss, Platina) zu dem Namen electrum (ἤλεκτρον) kommen konnte? — Buttman in seiner Abhandlung über Elektron (im Mythologus, S. 337—363.) spricht als Grammatiker mit etymologischer Gründlichkeit von diesem Worte. Er rechtfertigt die Ableitung des Namens ἤλεκτρον von ἕλκειν, ziehen, nicht blos von grammatischer Seite vollkommen, sondern auch durch analoge Bezeichnungen des Bernsteins in andern Sprachen. In diesem auf Anziehungskraft sich beziehenden Sinne konnte die natürlich vorkommende Platina mit gutem Grund Elektron genannt werden, weil sie wegen ihres Eisengehaltes magnetisch ist, und zwar nicht blos vom Magnet angezogen wird, sondern selbst in grössern Stücken geradezu polarisch vorkommt. Da also die natürlich vorkommende Platina sich dem Magnet anschloss, so war sie schon dadurch im Alterthume der wissenschaftlichen Naturforschung entzogen und gehörte den Mysterien an, worin der Magnetismus eine so grosse Rolle spielte. Der Name Elektron für die natürlich vorkommende Platina ist also ein aus den Mysterien stammender, und war für die mit magnetischer Polarität begabten Platinastücke sehr verständig gewählt, wurde aber dann obwohl unpassend selbst übergetragen auf die Legirung aus Gold und Silber, womit man das Platin nachzuahmen suchte. Man sieht zugleich, dass der Ausdruck Kassiteros ein genereller, Elektron ein specieller, auf eine mysteriöse Eigenschaft hindeutender, also vorzugsweise oder wenigstens zunächst der polarischen Platina angehöriger ist. Wer den letzten, auf die Homerische Iliade sich beziehenden Abschnitt meines Buches über die samothracischen Mysterien (welches ich unter dem Titel einer Einleitung in die Mythologie auf dem Standpunkt der Naturwissenschaft herausgab) gelesen hat, kann nun leicht abnehmen, warum der (als Elektron polarisch vorkommende und daher den Mysterien sich anschliessende) Kassiteros in der Iliade allein mit den dioskurischen Wesen Achill und Diomed in Verbindung gebracht

wird, und selbst der von Agamemnon getragene Kassiteros dem verwandten kyprischen Mythenkreis angeschlossen ist. Da aber in der Iliade die mysteriösen Beziehungen blos den dunkeln Hintergrund bilden, worauf die Gestalten der Helden in so hellerem Glanze hervortreten: so vermeidet Homer den mysteriösen Ausdruck Elektron in der Iliade gänzlich. Aber in der Odyssee, welche die magischen Fabeln der Mysterien gewissermassen zur Schau trägt, kommt umgekehrt nie der Ausdruck Kassiteros vor, sondern statt des Kassiteros glänzt hier Elektron neben Gold. Was ich hier andeute mit Hinsicht auf den Gebrauch der Worte Kassiteros und Elektron, wo der eine Ausdruck derselben Sache allein der Iliade, der andere allein der Odyssee eigenthümlich ist, steht nicht so isolirt, als man vielleicht glauben möchte. Nur haben die Philologen den Wink unbeachtet gelassen, den ihnen Plinius gab, indem er sagt (Hist. nat. XXX. cap. 1. sect. 2.): „Es ist sehr beachtungswerth, dass Homer bei dem trojanischen Kriege so sehr stillschweigt von magischer Kunst, so sehr aber auf sie eingeht in den Irrreisen des Ulysses, dass fast das ganze Werk aus nichts anderem besteht.“ Plinius unterscheidet also die Ilias und die Odyssee durch die Art ihres Verhältnisses zu den Mysterien. Aber da die Philologen nicht einmal darauf achteten, wie beschränkt die Schriftsprache durch die Mysterien war: so gingen solche blos flüchtig hingeworfene Andeutungen, wie die eben angeführte des Plinius, gänzlich für sie verloren.

Aus meiner Abhandlung im Journal für praktische Chemie (B. 34. S. 385—420), welche überschrieben „über Platina, Altes und Neues“, war dieser kurze Auszug hier voranzustellen, damit die für dasselbe Journal ursprünglich bestimmte Fortsetzung so viel als möglich unverändert abgedruckt werden könne. — In der That bezog sich jene Abhandlung ihrem Hauptinhalte nach nicht auf alterthümliche, sondern auf neuē, dem Platin sich anreihende Mittheilungen. Vorzugsweise von den merkwürdigen krampfhaften Zuckungen der Magnetnadel handelte es sich, welche entstehen, wenn eine Ladungskette, namentlich aus Platin, mit der zuerst von Wach im Jahre 1829 (s. Jahrb. der Chem. u. Phys. für 1830 oder d. g. R. B. 58. S. 40—66.) construirten constanten galvanischen Kette verbunden wird. So schwach diese Kette ist in ihrer ursprünglichen Gestalt (da es zu galvanoplastischem Zwecke, oder wie man sich damals ausdrückte, zur Bildung figurirten Cämentkupfers und anderer zum Theil krystallinisch auftretender fester Metallvegetationen, auf Schwächung des constanten elektrischen Stromes ankam): so heftig können doch bei Einschiebung einer Ladungskette aus Platin jene krampfhaften Zuckungen der Magnetnadel werden, welche mit der krystallinischen Bildung des festen Cämentkupfers zusammenhängen, und uns an die bei andern Krystallisationen zuweilen hervortretenden blitzartigen Lichterscheinungen erinnern. Von solchen dem Charakter eines chemischen Journals gemäss mitzutheilenden neuen Thatsachen handelte es sich dort. Nur nebenbei war von alterthümlichen Dingen die Rede,

wie gesagt, zunächst in der Absicht, um auf Höfer's Geschichte der Chemie aufmerksam zu machen. Im entgegengesetzten Sinne ist die Abhandlung geschrieben: Ueber die vermeintliche Kenntniss der Alten vom Platin, von E. L. Schubarth in Poggendorff's Annalen der Physik (1845. No. 8. S. 62 — 637.). Dieselbe ist dem Geiste nach eine philologische, auf kritische Emendationen sich beziehende. Jedoch dieses grammatisch kritische Princip reicht nicht aus bei allen naturwissenschaftlichen, mit den alten Mysterien zusammenhängenden Dingen. Denn mit Recht macht Höfer in seiner Geschichte der Chemie, wie ausdrücklich von mir hervorgehoben wurde, aufmerksam auf den innigen Zusammenhang der alten Religionen mit Naturwissenschaft, wodurch nothwendig über manche naturwissenschaftliche Dinge absichtlich ein mysteriöses Dunkel ausgegossen wurde. Und damit hing zum Theil auch die Doppelsinnigkeit bei dem Gebrauche mancher Worte zusammen. Aber Herr Professor Schubarth lässt sich gar nicht darauf ein, dass dasselbe Wort verschiedene Bedeutung haben könne, was doch selbst bei den Worten des gemeinen Lebens so häufig der Fall ist. Vielmehr behauptet er, Höfer und ich hätten abweichend von einer „seit Jahrhunderten angenommenen Meinung", dass das Plinianische plumbum candidum unser Zinn andeute, den Satz aufgestellt, dass darunter (wie bei einigen verwandten Ausdrücken) „nichts anderes als Platin zu verstehen sei." Jedoch sogleich auf der zweiten Seite meiner Abhandlung heisst es: „Bei der Chemie der Griechen und Römer beginnt Höfer den Abschnitt vom Zinn mit den Worten, dass eine grosse Dunkelheit in griechischen und römischen Schriftstellern herrsche hinsichtlich auf den Gebrauch der Worte stannum, plumbum album, plumbum argentarium, cassiteros, obwohl man gewöhnlich sich begnüge, diese Ausdrücke durch Zinn zu übersetzen. Nachdem er Stellen angeführt, die allerdings auf Zinn passen, sagt er Folgendes." Und nun sind die Stellen angeführt, welche nicht passen auf Zinn, wohl aber auf Platin, was auch Herr Professor Schubarth unbedingt zugeben muss. Um jedoch die Bedeutung Zinn festzuhalten, nimmt er nicht blos zu willkürlichen philologischen Conjecturen, sondern sogar zu der naturwidrigen Voraussetzung seine Zuflucht, dass im Alterthume Zinngraupen neben Gold vorgekommen und gemeinschaftlich ausgewaschen wurden aus dem Flusssande. „Allerdings," sagt er, „ist ein Zusammenvorkommen von Zinnerz mit Gold ungewöhnlich [1]), doch aber nicht unmöglich."

---

[1]) Statt „ungewöhnlich" sollte stehen „unerhört." Der Ausdruck „ungewöhnlich" aber könnte gerechtfertigt scheinen, weil der H. Verf. kurz zuvor gesagt: „Agricola (de re metallica Basil. 1657. p. 269.) führt unter den verschiedenen Methoden des Waschens von Gold und Zinnerz eine in Portugal seiner Zeit gebräuchliche an." — Man könnte sonach glauben, zu Agricola's Zeiten seien Gold und Zinnerz zusammen vorgekommen. Schlägt man aber die citirte Stelle nach, so heisst sie in wörtlicher Uebersetzung: „ich sprach bisher von den verschiedenen Arten den Goldsand auszuwaschen; nun will ich von der Auswaschungsweise der Materie sprechen, welche beigemischt den schwarzen Steinchen, woraus Zinn bereitet wird."

Diess ist es, was ich zur Rechtfertigung Höfer's in Auffassung der Plinianischen Stelle, bei welcher vorzugsweise sein Gegner verweilt, zu sagen habe. Denn was ich zur Bestätigung der Ansicht Höfer's über das, wie Plinius selbst sagt, dem plumbum album gleichbedeutende Homerische Kassiteros sagte, das mit Gold combinirt wird und nach Poseidonius gleichfalls natürlich vorkommt neben Gold, während Virgil dieses Homerische Kassiteros durch Elektron übersetzte, woraus man wieder sieht, dass von einem edlen Metalle die Rede sei; diess, sowie alles, was damit zusammenhängt, übergeht unser Gegner mit Stillschweigen. Unter solchen Umständen bleibt mir nichts übrig, als diese Veranlassung im allgemein wissenschaftlichen Interesse zur Beseitigung von Missverständnissen zu benutzen.

Zunächst ist über das naturwissenschaftliche Werk des Plinius ein Wort zu sprechen, da Herr Professor Schubarth Gewicht legt auf den Ausdruck „Plinianisches plumbum candidum", gleichsam als ob in der Stelle, von welcher er eine lange Uebersetzung mittheilt, Plinius die Absicht habe, seine durch Untersuchung gewonnenen Ansichten hinsichtlich auf das plumbum candidum mitzutheilen. Demnach scheint sowohl der Herr Verfasser als die Zeitschrift, worin jene schon von Beckmann als höchst verworren bezeichnete Stelle des Plinius in ganzer Ausführlichkeit Platz finden konnte, es vergessen zu haben, oder wenigstens unbeachtet zu lassen im vorliegenden Falle, dass die sogenannte historia naturalis des Plinius eine Encyklopädie sei, wie Plinius selbst sie nennt; eine Encyklopädie aus hundert der besten Schriftsteller und etwa zwei tausend, wegen des dunklen Inhalts (propter secretum materiae) von wenigen gelesenen Schriftrollen zusammengetragen. Unter solchen Umständen mag es daher ganz angemessen scheinen, daran zu erinnern, in welchem Sinne Böttiger die Naturforscher bei ihrer Versammlung in Dresden zur Bearbeitung jener alten naturwissenschaftlichen und technischen Encyklopädie des Plinius aufforderte. Es ist also zu sprechen:

I. Ueber die dem naturwissenschaftlichen Standpunkt unserer Zeit angemessene Benutzung der Plinianischen Encyklopädie.

Bei dem Charakter, welchen die Versammlungen deutscher Naturforscher und Aerzte im Gegensatze zu dem, was ursprünglich (bei dem Aufrufe dazu von der Academia naturae curiosorum) beabsichtigt war, seit einer Reihe von Jahren angenommen haben und welcher darin besteht, dass jede Jahresversammlung die unmittelbar vorhergehende in wissenschaftlicher Beziehung ignorirt [2]);

Nicht entfernt also ist angedeutet, dass diese schwarzen Steinchen, woraus Zinn bereitet wird, zugleich mit Gold irgendwo vorkommen.

[2]) Was darüber gesagt S. 40. meiner Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen im Jahre 1843, wurde gedruckt unmittelbar vor der Versammlung in Gratz, wo ein erhabener Kenner und Freund der Naturwissenschaft mit den schönsten und kräftigsten Worten einen edleren, dem Geist einer freien (an keine Localität gebundenen) Akademie entsprechenden Sinn bei diesen, mit so viel Kostenaufwand verbundenen Jahresversammlungen der Naturforscher anzuregen suchte. Möchte dieser Geist doch endlich siegen über die Anhänglichkeit am Herkömmlichen.

bei dieser Lage der Verhältnisse ist es natürlich längst in Vergessenheit gekommen, dass einmal von einem Unternehmen die Rede war, welches ein Zusammenwirken mehrerer zugleich antiquarisch gebildeter Männer aus allen Theilen der Naturwissenschaft voraussetzt, nämlich von einer Sichtung des in der Plinianischen Encyklopädie verworren zusammengehäuften Materials. Dazu ermunterte der verewigte Böttiger bei der Versammlung der Naturforscher in Dresden im Jahre 1826. Sein Aufruf führte wirklich einige einleitende Schritte herbei, obwohl mehr im philologischen als naturwissenschaftlichen Sinne. Doch dieser Anfang war zugleich das Ende der bald in Vergessenheit gekommenen Sache. Mit Recht aber sagte Böttiger: „man hat nicht einmal die Vorrede zu diesem, encyklopädische Notizen aus zweitausend Schriftrollen enthaltenden Wunderschatz, die Zueignung an Vespasian, ruhig gelesen. Sonst würde man wissen was man fordern könne und solle. Zeitgeiz, sagt man, und Excerptensucht liessen den Compilator bei seinem Dictiren an ein Dutzend Geschwindschreiber, die ihn umringten, nie zur besonnenen Prüfung kommen. Daher strotzt sein Buch von missverstandenen Stellen [3]) anderer Schriftsteller, auch konnte er vieles gar nicht beurtheilen, er, der mit Staatsgeschäften stets überladene. Auf die meisten dieser Vorwürfe antwortet das von ihm mehrmals wiederholte Wort: „ut nihil, quod equidem noverim, praetermittam.“ Hierzu kommt, wie er selbst an Vespasian schreibt, dass diese Auszüge aus hundert Schriftstellern in abgerissenen Stunden zum Theile bei Nacht gemacht wurden. Hätte Plinius nur immer die einzelnen Schriftsteller da genannt, wo er sie ausschreibt. Aber ihre Namen (wenigstens die der berühmtesten) sind blos angeführt bei der Inhaltsanzeige der einzelnen Bücher, welche unmittelbar folgt nach der in Briefform an Vespasian geschriebenen Vorrede. Offenbar war also bei der (wie die Uebersetzung Schubarth's am besten beweist) so höchst verworrenen Stelle [4]) des Plinius

---

[3]) Meine Abhandlung „über den Einfluss der naturwissenschaftlichen Mysterien auf die Litteratur des Alterthums“ führt jedoch auf neue Gesichtspunkte in Auffassung verworrener Stellen des Plinius. Wenn selbst ein Historiker wie Herodot absichtlich (was durch ein unverkennbares Beispiel nachgewiesen wurde) Verkehrtheiten schrieb, blos um räthselhafte Andeutungen den Mysterienkundigen über Dinge zu geben, welche der Schriftsprache unzugänglich waren: wie vielmehr konnte einem naturwissenschaftlichen Schriftsteller, wie Plinius war, ein solches Verfahren durch die akroamatischen (d. h. lediglich zur mündlichen Mittheilung bestimmten) Gegenstände jener naturwissenschaftlichen Mysterien nothwendig gemacht werden, propter secretum materiae, wie er in vorhin angeführter Stelle seiner Vorrede sich ausdrückt. Es wird sich nachher Gelegenheit finden, diesen Gesichtspunkt bei Erklärung des Plinius durch Beispiele zu erläutern.

[4]) Beckmann, der in seinen Beiträgen zur Geschichte der Erfindungen. B. 4. S. 321—381 über Zinn und Verzinnung schrieb, sagt S. 336. von dieser Plinianischen Stelle: „man muss eingestehen, dass sie bei keiner Erklärung ganz verständlich wird,“ und entschuldigt S. 360. sein Bestreben, einige Widersprüche, welche darin vorkommen, einigermassen wenigstens zu beseitigen, mit den Worten: „ich bitte um Vergebung, dass ich mich so tief in die Kritik gewagt habe.“ Unbegreif-

vom plumbum album das Verfahren Höfer's ganz das richtige, indem er von der Voraussetzung ausging, dass die verschiedenen von Plinius ausgezogenen Schriftsteller mit demselben Worte verschiedene Bedeutung verbanden. Denn will man der lexikalischen Einfachheit wegen, damit dasselbe Wort wenigstens im Munde des Plinius stets dasselbe bedeute, die verschiedenen von ihm ausgezogenen Schriftsteller in Harmonie bringen und in diesem Sinne conjecturiren und emendiren: so versündigt man sich nicht blos an den einzelnen in der Plinianischen Encyklopädie benutzten Schriftstellern [5]), sondern am Ende selbst an der Natur.

---

lich aber ist es, wie Herr Professor Schubarth sagen kann: „Beckmann habe nachzuweisen sich bemüht, dass das Plinianische plumbum candidum unser Zinn und κασσίτερος höchst wahrscheinlich dasselbe Metall andeute, und diese Meinung sehr glücklich gerechtfertigt;“ Beckmann sagt vielmehr S. 346: „Nun komme ich zur Untersuchung desjenigen Metalles, welches die Griechen κασσίτερος, oder wie Plinius sagt cassiteron, und wie er ausdrücklich hinzusetzt, die Lateiner plumbum candidum, weisses Blei, genannt haben.“ — „Dass die Alten so früh, als wir bei ihnen das Wort κασσίτερος finden, schon unser Zinn gekannt haben, das kann ich mit nichts beweisen, und ich zweifle, dass irgend jemanden dieser Beweis möglich sein wird, vielmehr ist mir das Gegentheil wahrscheinlicher.“ Es ist ihm nämlich nach S. 348. wahrscheinlich, dass die Griechen in späterer Zeit „das wahre Zinn nur für eine Abart ihres alten Kassiteros oder des Stannums der Römer gehalten haben, so wie letztere das eine wie das andere für eine Abart des Bleies erklärten.“ S. 351. fügt er allerdings bei: „Es könnte doch sein, dass die Griechen sehr früh das wahre Zinn durch den Handel und mit ihm zugleich den ausländischen Namen, woraus κασσίτερος geworden, erhalten haben.“ — „Ueber die Frage, welche Meinung die meiste Wahrscheinlichkeit habe, will ich nicht streiten; nur dabei bleibe ich, dass für Homers und Herodots Zeitalter keine gewiss erwiesen werden kann.“ Man sieht, dass Beckmann geneigt ist, eine ältere und eine neuere Bedeutung des Wortes κασσίτερος (und also auch des nach Plinius dem Homerischen κασσίτερος gleichbedeutenden plumbum album oder candidum) anzunehmen. Für die neuere Zeit passt unstreitig die Uebersetzung durch Zinn, woran niemand noch gezweifelt hat. Aber als die frühere, in den alten Mysterien einheimische, nach Virgil's Uebersetzung dem Elektron gleichbedeutende Geltung des Wortes müssen wir, den von Höfer und von mir angeführten Gründen gemäss, Platin anerkennen.

[5]) So wollen wir dem Herrn Professor Schubarth gern zugeben, dass Plinius gewiss „nie eine Wägung angestellt“ zur Bestimmung des specifischen Gewichts, was man einem so sehr beschäftigten Staatsmanne auch nicht zumuthen wird. Wir geben ferner zu, dass er wenigstens bei der nachlässig geschriebenen Stelle vom Grunde, warum Gold zu so hohem Werthe gelangt, „keine Ahnung vom wirklichen specifischen Gewichte des Goldes“ gezeigt habe. Gilt aber nun sogleich dasselbe von allen den zahlreichen Schriftstellern, welche Plinius in seiner Encyklopädie benutzte, so dass man durchaus keine in der Plinianischen Encyklopädie auf das specifische Gewicht sich beziehende Stelle im strengen Sinne nehmen darf? Die genauen über das specifische Gewicht der Mischungen von Gold und Silber angestellten Untersuchungen eines Archimedes sind durch Hiero's Krone so berühmt geworden, dass man unmöglich glauben kann, niemand ausser Archimedes habe im Alterthum genaue Versuche der Art angestellt und der Ausdruck eadem gravitas quae auro sei, auch von Technikern und Metallurgen, deren Schriften Plinius anführt, stets nachlässig gebraucht worden.

Man sieht nun, in welchem Sinn allein eine neue Bearbeitung der Plinianischen Encyklopädie zu wünschen wäre, indem man nämlich, ganz so wie es Höfer bei der vorliegenden Stelle gemacht hat, aus dem verworren zusammengehäuften Material das Bedeutende heraussucht, wozu allerdings eine Gesellschaft von Männern aus den verschiedensten Theilen der Naturwissenschaft sich verbinden könnte. Ein Hauptgesichtspunkt aber wäre dabei noch zu beachten; nämlich die Beschränkung der schriftlichen Mittheilung über naturwissenschaftliche Dinge durch die Mysterien, worauf Plinius selbst [6]) in der Abhandlung vom Elektron mit einigen sehr starken Ausdrücken die Aufmerksamkeit hinlenkt. Denn eben weil man (wie schon vorhin erwähnt wurde) nicht schreiben durfte über die einflussreichsten naturwissenschaftlichen Dinge, welche die Mysterien in ihr Bereich gezogen, war man zur bildlichen Einkleidung für Mysterienkundige genöthigt. Und schon diese bildliche Einkleidung, die ersonnen werden musste, war eine Art von Poesie. Aus diesem Gesichtspunkte wird das, was Plinius von den wunderlichen, auf das Elektron sich beziehenden Fabeln der Poeten sagt, erst die rechte Bedeutung gewinnen. Und zum Theil auch darum mag es nun zweckmässig sein, in naturwissenschaftlicher Beziehung (ohne Furcht vor jenen Fabeln der Poeten, auf welche die starken Ausdrücke des Plinius nur unsere Aufmerksamkeit hinlenken zu wollen scheinen) ganz umständlich zu sprechen:

II. Ueber das Elektron der Alten.

Der dritte Abschnitt meiner Abhandlung über Platin handelte vom „Platin unter dem mystischen Namen Elektron“ und ging von einer Stelle des Pausanias aus, worin derselbe das Elektron, welches als Naturprodukt (αὐτόματον) im Sande des Eridanus als ein (wie er ausdrücklich hervorhebt) „überaus seltenes Metall vorkommt, vom Kunstprodukt unterscheidet, das, gewöhnlich Elektron genannt, blos eine Mischung sei aus Gold und Silber [7]). Jedoch auf diese Stelle des Pausanias,

---

[6]) Die höchst beachtenswerthe Plinianische Stelle (in der h. n. XXXVII. c. 2. in fin.) bezeichnet die dem electrum angereihte Fabelmasse als einen Ausdruck der grössten Menschenverachtung. Und man glaube nicht, dass diese Aeusserung isolirt steht, sondern vergleiche damit die in meiner Einleitung in die Mythologie auf dem Standpunkte der Naturwissenschaft. S. 145—179. dargelegten Thatsachen, zu deren Zusammenstellung der Satz des Pausanias Veranlassung gab, dass die Mysterien in dem Grade höher standen als die Volksreligion, wie Götter höher sind als Heroen. In der That würde es abgeschmackt sein, sich in die durch die Mysterien herbeigeführte Verwirrung einzulassen, wenn nicht der verworrenen Schriftsprache eine ganz unzweideutige physikalische Zeichensprache (symbolische Hieroglyphensprache) zur Seite stände, deren Darlegung und Benutzung zum Zwecke der neuern Physik den Hauptinhalt ausmacht jener Einleitung in die Mythologie.

[7]) Virgil, welcher das Homerische *κασσίτερος* durch electrum übersetzt, lässt vom Vulcan für Aeneas Beinschienen machen, „ocreas electro auroque recocto“, was doch niemand übersetzen wird: „aus unreinem (silberhaltigem) Golde, gemischt mit ganz reinem Golde.“ Vielmehr

worauf ich vorzugsweise Gewicht legte, eben weil sie, im Zusammenhange gelesen, so klar ist und dennoch die daraus gewöhnlich entnommenen einzelnen Worte stets missverstanden wurden, — auf diese so umständlich, mit Beziehung auf Buttmann's Auffassungsweise, von mir besprochene Stelle des Pausanias, liess Herr Professor Schubarth sich gar nicht ein; — stellt aber, was ich darüber gesagt, in der Art dar: „Schweigger behauptet, weil das Elektron im Sande der Flüsse vorgekommen, so könne man an kein anderes Fossil als an Platinerz denken.“ Dies wird ihm aber niemand glauben, selbst wer meine Abhandlung nicht gelesen hat. Während der Abschnitt vom Elektron mit einer Plinianischen in Höfers Uebersetzung von mir angeführten Stelle „tout or est allié d'argent u. s. w.“ begonnen wurde, nimmt diese eigenthümliche Widerlegungskunst keinen Anstand in der Art zu argumentiren, als ob der Satz, dass fast alles Waschgold der Flüsse silberhaltig sei, geläugnet worden wäre. Auch sogar über die Farbe des Platins glaubt mein gelehrter Gegner mich belehren zu müssen; „Platin“, sagt er, „hat eine stahlgraue Farbe, kann hinsichtlich der Farbe nie mit Bernstein verglichen werden.“ Denn ignorirt wird wieder alles, was ich gestützt auf Buttmann's Sprachableitung des Wortes ἤλεκτρον sagte, um nachzuweisen, wie das natürlich vorkommende eisenhaltige Platin durch die magnetische Polarität, welche es zuweilen zeigt, zu diesem Namen kommen und zugleich dadurch in den Kreis der Mysterien hineingezogen werden konnte.

Da übrigens eine der wichtigsten Lehren der neueren Physik ihren Namen vom Elektron erhalten hat und selbst der Charakter der neuern Chemie durch das Wort Elektrochemie bezeichnet wird: so kann es den Physikern und Chemikern nicht gleichgültig sein, über die alterthümliche Bedeutung des Wortes ἤλεκτρον gründlich aufgeklärt zu werden. Und dazu kommt noch ein specieller Grund, den ich im Vorworte zu den neuesten, auf den Zusammenhang der Lichtpolarisation mit elektrischer und magnetischer Polarität sich beziehenden Untersuchungen Faradays (im Journ. f. prakt. Chem. B. 36. S. 473.) nur mit einigen Worten in einer Note berührte. Getrost will ich daher dem, was über Elek-

---

eben darum, damit niemand an das gemeine nachgemachte Elektron denken möge, fügt der Dichter auro recocto hinzu, was beigesetzt wurde, weil das seltene Naturprodukt electrum (woraus, wie Pausanias in obiger Stelle erzählt, eine Statue des Augustus gemacht wurde) oder das Homerische (nach Plinius dem plumbum album gleichbedeutende) cassiteros, derselben Plinianischen Stelle gemäss, ohne Beimischung anderer Metalle nicht zu benutzen ist. Auch bei Homer wird κασσίτερος, wie schon Schneider (um die gewöhnliche Uebersetzung durch Zinn zu bestreiten) hervorhebt, im stärksten Feuer erweicht und auf dem Amboss mit dem Hammer verarbeitet. — Kurz zuvor liess Virgil den Vulcan mit Beziehung auf diese Waffen des Aeneas versprechen, alles zu leisten, quod fieri ferro liquidove potest electro, wobei die Combination, wie sonst mit dem Golde, nun auch mit dem in Farbe und Härte dem (als Platin aufgefassten) electrum nahestehenden Eisen nebenbei vielleicht einige Beachtung verdient, da eben der Eisengehalt des natürlich vorkommenden Platins die magnetische Anziehung und eben dadurch den Namen electrum herbeigeführt.

tron mitgetheilt wurde, noch einiges beifügen, um zu zeigen, dass es bei einer wohlbegründeten Wahrheit leicht sei, die Beweise dafür zu vermehren. Und diese Vermehrung der Beweise wird unter den eben bezeichneten Nebenumständen, nun mehr an ihrer Stelle sein, als sie früher hätte sein können.

1. Buttmann erinnert in seiner von mir angeführten Abhandlung über Elektron: „Bei allen Lexikographen finden wir die Glosse ἤλεκτρον ἀλλότυπον χρυσίον, d. h. Gold in anderer Gestalt“ [8])

---

[8]) Suidas sagt unter χαλκολίβανον: εἶδος ἠλέκτρου τιμιώτερον χρυσοῦ· ἔστι δὲ τὸ ἤλεκτρον ἀλλότυπον χρυσίον μεμιγμένον ὑέλῳ καὶ λιθείᾳ. Hier ist ganz klar ausgesprochen, dass es eine Art Elektron gebe, die kostbarer sei als Gold, was also gewiss nicht Gold sein kann mit Silber gemischt. Höchst wunderlich wird der Zusatz scheinen, dass diese Abart des Goldes gemischt sei mit Krystall und Steinart. Erwägt man aber, dass ein Lexikograph, wie Suidas, auch mysteriöse Andeutungen abschrieb, so kann man auf die weibliche Form ἡ λιθεία Gewicht legen, indem (auf eine, wie wir nachher sehen werden, sinnige Weise), während der Stein überhaupt ὁ λίθος heisst, ἡ λίθος wo nicht geradezu den Magnet, doch stets einen durch seine Eigenschaften beachtungswerthen Stein bedeutet. Der natürlich vorkommenden eisenhaltigen Platina ist aber zuweilen etwas von der Natur jenes gleichsam mannweiblichen Steins, nämlich der Ἡρακλεία λίθος, d. h. des Magnets, beigemischt, indem sie polarische Eigenschaften zeigt, wodurch die Aufmerksamkeit der Mysterien erregt und die Benennung ἤλεκτρον herbeigeführt wurde. Auch der Zusatz ὑέλῳ stimmt zu dieser Auffassungsweise. Diess wird man schon daraus merken, dass Schneider, welcher naturwissenschaftlichen Gegenständen speciellere Aufmerksamkeit zugewandt, in seinem bekannten Schullexikon hervorhebt: „ἡ ὕαλος (sonst auch ὕελος ὁ und ἡ) bedeute in den ältesten Zeiten den Bernstein“ (soll heissen Electrum). Der Scholiast zu Aristophanes Wolken, worauf Schneider sich bezieht, macht nämlich ausdrücklich aufmerksam, dass ὕαλος in jener Aristophanischen Stelle in weiblicher Form gebraucht werde (welche allerdings Aristophanes besonders hervorhebt), und fügt dann bei, dass statt ὕαλος bei Homer und den Alten ἤλεκτρος vorkomme, ὕαλος aber in der ältern Zeit überhaupt nicht Glas, sondern Krystall bezeichnete. Und dazu stimmt eine Stelle des Plinius (Hist. nat. VIII. c. 38. sect. 57. XXXVII. c. 2. 3. 7. sect. 11. 13. und 29.), wo die Rede von Krystallen, die erwärmt an der Sonne leichte Körper anziehn. Einer, sagt er, der sogar auch Eisenfeile anziehe (was, wie er beifügt, Diokles und Theophrastus glauben) heisse lyncurion, und dieser werde von Damostratus als Electrum bezeichnet, wobei eine bestätigende Stelle des Strabo schon Harduin in seiner Ausgabe des Plinius angeführt, während auch Hesychius geradezu sagt: λυγκούριον, τὸ ἤλεκτρον. Die Indignation, womit Plinius über die dem lyncurion, den er als gemma bezeichnet, angereihten Fabeln redet, verräth, dass von einem mysteriös behandelten Krystall die Rede sei. Watson und Beckmann denken an unsern Turmalin (worüber die nöthigen Nachweisungen in meiner „Einleitung in die Mythologie“ etc. S. 156. und 366. zu finden). Diess wenigstens ist nicht zu leugnen, dass auch in neuerer Zeit der Turmalin durch seine Aschenanziehung (Aschentrecker und Ceylonischer Magnet darum genannt) selbst die roheste Aufmerksamkeit auf sich gezogen. Unter diesen Umständen wird die Stelle des Scholiasten zu Aristophanes verständlich, gleichsam als Nachklang aus den Mysterien. Mit Beziehung darauf kommt auch Bochart, der im Hierozoicon (B. III. S. 876—900 ed. Rosenmülleri) eine sehr gelehrte Abhandlung über Elektron schrieb, zu dem Resultat: „ex his quae diximus conficitur, ἤλεκτρον apud veteres tria significasse, nempe 1) succinum

Auch fügt er die Bemerkung bei, dass der Ausdruck *ἀλλοτύπον* auf die blassere Farbe des mit Silber gemischten Goldes schwerlich bezogen werden könne. Offenbar ist, nach wörtlicher Uebersetzung, ein anderer Typus des Goldes, oder Gold von anderer Bildung, von anderer Art gemeint, wie man denn lange genug auch in neuerer Zeit Platin gleichsam als eine Abart des Goldes, als weisses Gold, bezeichnet hat.

2. Nun aber entsteht die Frage, ob dieses eigenthümliche Gold von anderer Bildung und Natur, oder ob der Bernstein zuerst als *ἤλεκτρον* bezeichnet worden sei. Da in einer Stelle bei Sophokles (Antigone v. 1019) das Elektron von Sardes (das berühmt als Residenz des Krösus und wobei der Scholiast an den Gold führenden Fluss Paktolus erinnert) mit dem indischen Golde combinirt, und auch bei Homer das Elektron zwischen Gold und Silber gestellt ist, dasselbe gleichfalls bei Hesiod im Schilde des Herakles (v. 142) neben Gold und Kyanos vorkommt, so bemerkt Buttmann mit Recht: „mich dünkt, wer bei jenen ältesten Dichtern unter Elektron ausschliessend das Metall versteht, giebt zugleich zu erkennen, dass diess der ältere Gebrauch des Namens sei.“ Aber Buttmann, der auch die Autorität des Plinius (hist. nat. XXXIII. c. 4. sec. 23.) dafür hätte anführen können, dass Homer das Metall meint, wenn er vom Elektron redet, wird verlegen durch die Mythologie gemacht, deren Autorität, wie er sagt, wenigstens neben der von Homers Gedichten steht. Da nämlich das Elektron aus den Thränen der in Pappeln verwandelten Schwestern Phaethon's gebildet, so glaubt er hierbei nothwendig an die aus Bäumen ausschwitzenden Harzthränen denken und in diesem Zusammenhang Elektron durch Bernstein übersetzen zu müssen. Jedoch die Pappeln gehören nicht zu den Harz ausschwitzenden Bäumen; sie werden also in ganz anderer Beziehung hier genannt sein. Ohnehin weinen die Schwestern des Phaethon (die Heliaden) am Eridanus, jenem fabelhaften Fluss, in welchen Phaethon stürzte; und in Flüssen (namentlich im mythischen Eridanus, der vorhin angeführten Stelle des Pausanias gemäss) kommt wohl Gold und goldartiges Elektron (in kleinen Körnern, die ausgewaschen wurden), keineswegs aber Bernstein vor. Buttmann hebt späterhin selbst hervor: „Hesychius hat bei dem Wort *ἤλεκτρος* die Erklärung *μέταλλον χρυσίζον* mit dem Zusatze, man sage, es seien“ (nämlich diese goldartigen Metallkörner seien) „die Thränen der Heliaden. Und Philostratus trägt kein Bedenken, die Elektronthränen jener mythischen Pappeln Gold zu nennen.“ — Und nun wird man auch verstehn,

---

2) metallum ex auro et argento conflatum, 3) lapidem crystallinum.“ Versteht man unter *ἤλεκτρον*, der Sprachableitung Buttmann's gemäss, einen mit Anziehungskraft begabten Körper: so weiss der Physiker aus der Stelle des Pausanias, welches (durch Mischung von Gold und Silber blos nachgebildete) natürlich neben Gold vorkommende seltene Metall, und durch die angeführte Stelle des Plinius, welche krystallinischen Steine ursprünglich in den Mysterien gemeint waren. Diese letzte von Bochart sehr richtig als eine dritte angeführte Bedeutung des Wortes *ἤλεκτρον* ist übrigens in neuerer Zeit, selbst in den griechischen Wörterbüchern, gänzlich unbeachtet geblieben.

warum Homer sein (von Virgil durch electrum übersetztes) κασσίτερος mit dem Mythenkreise von **Phaethon** in Verbindung bringt.

3. Betrachten wir die Namen dieser Schwestern des Phaethon, deren Anführung hier unnöthig ist, so beziehen sich alle auf Schimmer und Glanz. Wenn also die runden, graulich weiss glänzenden Körner im fabelhaften Eridanus, in welchem der glänzende Sohn des Helios, Phaethon, sein Grab fand, wenn diese unscheinbaren kleinen Körnchen, welche dennoch Gold sind von anderer Art, als Thränen dargestellt werden der Heliaden: so sieht man leicht, dass hierdurch auf eine mysteriöse Weise das **natürliche Vorkommen des Platins** bezeichnet und dasselbe als ein Gold, das seinen heitern Glanz abgelegt, gleichsam in Trauer gehüllt ist, dargestellt werden soll. Diess wird noch klarer, wenn wir auf eine andre Variante desselben Mythus Rücksicht nehmen, worin statt der Heliaden selbst **Apollo** [9]) genannt wird, der mit

---

[9]) Um solches nachzuweisen genügen hier abgeleitete Quellen, besonders darum, damit man sehe, dass die **Urgeschichte der Physik** wenigstens in früherer Zeit höher geachtet wurde, als gegenwärtig. Ich nenne in dieser Beziehung **Philippi Caesii a Zesen coelum astronomicum, poeticum sive mythologicum stellarum fixarum. Amstel. 1662.** Denn ist es nicht unanständig für Naturforscher, in der Astronomie sich der Mythologie bei Bezeichnung der Sterne zu bedienen, und doch die dem Naturforscher allein zugänglichen naturwissenschaftlichen Mysterien des Alterthums, womit diese Bezeichnung zusammenhängt, geflissentlich ignoriren zu wollen? In dem genannten gelehrten Werke werden bei dem Sternbild **Eridanus**, S. 228—245, eine Reihe gelehrter Nachweisungen gegeben, und es heisst, nachdem von den Heliaden die Stellen der Poeten angeführt waren, S. 231: nisi potius electrum apud **Celtas**, si **Artemidoro** credimus, ex lacrymis Apollinis natum dicas, ubi indignans patrem, quod filium suum Aesculapium de quo vidimus in Serpentario, fulmine percussisset, ad Hyperboreos moestus contendit. — Auch **Gesner** in seiner gelehrten Abhandlung **de electro** (in den commentariis societatis Gottingensis. tom. III. ad annum 1753) bezieht sich auf diese Variante des Mythus S. 72. mit folgenden Worten: nondum inveni, quo auctore **Phavorinus Camers** dicat, ipsius Apollinis, h. e. Solis, lacrimas esse electra, quas profuderit cum tristis ob Aesculapii mortem ad Hyperboreos a patre reprehensus abiret, aut cum servire ob interfectos Cyclopas iussus esset. Ponentur graeca, ut eo facilius inveniantur cuius sint. Und nun führt er die griechische Stelle an. — Besonders darum aber wünsche ich die Aufmerksamkeit der Physiker auf **Gesner's** gelehrte Abhandlung über das Elektron hinzulenken, weil derselbe zum Schlusse der angeführten Abhandlung von den Fortschritten neuerer Naturwissenschaft mit der edelsten Begeisterung spricht. Denn nachdem er zuletzt auf die im Alterthum sogenannte Dioskurenerscheinung, die leuchtenden Lanzen und andere in dem Buche des **Bartholinus de luce animalium** zusammengestellte wundervolle Lichtscheine, gekommen, schliesst er mit folgenden Worten seine Abhandlung: „Dergleichen alterthümliche Nachweisungen dienen dazu, in noch glänzenderm Lichte zu zeigen jene elektrischen Experimente, welche auch in dieser Stadt, ihr theuren Collegen, zu unserer grossen Verwunderung gezeigt habt; nicht aber dazu, dem gegenwärtigen Jahrhunderte den Ruhm zu schmälern, gleichsam eine neue Welt entdeckt zu haben. Dass solches während ich lebte gelang, darüber werde ich mich stets freuen." Möchten diejenigen, welche heut zu Tage die Forschungen über Urgeschichte der Physik zu unterdrücken streben, von einem **Gesner** lernen, dass der

Gold umhüllte (ein goldenes Schwert, goldene Rüstung tragende) Apollo, dem die Gold im Norden Europas bewachenden Greife geweiht sind. Aus seinen Thränen, heisst es, bei dem Tode seines Sohnes Aeskulap entstand Elektron, d. h. jenes in kleinen abgerundeten Körnern sich darstellende gleichsam durch Trauer entstellte Gold von anderer Art. Man sieht nun, warum neben dem goldenen Dreifuss im Tempel des Delphischen Apollo und anderen goldenen Weihgeschenken auch dieses durch geheime magnetische [10]) Beziehungen in den Mythenkreis hineingezogene Gold anderer Art (ἀλλότυπον χρυσίον) nicht fehlen durfte. Und Licht wird dadurch geworfen auf das in der Abhandlung über Platina besprochene Weihgeschenk des Krösus, dessen grosse innere (d. h. mysteriöse) Bedeutsamkeit vielleicht blos durch absichtlich übertriebene, auf Aeusserlichkeiten, nämlich die Grösse der Geschenke, sich beziehende Angaben hervorgehoben und der Beachtung der Mysterienkundigen empfohlen werden sollte.

Es giebt noch eine dritte Variante vom Vorkommen und der Gestalt jenes degenerirten, gleichsam in Thränenform sich darstellenden, graulich weiss glänzenden Goldes, welche, wie Plinius mit Indignation anführt (vergl. Note 3 und 6), auf die Thränen der in Vögel verwandelten Schwestern des Meleager [11]) sich bezieht. Wir sind hier mitten in dem zugleich die Mysterien des Herakles umfassenden dioskurischen Mythenkreise, wozu uns Pli-

---

Ruhm, eine neue physische Welt entdeckt zu haben, doppelt so gross, wenn dadurch zugleich eine neue geistige aufgeschlossen wird, die, verborgen in den Mysterien, so einflussreich war auf die alte Litteratur, womit die neue zur allzueng zusammenhängt und zwar in den auf das Leben einflussreichsten Gebieten. Höchst beachtungswerth in mehr als einer Beziehung ist daher dieser schöne Ausdruck naturwissenschaftlicher Begeisterung bei jenem alten Lexikographen. Wo ist sie hingekommen, möchte man hier fragen, diese allgemeine Begeisterung für Naturwissenschaft, wie sie noch da war zu Anfang dieses Jahrhunderts? Sie ist theologischen Streithändeln gewichen, und darum gewichen, weil das ängstliche Examinationswesen (zum Theil über Dinge, welche im späteren Leben vergessen zu haben man Gott dankt) den Theologen und Philologen auf Universitäten nicht mehr Zeit lässt zu freien Studien, um die über allen Streit erhabenen, fortdauernden Offenbarungen Gottes in der Natur kennen zu lernen.

[10]) Möchte der Leser geneigt sein, im Register zu meiner Einleitung in die Mythologie das Wort Apollo aufzuschlagen und sich mit dem hierhergehörigen, dort erwähnten Bilderkreise zu befreunden.

[11]) Da die Localsage von Meleager sich dem dioskurischen Mythenkreise anschliesst, so tritt die Verwandlung in Vögel an die Stelle der im Mythenkreise des Herakles bedeutsamen Pappel (Silberpappel), in welcher Beziehung ich wieder nothwendig verweisen muss auf meine Einleitung in die Mythologie. S. 142, 234, 299, 333 und 345. Weisse Vögel spielen nämlich darum im dioskurischen Mythenkreis eine bedeutende Rolle, weil nach dem ganz naturgemässen Ausdrucke des Plinius „die Dioskuren auf den Masten der Schiffe erscheinen mit eigenthümlich tönendem Laute, wie Vögel hüpfend von Ort zu Ort.“ — Zugleich versteht man nun den Ausdruck Schwanengesang. Denn in diesem Sinne (als Symbol des Lichtes aufgefasst) singt der Schwan wirklich vor seinem Tode, und weissagend (von grosser Vorbedeutung) ist dieser Schwanengesang.

nius den Schlüssel gegeben durch einige flüchtig hingeworfene Worte über die Natur der Dioskuren und der Helena, welche ich meiner zweiten, auf diese naturwissenschaftlichen Mysterien sich beziehenden Abhandlung über Urgeschichte der Physik vor anstellte (im Jahrbuch der Chemie und Physik. 1823. oder B. XXXVII. S. 250.). Sichern Schrittes konnte ich dann weiter gehn in Erforschung jener Geheimlehren, mit Beziehung auf welche Strabo geradezu sagt, er wolle wiedersprechende Dinge zusammenstellen, gleichsam als aufzulösende Räthsel, ob vielleicht einer „die Wahrheit errathe.“ Und dennoch derselbe Plinius, von dem man ohnehin nicht wird annehmen wollen, dass er der Samothracischen Mysterien ganz unkundig gewesen, stellt sich nun an, als ob er in allen auf das Elektron sich beziehenden mysteriösen Fabeln gar keinen Sinn finden könne, und als ob hier allein vom gemeinen, keineswegs, wie er beifügt, zu den Seltenheiten gehörigen Bernstein die Rede wäre. Ja, er geht so weit, den Eridanus, von dem er schon aus dem Sternbilde wissen musste, dass er dem Fabelland angehöre (oder, wie Herodot (III. 115.) sich ausdrückt, „dem äussersten Westen, worüber nichts Zuverlässiges zu sagen sei“) als den Fluss Padus (Po) in Italien zu bezeichnen, mit dem Zusatze, dass Italien Zeugniss gebe für die Falschheit der dichterischen Angabe. Dass er aber mit so grosser Indignation von der Menschenverachtung spricht, welche in diesem, die Naturwissenschaft verschleiernden Fabelwesen liege, zeigt deutlich genug, dass er die Mysterien meine, als deren unkundig er vielleicht absichtlich erscheinen wollte, während früher auch Aeschylus, angeklagt, mysteriöse Andeutungen gegeben zu haben, blos durch die Entschuldigung seiner Unkunde sich retten konnte. Man vergesse doch nicht, dass Lucrez das Electrum nicht einmal zu nennen wagt, so grosse Veranlassung er auch hatte, auf seinem Standpunkte davon zu sprechen [12]). Ich hebe diess hervor, um den Geist zu bezeichnen, in welchem die Naturgeschichte des Plinius neu zu bearbeiten sein möchte. Die Verworrenheit der Zusammenstellungen kann mitunter (ganz so wie in der Physik des Aristoteles [13])) eine absichtliche sein, um tiefere Wahrheiten zu verbergen, die, weil sie nicht unmittelbar ausgesprochen werden durften, aus den verworrenen Andeutungen herauszusuchen sind.

---

[12]) Wie feindlich die Mysterien den Naturforschern waren, namentlich aus der Epikuräischen Schule, welcher Lucrez sich anschloss, solches habe ich durch angeführte Thatsachen, welche zugleich von Einfluss sind auf die Erklärungsweise des Lucrez, in meiner Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen S. 11. nachgewiesen. (Vergleiche auch Note 24. in vorliegender Abhandlung.)

[13]) Ich beziehe mich auf das, was in derselben Denkschrift S. 14. und 46. dem unzweideutigen Ausdrucke des Aristoteles selbst gemäss dargelegt wurde. Nebenbei bemerke ich, dass Plinius an einer andern Stelle (h. n. XXXVI. c. 4. n. 7.) bei den flüchtig hingeworfenen Worten: „Scopas fecit Venerem et Pothon et Phaethontem, qui Samothrace sanctissimis caerimoniis coluntur“ sich vertraut zeigt mit den feinsten mysteriösen Beziehungen. Denn die Bedeutsamkeit dieser Combination wird man verstehn, wenn man die Idylle Claudians auf den Magnet liest, im Zusammenhange mit dem, was darüber gesagt in meiner Einleitung in die Mythologie S. 239 und 240, womit S. 218—220 zu verbinden.

Anmerkung. *Aus dem eben bezeichneten Gesichtspunkt ist auch eine mysteriöse Sprachableitung des Wortes electrum aufzufassen, welche Plinius recht absichtlich hervorhebt, und wobei er sich auf die Autorität beruft einer Reihe alter Dichter, mit dem Zusatze, dass hier von Poeten des ersten Ranges die Rede sei: nämlich electrum appellatum quoniam Sol vocatus sit elector. Einleuchtend ist es, dass zur Vergleichung mit der Sonne keine der geltend gewordenen Bedeutungen des Wortes electrum passt, man mag an Bernstein, dessen harzartiges Ansehen doch wahrlich nicht an Sonnenglanz erinnern kann, oder an das aus Gold und Silber, sei es von der Natur oder durch Kunst gemischte Metall denken, weil statt an unreines, vielmehr an reines Gold der Sonnenglanz erinnert. Denkt man aber daran, dass die grössten Dichter des Alterthums immer die mysteriöse Bilderwelt*[14] *(d. h. symbolische Hieroglyphen) vor Augen hatten, so zeigt uns die auf Tafel II. Fig. 13. meiner Einleitung in die Mythologie abgebildete streng naturwissenschaftliche, auf einer Münze von Chios vorkommende alte Hieroglyphe den Zusammenhang zwischen elector als Sonne und electrum im Sinne der Buttmannischen Sprachableitung aufgefasst. Denn obwohl bildlich, doch ganz scharf spricht diese symbolische Hieroglyphe den Satz aus, dass die Sonne mit derselben herkulischen (d. h. magnetischen) Kraft leuchte, wodurch die neben Gold vorkommende eisenhaltige Platina zu einem Gegenstande der Mysterien geworden. Die sprachliche Verbindung der Worte electrum und elector ist also eine mysteriöse. Man muss aber jene Hieroglyphe im Zusammenhang auffassen mit dem ganzen Mythen- und Bilderkreise, worin sie in jener Einleitung in die Mythologie dargestellt ist. Dann wird man zugleich verstehn, dass diese mysteriose Sprachableitung dasselbe ausspricht, was mythisch angedeutet durch die Verwandlung der glänzenden Tochter des Helios in Pappeln, wenn man nämlich an die dem Herkules sehr sinnig geweihte Silberpappel denkt. Eben aber, weil es sich im Geiste der symbolischen Hieroglyphik nie um einzelnen isolirt stehenden Bildern, sondern von ganzen Bil*

---

[14]) Hierüber wäre, namentlich mit Beziehung auf den samothracischen Bilderkreis, vieles zu sagen nachträglich zu dem, was in meiner Einleitung in die Mythologie schon dargelegt ist, was sich aber zum Theile von selbst ergeben würde durch eine sinnige Zusammenstellung dieses Bilderkreises. Darum meinte ich, dass dieselbe den Freunden alterthümlicher Poesie willkommen sein müsse, und wünschte, dass ein Alterthumsforscher, welcher in einer Stadt lebt, wo die geeigneten Sammlungen dazu vorhanden, sich zur Herausgabe dieses Bilderkreises mit mir verbinden möge. Alle Versuche, diess zu erreichen, misslangen. Und wie viele Schriften sind seit zwanzig Jahren z. B. über Helena oder andere samothracische Wesen erschienen, ohne dass man Notiz nahm auch nur von einer möglichen streng naturwissenschaftlichen Auffassung dieses im ganzen Alterthum als naturwissenschaftlich bezeichneten Mythenkreises, geschweige von einer vorliegenden wirklich vorhandenen. — Und obwohl schon Wolf es ausgesprochen, wie wünschenswerth es wäre, die mysteriösen Beziehungen in Homer's Gedichten (worauf die berühmte Schule des Krates sich bezog) kennen zu lernen, mag nun, nachdem in diesem Geiste durch alterthümliche Nachweisung die verkannte poetische Einheit der Iliade klar dargelegt wurde, kein Philolog nur auf Prüfung der Sache sich einlassen.

derkreisen handelt (indem, wie bei jeder andern Sprache, auch bei dieser Symbolsprache alles auf den Umfang ankommt, worin man sie auffasst): so kann ich hier unmöglich ins Einzelne gehn, obwohl die Bedeutsamkeit, mit welcher Plinius jene Sprachableitung hervorhebt, es mir unmöglich machte, dieselbe ganz unberührt zu lassen. Nur diese Bemerkung ist noch anzureihen, dass dergleichen mysteriöse Wortableitungen sehr häufig, besonders bei alten griechischen Schriftstellern vorkommen. Die Wunderlichkeit derselben veranlasste die neuern Philologen zu dem Glauben, den etymologischen Theil der griechischen Grammatik besser zu verstehn, als die vorzüglichsten griechischen Schriftsteller ihn verstanden. Man übersah, dass man durch wunderliche Sprachableitungen mitunter Andeutungen den Mysterienkundigen hinsichtlich auf die der Schriftsprache unzugänglichen Dinge geben wollte. — Aber in diesem grammatischen Sinn habe ich hier auch noch etwas beizufügen zur Ergänzung einer vorhergehenden Anmerkung (Note 8), worin die Rede war von der weiblichen Form des Wortes λίθος, die stets mit Bedeutsamkeit gebraucht wird. Vorausgesetzt, dass die vorhistorische Zeit (deren Ueberlieferungen die alte Priesterschaft in Mysterien einschloss, worin noch jetzt die indische Astronomie eingeschlossen) mit dem Polaritätsgesetze [15]) bekannt war, muss es beachtungswerth scheinen, dass der Stein als Stein männlichen Geschlechtes ist (ὁ λίθος genannt); als Magnetstein aber weiblichen Geschlechtes (ἡ λίθος mit dem Zusatz Ἡρακλεία). Es ist dadurch bezeichnet, dass dieser Herkulische oder magnetische Stein männliches und weibliches Princip in sich vereine. Darum zogen in den Mysterien des Herakles Männer Frauenkleider an, womit noch andere (in dem auf Herkules sich beziehenden Abschnitte meiner naturwissenschaftlichen Mythologie S. 237 angeführte) sinnige Andeutungen zusammenhängen. Und in diesem Zusammenhange wollen wir einen Blick werfen auf den, gleich dem Magnet Polarität zeigenden, als ἤλεκτρον bezeichneten Krystall, wovon Note 8. die Rede war. Denn auf analoge Weise kommt, wie Buttmann zeigt, ἤλεκτρον, was ein Neutrum ist,

---

[15]) In dieser Beziehung stellte ich schon in meiner ersten, im Jahrbuch der Chemie und Physik von 1821 publicirten Abhandlung über Urgeschichte der Physik (welche auch in besondern Abdrücken erschien) die Zeugnisse griechischer Philosophen zusammen, woraus eine alterthümliche Kenntniss des Polaritätsgesetzes hervorgeht, und machte besonders auf die den Aegyptiern zugeschriebene Unterscheidung eines männlichen und weiblichen Feuers aufmerksam. Späterhin bot in analoger Beziehung sich die Bemerkung dar, dass die vorherrschende weibliche Form der auf das Feuer in den orientalischen Sprachen sich beziehenden Worte die Aufmerksamkeit der Grammatiker erregt (s. Journal für Chemie und Physik. B. 37. S. 314.). Entscheidend war die Zusammenstellung des dioskurischen Bilderkreises, um den Beweis zu vollenden jener Bekanntschaft des Alterthums mit dem Polaritätsgesetze. Zugleich erschienen die mannweiblichen Gottheiten, welche den Philologen und Alterthumsforschern so grossen Anstoss gegeben, mit einem Mal aus einem ganz andern Gesichtspunkte, in welcher Hinsicht ich mich auf S. 260. ff. meiner Einleitung in die Mythologie auf dem Standpunkte der Naturwissenschaft beziehe. Vergl. auch die im Register unter Magnetismus und Elektricität zusammengestellten Nachweisungen.

gleichfalls in männlicher Form, und, obwohl seltener, auch in weiblicher vor, wie z. B. **Sophokles** *in der vorhin angeführten Stelle der Antigone* ὁ ἤλεκτρος *schreibt. Noch sinnvoller wird nun die schon früher umständlich besprochene Buttmannische Ableitung des Wortes von* ἕλκειν. *Denn nun erscheint selbst die dritte neutrale Form in solcher Combination bedeutsamer, gleichsam als Vereinigung des männlichen und weiblichen Princips. Und ebenso sahen wir in der auf* χαλκολίβανον *sich beziehenden Anmerkung (Note 8), dass der Scholiast Gewicht legt auf die weibliche Form des Wortes* ὕαλος, *in sofern es in dieser* **weiblichen** *Form alterthümlich gleichbedeutend sei dem* ἤλεκτρος, *wobei er die* **männliche** *(jedoch auch* **weiblich** *vorkommende) Form gebraucht. Man sieht, wie bei der Beschränkung der Schriftsprache durch die Mysterien sogar grammatische Dinge mysteriöse Bedeutung gewinnen können. Ja selbst der Ausdruck* χαλκολίβανον [16] *(welcher wörtlich* **Erzweihrauch** *bezeichnet) kündigt sich sogleich als ein mysteriöser an. Die Sprachableitung führt uns auf ein Stammwort zurück, welches* **tröpfeln** *bedeutet* (λίβω); *also* **Erztropfen, metallische Tropfen** *sind gemeint. Was die Fabel von den Thränen des Apollo, oder der Heliaden, oder der Meleagrischen Vögel sagt, ist durch dieses Wort ausgesprochen, welches auf die* **kleinen thränenartigen Metallkörner** *hindeutet, die neben Gold im Flusssande sich finden, gleichsam als Gold anderer Art, das nach* **Pausanias** *ein äusserst seltenes Metall ist, während* **Suidas** *jenes Chalkolibanon ein* **Elektron** *nennt,* **kostbarer als Gold.** *Auf eine im Zusammenhange mit dem, was vorhin von der Form* ἤλεκτρος *angeführt wurde, beachtungswerthe Weise kommt auch der Ausdruck* χαλκολίβανος *vor, und zwar so, dass auf diese männliche Form Gewicht gelegt wird, indem es heisst:* ὁ μὲν ἄῤῥην ὀνομάζεται χαλκολίβανος ἡλιοειδής [17]. *Der Zusatz* ἡλιοειδής *(sonnenar-*

---

[16]) In neutraler Form wird dieser Ausdruck von Suidas vielleicht darum gebraucht, weil er ihn durch *ἤλεκτρον* erklärt, obwohl der Weihrauch *λίβανος* heisst und, wie wir nachher sehen werden, auch die Form *χαλκολίβανος* vorkommt.

[17]) Die ganze Stelle, welche angeführt in Salmasii exercitat. Plinian. T. II. p. 810. ist so wunderlich, dass sie mit den Worten des Salmasius hieher gesetzt werden muss: observabamus ex Graeco quodam scriptore, *χαλκολίβανον* genus esse thuris flavi et colore aureo, quem masculum alii nuncupant: *καὶ ὁ μὲν ἄῤῥην ὀνομάζεται χαλκολίβανος ἡλιοειδὴς καὶ πυῤῥός ἤγουν ξανθός.* Quae profecto mira sunt. Nam alii thus masculum definiunt *στρογγύλον καὶ λευκόν.* At auctor ille candidum thus vocat *ἀργυρολίβανος* et foemininum esse vult. Da, wie Salmasius selbst anmerkt, dieser Erzweihrauch von Suidas als *ἤλεκτρον* bezeichnet wird; so ist auf so wunderliche Weise ausgedrückt, was oben als eine grammatische Bemerkung Buttmanns angeführt wurde, dass neben der neutralen Form auch *ἤλεκτρος* vorkomme, sowohl im männlichen als weiblichen Geschlechte gebraucht. — Man sieht wie unklar und verworren die mysteriösen Nachklänge werden können, während die Grundidee sinnig war. Und selbst grammatische Beziehungen rufen also die Philologen auf, sich mehr mit Naturwissenschaft zu befreunden, als es neuerdings Sitte geworden. Nebenbei verdient es vielleicht (als ein geflissentlicher Ausdruck der Vernachlässigung) einige Aufmerksamkeit, dass Plinius in der verworrenen Stelle, welche sich auf das dem Homerischen *κασσίτερος* gleich-

tig) erinnert an die von Plinius der Beachtung empfohlene Vergleichung der Worte electrum und elector. Und wenn man auf den bei chalcolibanon hervorgehobenen hellen Glanz im Feuer Rücksicht nimmt, so scheint auch in dieser Beziehung die Vergleichung mit dem Sonnenglanze nicht unpassend. Zu leugnen ist ohnehin nicht, dass, soferne wir bei jenem Elektron, das kostbarer war als Gold, an Platin denken, dann allerdings von einem Metalle die Rede sei, welches durch hellen Glanz, Unschmelzbarkeit und Unzerstörbarkeit im Feuer sich auszeichnet.

4. Da in der vorhergehenden Abhandlung, wozu hier Nachträge zu liefern sind, die Synonymität der Worte plumbum album, cassiteros, electrum in ihrer ältesten (den Mysterien angehörigen) Bedeutung nachgewiesen wurde, und nun das, wie wir eben sahen, gleichfalls mysteriöse chalcolibanon hinzukam, so wollen wir noch bei einem andern, nach Bochart's schon vorhin (Note 8.) erwähnten, auf das Electrum sich beziehenden gelehrten Untersuchungen diesem chalcolibanon gleichbedeutenden Metalle verweilen. Der hebräische Ausdruck bei Ezechiel für ein Metall, das durch ausdauerndes helles Leuchten im Feuer sich auszeichnet, Chasmal genannt, was die Alexandrinischen Interpreten durch ἤλεκτρον übersetzen, bedeutet nämlich nach Bochart's Sprachableitung soviel als Golderz oder aurichalcum, durch welchen Ausdruck Hieronymus das in der Apokalypse vorkommende, durch gleiche Eigenschaft des vorzüglichen Glanzes im Feuer sich auszeichnende χαλκολίβανον übersetzte. Hesiod aber im Schilde des Herakles V. 122. nennt als ein Wundergeschenk des Hephästos Schienen von glänzendem Orichalkos [18]), während sie von demselben Hephästos bei Homer aus Kassiteros und bei Virgil aus Electrum gemacht werden. Der Scholiast des Hesiod hebt ausdrücklich hervor, dieses Orichalkos sei ein weisses Erz (λευκὸν χαλκῶμα), mit dem Zusatze,

---

bedeutende plumbum album bezieht, selbst die Wortform verwirrt. Da nämlich, wo er von den angereihten fabelhaften Erzählungen spricht, schreibt er cassiteron und wiederholt diese falsche Wortform selbst mit Beziehung auf Homer, wo sie nie vorkommt. Er thut diess sogleich einleitungsweise, gleichsam als wolle er schon in den ersten Zeilen, wo er anfängt von diesem Homerischen plumbum album (oder cassiteros) zu sprechen, es hervorheben, dass er den mysteriösen Fabelkreis berühre, der ihm verhasst ist.

[18]) Ὀρείχαλκος heisst eigentlich Bergerz; indem aber Hesychius zur Erklärung des Wortes beifügt χαλκὸς χρυσῷ ἐοικώς: so sieht man, dass der Hauptidee nach wirklich aurichalcum und orichalcum (was synonym auch von lateinischen Schriftstellern gebraucht wird) gleichbedeutend seien. Die Pyrenäen sollen nach Diodor von Sicilien (lib. IV. c. 35.) von einem die edlen Metalle ausschmelzenden Brand ihren Namen haben. Man sieht, dass dieselbe Beobachtung über das Vorkommen der edlen Metalle, welche neuerdings besonders bei dem Gold auf der Insel Aruba (s. Reinwardt's schöne Abhandlung über die geographische Beschaffenheit der Insel Aruba im Jahrb. der Chemie und Physik. 1827. der ganzen Reihe B. 51. S. 330 ff.) und bei Gold und Platina in Sibirien sich darbot, auch dem Alterthume nicht entgangen war. In geognostischer Beziehung (worauf im Sinne der Wernerschen Theorie schon vorhin in der Einleitung aufmerksam gemacht wurde) gab es also wirklich ein goldenes Zeitalter.

dass einige sagen, es sei eine metallische Materie, kostbarer als Erz, welche nun nicht mehr gefunden werde. Und auch Plato im Kritias (Steph. ed. S. 114. e.) spricht es vom Naturprodukt Orichalkos aus, dass es blos dem Namen nach bekannt sei, vormals aber auf der (nur dem Namen nach bekannten) Insel Atlantis gefunden wurde, und dort, mit Ausnahme des Goldes, das kostbarste gewesen sei unter allen Metallen. Plato unterscheidet also bei dem Orichalkos das ältere Naturprodukt vom späteren Kunstprodukte, ganz so wie Pausanias mit Beziehung auf Elektron es that in der Stelle, von welcher wir ausgingen. Dieses ältere Naturprodukt hatte offenbar auch Virgil im Sinne, indem er (Aen. XII. 87.) das album orichalcum an Gold anreiht. — Bekannt genug aber ist es, dass man späterhin ein dem Golde wenigstens in der Farbe ähnliches Metallgemisch im Messing dargestellt, und dieses Messing ὀρείχαλκος oder aurichalcum genannt. Es ist also auch hier wieder, wie bei cassiteros und plumbum album, eine ältere mysteriöse und eine spätere profane Bedeutung des Wortes zu unterscheiden. Besonders beachtungswerth ist daher die Stelle des Scholiasten zu Apollonii Argonaut. IV. 973, welche wörtlich übersetzt also lautet: „Aristoteles sagt, in den Mysterien werde Orichalkos weder mehr genannt noch gezeigt; andere sagen, es werde wohl genannt, sei aber nicht mehr vorhanden. Aber zu den eitlen Angaben gehört auch diese; denn die mehr Unterrichteten sagen, es sei vorhanden“ [19]).

5. Fassen wir das bisher Dargelegte zusammen, so geht daraus hervor (was man auch schon ausgesprochen findet in der neuen Ausgabe des Thesaurus ling. gr. von Stephanus unter χαλκολίβανον), dass jenes alte Naturprodukt Orichalkos, welches als weisses Erz bezeichnet wird, gleichbedeutend sei dem Chalkolibanon. Von diesem aber sagt Suidas, es sei ein Elektron, kostbarer als Gold, während Plato, zu dessen Zeiten jenes alte Naturprodukt nicht mehr zu haben war, angiebt, dasselbe sei in der verlorenen Atlantis (worunter einige unser Amerika verstehn) vorgekommen, und habe dort den nächsten Preis nach Gold gehabt. Statt der Atlantis nennt Herodot (III. 115.) den noch unerforschsten „äussersten Westen“ als

---

[19]) Diese Stelle wird den Physikern interessant sein, indem sie einen neuen Beweis liefert, dass es sich von naturwissenschaftlichen Dingen in den alten Mysterien handelte. Beckmann, der in seinen Beiträgen zur Geschichte der Erfindungen B. II. S. 364—391 über die Geschichte der Naturaliensammlungen schrieb, lässt nicht unerwähnt, dass die alterthümlichen Tempel auch zur Aufbewahrung von Naturmerkwürdigkeiten benutzt wurden. Ganz nahe lag ihm also der Gedanke, dass dergleichen in Tempeln niedergelegte Sammlungen von Naturmerkwürdigkeiten nicht ohne Beziehung bleiben konnten zu den Mysterien, was in obiger Stelle des Scholiasten deutlich ausgesprochen, die ihm jedoch entgangen. Auch Lobeck in seinem Buch über die Mysterien übergeht diese Stelle, was um so weniger zu billigen, da Bochart in der Abhandlung über Elektron (Hierozoicon nach Rosenmüller's Ausg. S. 892.) sie anführt. Eben darum scheint es zweckmässig, sie im Original hieher zu setzen: Ἀριστοτέλης δὲ ἐν τελεταῖς φησὶ, μηδὲ ὑπάρχειν τὸ ὄνομα, μηδὲ τὸ τούτου εἶδος· τὸ γὰρ ὀρείχαλκον ἔνιοι ὑπολαμβάνουσι λέγεσθαι μὲν, μὴ εἶναι δέ· τῶν δὲ εἰκῆ διαδεδομένων καὶ τοῦτο· οἱ γὰρ πολυπραγμονέστεροι φασὶν αὐτὸν ὑπάρχειν.

Fundort des Elektrons. Origenes [20]) aber sagt, ebenso wie Suidas, dieses Elektron sei noch kostbarer als Gold. Und vom verschwenderischen Kaiser Elagabal erzählt sein Geschichtschreiber Lampridius: „er bestreute seinen Porticus mit Staub von Gold und Silber, bedauernd, dass er es nicht auch könne mit dem von Elektron (scobe auri porticum stravit et argenti, dolens quod non posset et electri).“ Offenbar kann auch in dieser letzten Stelle niemand bei Elektron an die Mischung aus Gold und Silber denken, weder an die natürlich vorkommende noch an die künstlich gebildete. Das seltene in Tempelmuseen aufbewahrte Gold anderer Art ist hier also gemeint, welches seiner magnetischen Eigenschaften wegen Elektron hiess, und eben darum (gleich dem in alten ägyptischen Tempeln eine bedeutende Rolle spielenden Magnet) als Gegenstand der Mysterien behandelt und wirklich noch in späterer Zeit, wie der Scholiast des Apollonius ausdrücklich sagt, den mehr unterrichteten Eingeweihten gezeigt wurde.

6. Wollen wir zum Schlusse noch einen Ueberblick über die Gründe geben, welche, wie eben bemerkt, dafür sprechen, dass vorzüglich die magnetischen Eigenschaften jenes Goldes anderer Art (oder der natürlich vorkommenden Platina) die Aufmerksamkeit der Mysterien auf sich gezogen haben. Dafür spricht, wie gesagt, schon der Name Elektron, welcher sonst keinen Sinn haben würde, obwohl er, für das ursprüngliche Naturprodukt passend, späterhin auch dem Kunstprodukt angereiht werden konnte. Mit Beziehung auf diese Polarität (Mannweiblichkeit der *Ἡρακλεία λίθος*) erscheint es sinnig, dass auch *ἤλεκτρος* (in männlicher und weiblicher Form) vorkommt, was gleichfalls gilt von dem ihm gleichbedeutenden *χαλκολίβανον* (Erztropfen kostbarer als Gold). Eben dieselbe magnetische Beziehung ist angedeutet durch den vorhin (Note 8.) besprochenen mysteriösen Ausdruck des Suidas [21]), dass diesem Gold anderer Art, oder Elektron, etwas beigemischt sei vom (magnetischen) Stein und (elektrischen) Krystall. Klarer ist dasselbe ausgedrückt durch die von Plinius mit Beziehung auf das Zeugniss der ersten Dichter hervorgehobene Vergleichung der Worte electrum und elector (Sonne), wenn wir nämlich daran denken, dass Herkules als Sonnensymbol galt, und dass die S. 139. erwähnte symbolische Hieroglyphe es ganz klar ausspricht, dass eine herkulische (d. h. magnetische) Kraft in der Sonne leuchte. Neben diesen und andern, schon vorhin auch mit Beziehung auf die Verwandlung der Heliaden in Pappeln (die dem Herkules geweiht) umständlicher besprochenen mysteriösen Bezeichnungen der magnetischen Eigenschaft jenes Elektrons, das seltener und kostbarer war als Gold, ist aber auch eine unverkennbare

---

[20]) Origenes Homil. XI. (ed. Delarue tom. III. p. 191): *λέγεται γάρ τὸ ἤλεκτρον χρύσου εἶναι τιμαλφέστερον.* Bochart sagt a. a. O. S. 883: Origenes atque Hieronymus electrum non solum argento, sed et auro pretiosius esse volunt. Ich gestehe, dass ich einen so klaren Ausspruch, wie der vorliegende des Origines ist, bei Hieronymus nicht finden konnte, während bei Bochart das Citat fehlt. Aber nach so vielen Zeugnissen kommt auf eines mehr oder weniger nichts an.

[21]) Buttmann geht, um seine vorausgesetzte (nur uns, wie er sagt, widersinnig scheinende) alterthümliche Vergleichung des Bernsteins mit dem Golde festzuhalten, bei dieser Stelle des Suidas so weit in sei-

Hindeutung auf denselben Magnetismus nicht zu übersehn, welche in der magischen Kette des gallischen Herkules liegt. Lucian widmete diesem gallischen Herkules eine besondere kleine Schrift und hebt dabei die zarte Kette aus Gold und Elektron hervor, womit derselbe eine Menge Volks nach sich zieht, das ihm willig und heiter, ja ihm entgegeneilend, folgt. Die Nebenbeziehungen zeigen, dass Herkules (der bekanntlich auch im griechischen Mythus dem Hermes verwandt) hier als Gott der Beredsamkeit aufgefasst sei. Und wenn Plato in einer schönen Stelle seines Ion die ergreifende Kraft der begeisterten Rede mit der ergreifenden des Magnets vergleicht, welcher nicht blos an sich zieht, sondern (wie bei den samothracischen eisernen Ringen) dem Angezogenen auch die Kraft giebt, auf gleiche Weise anziehend fortzuwirken: so drückt jene magische Kette aus Gold und Elektron offenbar dasselbe aus. Die magnetische Kraft jenes Goldes anderer Art, das in jener Kette mit dem gemeinen Golde combinirt, ist also hier, wenn gleich durch ein mysteriöses Symbol, doch in der That deutlich genug bezeichnet.

7. Dass ausser der magnetischen Eigenschaft jenes, als seltenes Naturprodukt vorkommenden Goldes anderer Art (welche Ansicht des Platins auch in neuerer Zeit den Namen des weissen Goldes herbeigeführt) selbst das specifische Gewicht desselben bei einem Weihgeschenke des Krösus für den delphischen Apollo ganz annähernd so bezeichnet sei, wie es das Platin im Verhältnisse zu Gold wirklich zeigt, davon war schon in der Einleitung und umständlicher in der frühern Abhandlung die Rede, woran die gegenwärtige sich anschliesst. Man glaubte, jene Stelle des Herodot corrigiren zu müssen, in der vorgefassten Meinung, bei weissem Golde habe man im Alterthume lediglich an eine Mischung aus Gold und Silber gedacht. Dann aber wäre es höchst überflüssig gewesen, dieselbe Mischung auch mit dem Namen Elektron zu bezeichnen, auf eine ganz bedeutungslose Weise. Aber wenn man eine Mischung aus Gold und Silber weisses Gold nannte: so kann man unmöglich zweifeln, dass auch das seltene goldartige Metall, welches man, wie Pausanias sagt, durch diese Mischung aus Gold und Silber nachzuahmen suchte, den Namen des weissen Goldes wird erhalten haben. Letzteres gehörte, wie nachgewiesen wurde, den Mysterien an, und wurde aufbewahrt in Tempelmuseen, und noch in späterer Zeit den Eingeweihteren gezeigt (Note 19). Dass aber bei einem Weihgeschenke für den Tempel des Delphischen Apollo mysteriöse Beziehungen nicht fehlen konnten, und also schon darum, wenn weisses Gold auf eine so bedeutsame Weise, wie es von Krösus geschehn ist, geweiht wurde, an jenes mysteriöse weisse Gold (oder Elektron) zu denken sei, solches wird man wohl zugeben, besonders wenn man erwägt, dass die Fabel von der Entstehung jenes kostbaren Elektrons (zur Bezeichnung der Art seines Vorkommens) sich an die Thränen der Heliaden, ja des Apollo selbst anschloss.

---

nen willkürlichen Annahmen, dass er sagt: „nämlich durch solche Zumischung anderer Naturen, gleichsam durch eine Art Vererzung, erklärte man sich die von dem wirklichen Gold abweichenden (dem unwissenschaftlichen Menschen zufälligen) Eigenschaften, wie die Gebrechlichkeit, die Leichtigkeit, die Durchsichtigkeit.“

Erwägt man nun, dass Herodot auch in anderen Fällen Unglaubliches recht absichtlich erzählt, blos um auf eine mysteriöse Beziehung die Aufmerksamkeit der Mysterienkundigen (für welche man zunächst schrieb) hinzulenken [22]: so erhält die schon vorhin ausgesprochene Vermuthung Wahrscheinlichkeit, dass in der absoluten Zahlbestimmung, welche Herodot angiebt, eine absichtliche Uebertreibung liege, um durch Uebertreibung von Aeusserlichkeiten auf die innere mysteriöse Bedeutung des Weihgeschenkes aufmerksam zu machen. Zu der hervorzuhebenden mysteriösen Beziehung gehörte aber das relative Gewicht des weissen Goldes, wodurch eben das mysteriöse weisse Gold von der profanen Nachahmung sich wesentlich unterschied. Dankeswerth ist es, dass Herr Professor Schubarth durch Rechnung nachgewiesen, es werde nicht einmal weisses Gold, sondern vielmehr grün gefärbtes erhalten, wenn man den Herodot so corrigirt, wie Matthiä ihn corrigirte. Um so mehr ist diese Correctur nun wieder hinwegzustreichen aus allen neueren Ausgaben, in welche sie sämmtlich übergegangen. Gewiss aber wird nun kein Philolog mehr geneigt sein, eine neue willkürliche Conjectur an die Stelle zu setzen.

8. Erwägen wir, dass Gold und Platin vorzugsweise vorkommen im zerklüfteten Erdreich, wo von der Natur die Ausschmelzung und Auswaschung im Grossen vorgenommen: so wird, wie schon einleitungsweise erwähnt, als sehr wohlbegründet die Ansicht Werner's erscheinen, dass es in geognostischer Hinsicht wirklich ein goldenes Zeitalter gab, wo in bedeutender Menge die verschwenderisch verbrauchten edlen Metalle (als Orichalkos) umherlagen auf der Erde. Höchst wahrscheinlich also muss es schon darum scheinen, dass die Alten nicht einzig und allein auf die Kenntniss von Gold und Silber beschränkt waren, sondern noch andere gediegen vorkommende Metalle, wie Platin und Palladium, kennen gelernt. Mit Beziehung auf Palladium habe ich diess, wie in der Einleitung angeführt wurde, in jener frühern Abhandlung, woran die gegenwärtige sich anschliesst, wahrscheinlich gemacht; hinsichtlich auf Platin aber ist solches nun durch die dargelegten alterthümlichen Zeugnisse vollkommen erwiesen. Diese dargelegten Zeugnisse gestatten zugleich einen Blick in den Geist der alten naturwissenschaftlichen Mysterien. Schon in der Abhandlung Gesner's über Elektron findet man es nicht ohne Befremden des Verfassers hervorgehoben, dass in allen Schriften Cicero's nicht einmal das Wort electrum vorkommt, ohnerachtet die Tempelräubereien des Verres vielleicht hätten Veranlassung geben können zur Erwähnung desselben. Eben so wenig, fügt Gesner bei, ist vom Electrum die Rede bei Lucrez, obwohl er da, wo er vom

[22]) Ein unleugbares Beispiel der Art, nämlich einer bis ins Sinnlose gehenden Uebertreibung, welche Herodot sich erlaubt, um eine nun auch uns verständliche mysteriöse Andeutung hinsichtlich auf den Grund der Katzenverehrung in Aegypten zu geben (da in der Schriftsprache mit Klarheit davon zu sprechen die Tyrannei der Mysterien unmöglich machte) ist umständlich dargelegt in meiner Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen (S. 35. und 54.), welche eben auf diese Beschränkung der Schriftsprache bei allen mysteriösen Dingen sich bezieht; eine Beschränkung, die so weit ging, dass die schriftliche, auf Mysterien sich beziehende Ueberlieferung uns blos verwirrt, während allein die symbolische Hieroglyphe Aufklärung giebt. (Vergl. die vorhergehende Note 6.)

Magnet sprach, eigentlich nicht wohl davon schweigen konnte (vergleiche Note 12); und auch bei Seneca, dessen quaestiones naturales Gelegenheit genug darboten, kommt nichts vom Electrum vor. Was bei den Griechen zu finden, sind mysteriöse Fabeln. Plinius wirrt diese sogenannten dichterischen Fabeln mit dem Ausdrucke der Indignation zusammen, zufrieden, wie es scheint, unter dem Gewirre mitunter ein bedeutendes Wort verstecken zu können [23]). Da aber Plinius von medicinischer Wirksamkeit des

---

[23]) Ein Beispiel der Art ist in meiner Einleitung in die Mythologie S. 141. und 364. angeführt. Gesner nahm auf dem Standpunkte der Physik seiner Zeit besonderes Interesse an folgender Stelle des Plinius (h. n. XXXIII. c. 4. sect. 23.): nativum electrum venena deprehendit; namque discurrunt in calicibus arcus coelestibus similes cum igneo stridore. Diese letzten Worte hatten in der Periode jener neuen Wunderwelt der Reibungselectricität die Aufmerksamkeit des berühmten Philologen auf sich gezogen. Und in der That könnte man damit in Verbindung bringen, was Plinius gleichfalls nur flüchtig hinwirft: Philemon ait flammam reddi ab electro, und was in der angeführten Stelle meiner Einleitung in die Mythologie schon im Zusammenhange aufgefasst mit einer Angabe des Festus vom Reiben einer sogenannten felix materia im Tempel der Vesta, und von der Erregung eines plötzlichen Bebens (Panischen Schreckens) am ganzen Körper in demselben Tempel, gemäss einer Erzählung des Tacitus (wovon ebendas. S. 167. die Rede). Und in solchem Zusammenhange könnte es scheinen (da venenum auch Zauberei bezeichnet), der geheime Sinn jener angeführten Stelle des Plinius sei: Electrum (dessen Anziehungskraft, wie derselbe Plinius sagt, schon die syrischen Frauen bei ihren damit gezierten Spindeln beobachtet) entdecke Zauberei (nämlich die im Tempel der Vesta) durch mit Geräusch überspringende, selbst farbig leuchtende Funken, welche Funken ganz entschieden im Alterthum an Katzen u. s. w. beobachtet wurden, worüber a. a. O. S. 313. f. Nachweisungen zu finden. Liest man jedoch jene oben angeführte Stelle des Plinius im Zusammenhange: so sieht man, dass dort nicht einmal vom Bernstein, sondern vom Metall Electrum die Rede ist, welches Plinius als eine Mischung aus Gold und Silber bezeichnet, obwohl mit Anreihung mysteriöser, ein Weihgeschenk der Helena betreffender Beziehungen, denen die oben angeführte Stelle sich anschliesst, wodurch offenbar das nativum electrum als wesentlich verschieden von dem künstlich gebildeten bezeichnet ist. Man müsste also, und diess war vielleicht Gesner's Meinung, gemäss der Art, wie man die Compilationen des Plinius auffasst, an ein gänzliches Missverstehen denken von Seiten des Plinius entweder oder eines seiner Freigelassenen, den er vielleicht bei seinen Compilationen benützte. Und zu so groben Missverständnissen konnte wohl ein gleich der Physik des Aristoteles absichtlich dunkel geschriebenes Buch Veranlassung geben; wenn man nicht sagen will, Plinius sei mitunter von demselben Princip ausgegangen, wie Aristoteles in seiner Physik, oder der durch seine Dunkelheit im Alterthume berühmte Heraklitos, und habe sich namentlich in obiger Stelle so benommen, wie Herodot in einem analogen Falle, wovon in vorhergehender Note 22. die Rede war. — Dann aber muss man eingestehn (was eben in dort erwähnter Denkschrift nachgewiesen), dass die ganze schriftliche Ueberlieferung bei allen mysteriösen Dingen keine Erkenntnissquelle sei. Wenigstens kein Physiker könnte auf das Gewirre von Missverständnissen und Fabeln sich einlassen, wenn nicht die ganz scharf bezeichnende symbolische Hieroglyphe einen interessanten Weg der Untersuchung darböte, worauf man sichern Schrittes fortgehn kann. Man vergesse aber nicht, dass selbst die grosse Pyramide zu Memphis in symbolischer Hieroglyphensprache zu uns redet, indem Jomard nachgewiesen, dass in den Dimensionen derselben eine vor-

Electrums spricht, so war für Gesner auch dies besonders befremdend, dass selbst die Aerzte, wie Celsus, Scribonius, Galen, das Electrum gar nicht einmal nennen, während Dioskorides so flüchtig darüber hingeht, und so verwirrt sich ausdrückt, dass er, wie Gesner sagt, in der ersten Hälfte des Perioden vom Metall Electrum, in der letztern vom Bernstein zu reden scheint [24]).

(Fortsetzung folgt.)

---

historische Gradmessung niedergelegt sei. Jedoch in unserer alexandrinisch grammatischen Zeit ignorirt man eben darum den ganzen siebenten Band der Déscription de l'Egypte, welcher einzig und allein diese eben so mathematisch streng als philologisch gelehrt geschriebene Abhandlung enthält. Wenn man aber in allen Schulen lehrt und auf alle Karten der alten Geographie schreibt, dass 600 ägyptische (oder olympische) Fuss ein Stadion, und 600 Stadien einen Erdgrad betragen, folglich der ägyptische Fuss ein aliquoter Theil des Erdgrades ist, und zwar der 360000ste: so sagt man im Grunde dasselbe, was Jomard nachgewiesen durch die genauester Messungen der grossen Pyramide von Memphis; aber nicht dieser allein (vgl. Einleitung in die Mythologie. S. 362). Nebenbei ist nicht zu übersehen, was schon Bailly in der Geschichte der alten Sternkunde. B. 2. S. 50—52 von der grossen astronomischen Bedeutsamkeit der Zahl 600 mit Beziehung auf die Rechnungen des Dominicus Cassini anführt. — Und nun frage man sich, was da liegt in einer Gradmessung, welche an Genauigkeit die aus der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts übertrifft, ja ganz streng gilt für den mittlern ägyptischen Erdgrad. — Und diess ist die mathematische Basis der physikalischen Hieroglyphen, worauf allein eine Urgeschichte der Physik sich gründen lässt, während die schriftlichen Ueberlieferungen dabei blos von untergeordneter, secundärer Bedeutung. — Von vorhistorischen Dingen handelt es sich hier, wie bei den ägyptischen Pyramiden, wesswegen Plato auf zehntausend Jahre zurückgehn zu müssen glaubt, vom Urtypus der ägyptischen Bilderwelt sprechend (s. Einl. in d. Mythol. S. 126.); und Herodot (II. 43.) bei Aufsuchung der Grundidee des Herakles sogar auf 17000 Jahre zurückkommt, d. h. jede historische Forschung ausschliesst. Und erwägt man, dass jede wahre Religion nicht dem Zeitlichen, sondern dem Ewigen nachstrebt, sich daher bezieht auf ewige Wahrheiten, wozu auch die unendliche Offenbarung Gottes in der Natur gehört: so muss es höchst erfreulich sein, die Weisen des Alterthums sich erheben zu sehn über die den Naturwahrheiten in der Volksreligion traditionell untergeschobenen historischen Beziehungen.

[24]) Ebenso beachtungswerth ist das Schweigen aller Naturforscher des Alterthums von Meteorsteinen, deren Herabfallen (wovon die Historiker Zeugniss geben), so wenig ein Mensch damals bezweifelte, dass sogar Tempel gebaut wurden, wo sie herabgefallen waren, während man Götterbilder darauf zu finden glaubte. Umständlicher ist davon die Rede in der Einleitung in die Mythol. auf d. Standp. d. Naturwissensch. S. 150. Auch Chladni's Aufmerksamkeit hatte es schon erregt, dass vom Bilde der Göttermutter bei drei Meteorsteinen die Rede, welche er anführt (siehe Chladni über Feuermeteore. S. 181. Note). — Und blickt man die als Nachtrag zu Chladni's Werk erschienenen Meteorsteinabbildungen von Schreibers an: so sieht man, dass die rasche Schmelzung der Oberfläche jener Meteormassen allerdings Zeichnungen von Pflanzen, ja von Thier- und Menschen-ähnlichen Gestalten veranlasste, und man begreift, wie man durch diesen Meteorcultus zur Nachbildung von Ungestalten, ja zu Thier- und Pflanzen-Verehrung veranlasst werden konnte, welche bekanntlich von localer Bedeutung war.

XVI.

Ueber quadrirbare Figuren auf cylindrischen Flächen.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Cylindrische Flächen heissen bekanntlich diejenigen Flächen, welche eine Gerade beschreibt, wenn sie über irgend eine gerade oder krumme Linie im Raume (die Direktrix) so hingleitet, dass sie während dieser Bewegung immer in einer und derselben Richtung, oder, was auf das Nämliche hinauskommt, einer gegebenen Geraden im Raume parallel bleibt. Wir können dabei, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, immer voraussetzen, dass die Direktrix eine Curve einfacher Krümmung und die Richtung der gleitenden Geraden senkrecht auf der Ebene der Direktrix sei; denn wenn diess auch ursprünglich nicht der Fall sein sollte, so kann man die Cylinderfläche mit einer auf ihrem Mantel (d. h. der Richtung der gleitenden Geraden) senkrechten Ebene durchschneiden und jetzt die entstandene Durchschnittscurve, die immer einfacher Krümmung ist, als neue Direktrix ansehen. Legt man in die Ebene dieser Direktrix zwei sich rechtwinklich schneidende Coordinatenachsen und stellt in den so bestimmten Anfangspunkt der Coordinaten die dritte Coordinatenachse senkrecht auf die Ebene der Direktrix, so fällt die Richtung dieser Achse mit der Richtung der gleitenden Geraden zusammen und zugleich nimmt die Gleichung der Cylinderfläche eine Form an, deren Einfachheit die Basis der nachherigen Untersuchung bildet.

Seien in Taf. IV. Fig. 1. OX, OY, OZ die drei rechtwinklichen Coordinatenachsen und stelle XQZ die Direktrix vor, so muss zuerst die Natur derselben durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten $OM=x$, $MQ=z$ bestimmt sein, welche in dem allgemeinen Schema

$$z=f(x) \tag{1}$$

enthalten ist. Ziehen wir von Q aus eine Gerade $QP \parallel OY$, so

liegt dieselbe nach den vorhin gemachten Voraussetzungen ganz in der Cylinderfläche, und wenn wir von dem beliebigen Punkte P das Perpendikel PN herablassen, so sind jetzt $OM = x$, $MN = y$, $NP = MQ = z$ die drei Coordinaten von P. Eine Relation zwischen denselben (die Gleichung der Cylinderfläche) besteht hier in der blosen Bemerkung, dass wie früher $z = f(x)$ sein muss, ausserdem aber y ganz willkührlich genommen werden darf; die Gleichung der fraglichen Fläche:

$$z = f(x),\ y \text{ ad libitum}$$

unterscheidet sich also von der Gleichung der Direktrix nur durch den Zusatz, dass noch eine dritte, aber willkührliche, Coordinate vorhanden ist. Dieser Umstand bringt eine grosse Erleichterung in die Quadratur solcher Flächen, welche nach der allgemeinen Formel

$$S = \iint \partial x\, \partial y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

zu bewerkstelligen wäre, worin $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ die partiellen Differenzialquotienten sind, welche man durch Differenziation der Gleichung $z = F(x, y)$ der zu quadrirenden Fläche erhält. Da nämlich in unserem Falle z zwar von x, aber nicht von y abhängt, so wird für die cylindrischen Flächen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x),\quad \frac{\partial z'}{\partial y} = 0$$

und mithin einfacher

$$S = \iint \partial x\, \partial y \sqrt{1 + [f'(x)]^2}. \tag{2}$$

Man übersieht auf der Stelle, dass sich hier die Integration nach y sogleich ausführen lässt, weil in dieser Beziehung nur ∂y zu integriren ist, was y giebt, und dass sich folglich die doppelte Integration auf eine einfache reduzirt; doch bevor wir diess genauer ansehen, wollen wir die Gränzen der Integrationen nach x und y bestimmen. Denken wir uns in der Ebene XY zwei beliebige gerade oder krumme Linien FRH und GSK, und ausserdem von zwei beliebigen Punkten A und B der Achse OX aus Gerade $\parallel OY$ gezogen, so bestimmen diese vier Linien in der Coordinatenebene XY eine viereckige Figur $FGKH$; von jedem Punkte ihrer Peripherie aus lassen wir eine Gerade $\parallel OZ$ aufsteigen, alle diese Geraden durchschneiden die Cylinderfläche, und die so entstehenden Durchschnittspunkte bilden in ihrer Continuität auf der Cylinderfläche wieder eine Art Viereck $TUWV$, von welchem das erstgenannte $FGKH$ die Projektion ist. Die Fläche $TUWV$ sei nun diejenige Figur, welche mittelst der Formel (2) quadrirt werden soll, was offenbar wegen der Unbestimmtheit der Curven FRH und GSK die allgemeinste Voraussetzung ist. Was nun die Integrationsgränzen für x und y betrifft, so erhellt, dass es blos darauf ankommt, x und y so zu wählen, dass der Punkt N (die Pro-

jektion von P) keine anderen Stellen der Ebene XY betreten kann als diejenigen, welche in der Figur $FGKH$ (der Projektion von $TUWV$) enthalten sind. Der Spielraum des Punktes M ist aber offenbar die Strecke AB und folglich sind $x=OA$ und $x=OB$ die Gränzen für x, wobei zur Abkürzung $OA=\alpha$ und $OB=\beta$ sein möge. Da ferner der Punkt N immer zwischen den Curven FH und GK bleiben muss, so sind MR und MS die Gränzen für $y(MN)$. Wenn aber die Aufgabe bestimmt sein soll, so müssen die Curven FRH und GSK ihrer Natur nach bekannt, also ihre Gleichungen gegeben sein; nennen wir ξ und η die rechtwinklichen Coordinaten eines Punktes der Curve FRH, wobei die ξ von O aus auf OX gezählt werden, so sei $\eta=\varphi(\xi)$ die Gleichung der Linie FRH, ebenso $\eta'=\psi(\xi)$ die von GSK, wenn η' das für letztere Curve ist, was η für die erstere. Setzen wir an die Stelle des beliebigen ξ die Linie $OM=x$, so folgt $\eta=MR=\varphi(x)$ und $\eta'=MS=\psi(x)$, und demnach sind $\eta=\varphi(x)$ und $\eta'=\psi(x)$ die Gränzen für y. Durch Substitution der Gränzen für x und y wird jetzt nach Formel (2)

$$S=\int_\alpha^\beta \partial x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\int_\eta^{\eta'}\partial y,$$

oder, weil

$$\int_\eta^{\eta'}\partial y=\eta'-\eta=\psi(x)-\varphi(x)$$

ist:

$$S=\int_\alpha^\beta \partial x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\{\psi(x)-\varphi(x)\}, \qquad (3)$$

wobei also

$z=f(x)$ die Gleichung der Direktrix XQZ,
$y=\varphi(x)$ „ „ „ Curve FRH,
$y=\psi(x)$ „ „ „ „ GSK,
$\alpha=OA,\ \beta=OB,\ S=TUWV$

ist. Da das Integral in (3) ein einfaches ist, so wird es immer möglich sein, den Werth desselben zu finden, sei es durch Reduktion auf eine bekannte Funktion oder durch Verwandelung in eine unendliche Reihe. In den Fällen aber, wo sich unser Integral auf eine von denjenigen Funktionen bringen lässt, für welche man Tafeln besitzt, wollen wir die Figur $TUWV$ eine **quadrirbare** nennen und nun einige Spezialisirungen der Art betrachten.

I. Sei $z=\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, also der Cylinder ein elliptischer, dessen Achsen a und c in den Coordinatenachsen OX und OZ liegen, so wird

$$1+[f'(x)]^2=1+\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{a^2-x^2}=\frac{a^4-(a^2-c^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)},$$

und folglich nach no. (3)

$$S=\frac{1}{a}\int_{\alpha}^{\beta}\partial x\sqrt{\frac{a^4-(a^2-c^2)x^2}{a^2-x^2}}\{\psi(x)-\varphi(x)\}. \quad (4)$$

Unter den verschiedenen Suppositionen nun, welche man hier für $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ machen kann, heben wir die folgenden als bemerkenswerth heraus.

a. Der einfachste Gedanke ist offenbar, $\varphi(x)=Ax^\mu$ und $\psi(x)=Bx^\mu$ zu nehmen, wobei μ eine ganze Zahl bedeuten möge. Diess gäbe dann

$$S=\frac{B-A}{a}\int_{\alpha}^{\beta}x^\mu\,\partial x\sqrt{\frac{a^4-(a^2-c^2)x^2}{a^2-x^2}} \quad (5)$$

und hier sind zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich μ gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle kann durch Rationalmachen des Zählers in der Differenzialformel das Integral auf die Form

$$\int\frac{x^\mu[a^4-(a^2-c^2)x^2]\,\partial x}{\sqrt{[a^2-x^2][a^4-(a^2-c^2)x^2]}},$$

also überhaupt auf Integrale folgender Gestalt

$$\int\frac{x^\nu\,\partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)(h^2-k^2x^2)}}$$

gebracht werden, wobei ν eine gerade Zahl ist. Das vorliegende Integral lässt sich aber nach bekannten Reduktionsformeln auf elliptische Funktionen zurückbringen *). Anders dagegen wird die Sache, wenn in no. (5) μ eine ungerade, folglich $\frac{\mu-1}{2}$ eine ganze Zahl ist. Denn in diesem Falle kann man dem Integrale folgende Gestalt geben:

$$S=\frac{B-A}{2a}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x^{\mu-1}2x\,\partial x\,[a^4-(a^2-c^2)x^2]}{\sqrt{(a^2-x^2)\,[a^4-(a^2-c^2)x^2]}};$$

und setzt man hier $x^2=a^2u$, so wird $2x\,\partial x=a^2\partial u$, $x^{\mu-1}=a^{\mu-1}u^{\frac{\mu-1}{2}}$; wenn ferner $x=\alpha$ und $x=\beta$ geworden ist, so hat u die Werthe

$$u=\frac{\alpha^2}{a^2}=\alpha',\ u=\frac{\beta^2}{a^2}=\beta' \quad (6)$$

angenommen, wobei α' und β' zur Abkürzung gebraucht worden sind. Durch diese Substitutionen geht unsere Gleichung in die folgende über:

---

*) Legendre traité des fonctions elliptiques Chap. I. — Supplemente zu Klügels math. Wörterb. Band II. S. 84—87.

$$S=\frac{(B-A)a^{\mu}}{2}\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{u^{\frac{\mu-1}{2}}\partial u[a^2-(a^2-c^2)u]}{\sqrt{(1-u)[a^2-(a^2-c^2)u]}},$$

oder wenn man berücksichtigt, dass

$$a^2-(a^2-c^2)u=a^2\{1-(1-\frac{c^2}{a^2})u\}$$

ist, und zur Abkürzung

$$1-\frac{c^2}{a^2}=\varepsilon \tag{7}$$

setzt:

$$S=\frac{(B-A)a^{\mu+1}}{2}\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{(1-\varepsilon u)u^{\frac{\mu-1}{2}}\partial u}{\sqrt{1-(1+\varepsilon)u+\varepsilon u^2}}. \tag{8}$$

Da nun $\frac{\mu-1}{2}$ hier ganz ausfällt, so reduzirt sich dieses Integral auf zwei andere von der Form

$$\int\frac{u^{\nu}\partial u}{\sqrt{1-(1+\varepsilon)u+\varepsilon u^2}},\ \nu \text{ eine ganze Zahl;}$$

und kann dann immer durch Kreisbögen oder Logarithmen dargestellt werden. So hat man z. B. für $\mu=+1$, $A=\tan\vartheta$, $B=\tan\omega$:

$$S=\frac{(\tan\omega-\tan\vartheta)a^2}{2}\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{(1-\varepsilon u)\partial u}{\sqrt{1-(1+\varepsilon)u+\varepsilon u^2}}. \tag{9}$$

Hierzu gehört Taf. IV. Fig. 2. Die Gleichungen der in der Ebene XY gezeichneten Curven sind hier $y=\varphi(x)=x\tan\vartheta$, $y=\psi(x)=x\tan\omega$, also die Curven selbst zwei Gerade, welche durch den Punkt O gehen und mit OX die Winkel $XOH=\vartheta$ und $XOK=\omega$ machen. Zugleich ist wieder $OA=\alpha$, $OB=\beta$, also $FGKH$ die Projektion von $TUWV$ und die Fläche dieser Figur obiges S. Sind nun $OX=a$ und $OZ=c$ die Achsen des elliptischen Cylinders, so bildet die Curve XZ einen Quadranten der Direktrix und der ganze Cylinder ein Tonnengewölbe, wovon die Figur nur die Hälfte zeigt. Nehmen wir noch $OA=\alpha=0$, $OB=\beta=a=OX$, so geht das Viereck $FGKH$ in das Dreieck ODE und die Fläche $TUWV$ in ZDE über; zugleich wird nach (6) $\alpha'=0$, $\beta'=1$ und folglich

$$S=\frac{a^2(\tan\omega-\tan\vartheta)}{2}\int_0^1\frac{(1-\varepsilon u)\partial u}{\sqrt{1-(1+\varepsilon)u+\varepsilon u^2}}. \tag{10}$$

Nun ist aber $XD=OX\tan XOD=a\tan\vartheta$, $XE=OX\tan XOE=a\tan\omega$, mithin

$$XE-XD=DE=a(\tan\omega-\tan\vartheta).$$

Hieraus findet sich der Inhalt des Dreiecks ODE, der F hei… möge, nämlich

$$F=\frac{OX.DE}{2}=\frac{a^2(\tan\omega-\tan\vartheta)}{2};$$

wenn wir also das in (10) vorkommende Integral k nennen, … findet hier die bemerkenswerthe Relation

$$S=kF$$

statt, welche schon Herr Dr. Wittstein im 7ten Theile des Arc… S. 445. angegeben hat *). Für k findet man leicht, wenn a… also ε positiv ist:

$$k=1+\frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}}l\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right);$$

wenn $a=c$, also $\varepsilon=0$ ist:

$$k=2;$$

und wenn $a<c$, also ε negativ ist:

$$k=1+\frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{-1}}\operatorname{Arctan}\sqrt{-\varepsilon};$$

womit diese spezielle Aufgabe gelöst ist.

Nimmt man in der Formel (8) $A=0$, $\mu=-1$ und setzt … B, so wird

$$S=\frac{b}{2}\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{(1-\varepsilon u)\partial u}{u\sqrt{1-(1+\varepsilon)u+\varepsilon u^2}}.$$

Die beiden Curven in der Ebene XY sind hier die Achse d… (wegen $y=\varphi(x)=0$) und eine gleichseitige Hyperbel mit… Achse b (wegen $\psi(x)=\frac{b}{x}$), von der die Coordinatenachsen … und OY die Asymptoten sind (Taf. IV. Fig. 3.). S ist die Fl… $TUWV$ und die Curve UW kann hier als Durchschnitt e… elliptischen und hyperbolischen Cylinders angesehen werden. … hat übrigens

$$S=\frac{b}{2}\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{\partial u}{u\sqrt{1-(1+\varepsilon)u^2+\varepsilon u^2}}$$
$$-\frac{b\varepsilon}{2}\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{\partial u}{\sqrt{1-(1+\varepsilon)u^2+\varepsilon u^2}}.$$

---

*) In den Buchstaben findet nur der Unterschied statt, dass h… steht, wo Herr Dr. Wittstein b hat.

und wenn man im ersten Integrale $u=\frac{1}{v}$ setzt:

$$S=\frac{b}{2}\int_{\frac{1}{\beta'}}^{\frac{1}{\alpha'}}\frac{\partial v}{\sqrt{v^2-(1+\varepsilon)v+\varepsilon}}$$

$$-\frac{b\varepsilon}{2}\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{\partial u}{\sqrt{1-(1+\varepsilon)u^2+\varepsilon u^4}},$$

wo nun der Werth jedes Integrales sehr leicht zu entwickeln ist.

6. Eine andere gute Substitution für die auf den elliptischen Cylinder passende Formel (4) ist $\varphi(x)=0$; $\phi(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; die Curven in der Ebene XY sind dann die Coordinatenachse OX und eine Ellipse, deren Achsen a und b in den Linien OX und OY liegen. Sei daher in Taf. IV. Fig. 4. $OX=a$, $OY=b$, $OZ=c$, $OA=\alpha$, $OB=\beta$, so ist $S=TUWV$ und die Curve UW kann als Durchschnitt zweier elliptischen Cylinder angesehen werden. Zugleich ist nach no. (4).

$$S=\frac{b}{a^2}\int_{\alpha}^{\beta}\partial x\sqrt{a^4-(a^2-c^2)x^2};$$

und wenn wir $x=at$ setzen, so werden die Gränzen für t:

$$t=\frac{\beta}{a}=\beta',\ t=\frac{\alpha}{a}=\alpha' \tag{11}$$

und folglich

$$S=b\int_{\alpha'}^{\beta'}\partial t\sqrt{a^2-(a^2-c^2)t^2},$$

oder für

$$1-\frac{c^2}{a^2}=\varepsilon: \tag{12}$$

$$S=ab\int_{\alpha'}^{\beta'}\partial t\sqrt{1-\varepsilon t^2}. \tag{13}$$

Nehmen wir spezieller $\alpha=OA=0$ und $\beta=OB=OX=a$, so wird $\alpha'=0$, $\beta'=1$ und S bedeutet jetzt die Fläche ZXQ. Für dieselbe ist

$$S=ab\int_0^1\partial t\sqrt{1-\varepsilon t^2}.$$

Berücksichtigt man hier, dass $\frac{1}{4}ab\pi$ die Fläche der Projektion OXY als eines elliptischen Quadranten darstellt, bezeichnet dieselbe mit F und setzt

$$\frac{4}{\pi}\int_0^1\partial t\sqrt{1-\varepsilon t^2}=k,$$

so ist nach dem Vorigen

$$S = kF,$$

worin sich, weil k nur von dem Achsenverhältnisse $\frac{c}{a}$ des elliptischen Cylinders abhängt, ein dem Wittstein'schen ganz analoger Satz ausspricht.

II. Besonders einfach und elegant ist die Quadratur solcher Figuren, welche auf einem cykloidalischen Cylinder gezeichnet sind. In Taf. IV. Fig. 5. ist ein solcher abgebildet, worin OZ' die halbe Basis der Cykloide $= r\pi$, O ihren Scheitel und OX ihre Höhe $= 2r$ darstellt, wenn r den Radius des beschreibenden Kreises bedeutet. Nähmen wir wie gewöhnlich den Anfang der Bewegung des rollenden Kreises zum Anfangspunkte der Coordinaten, die Abscissen ξ von Z' nach O zu und die Ordinaten darauf senkrecht, so wäre die Gleichung der Cykloide

$$\xi = r(\varphi - \sin\varphi), \quad \eta = r(1 - \cos\varphi)$$

worin φ den Wälzungswinkel bezeichnet. Wollen wir diese Coordinaten in die bisherigen x und z verwandeln, so müssen wir $\xi = OZ' - z = r\pi - z$ und $\eta = OX - x = 2r - x$ setzen, so dass wir erhalten

$$z = r\pi - r(\varphi - \sin\varphi), \quad x = 2r - r(1 - \cos\varphi) = r(1 + \cos\varphi).$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -r(1 - \cos\varphi), \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi$$

und

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi} = \tan\frac{1}{2}\varphi.$$

Mithin haben wir weiter

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \tan^2\frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{1 + \cos\varphi}},$$

d. i. weil nach dem Früheren $1 + \cos\varphi = \frac{x}{r}$ ist:

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{\frac{2r}{x}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}},$$

wenn wir den Durchmesser $2r$ des erzeugenden Kreises mit a bezeichnen. Nach Formel (3) wird jetzt

$$S=\sqrt{a}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial x}{\sqrt{x}}\{\psi(x)-\varphi(x)\}, \tag{14}$$

und diese Formel ist so einfach, dass sie sich für eine Unzahl von Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ integriren lässt. Die einfachsten Fälle sind folgende.

a. Für $\varphi(x)=x\tan\vartheta$, $\psi(x)=x\tan\omega$ wird

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{a}(\tan\omega-\tan\vartheta)\int_{\alpha}^{\beta}x^{\frac{1}{2}}\partial x\\&=\frac{2}{3}\sqrt{a}(\tan\omega-\tan\vartheta)(\beta^{\frac{3}{2}}-\alpha^{\frac{3}{2}}),\end{aligned}$$

und dies wäre der Inhalt von $TUWV$ in der Figur, wobei $FGKH$ die Projektion von $TUWV$, $\angle XOF=\vartheta$, $\angle XOG=\omega$ ist. Nehmen wir $\alpha=0$, $\beta=a=OX$, so geht die Fläche $TUWV$ in die grössere OPQ über, deren Grösse

$$\begin{aligned}S&=\frac{2}{3}\sqrt{a}(\tan\omega-\tan\vartheta)\sqrt{a^3}\\&=\frac{4}{3}\cdot\frac{a^2(\tan\omega-\tan\vartheta)}{2}\end{aligned}$$

ist. Bezeichnen wir aber, wie schon früher einmal, die Fläche des Dreiecks ODE mit F, so ist

$$F=\frac{a^2(\tan\omega-\tan\vartheta)}{2},$$

und mithin haben wir die sehr bemerkenswerthe Relation

$$S=\frac{4}{3}F.$$

b. Für $\varphi(x)=\sqrt{px}$, $\psi(x)=\sqrt{qx}$ bilden die in der Ebene XY gezeichneten Curven zwei Parabeln, deren Parameter p und q sind und deren gemeinschaftliche Achse OX ist. Man erhält sehr einfach für die Fläche $TUWV$ (Taf. IV. Fig. 6.)

$$S=\sqrt{a}(\sqrt{q}-\sqrt{p})(\beta-\alpha),$$

und für $p=0$, $\alpha=0$, $\beta=a$, in welchem Falle S die Fläche $OZ'Q$ bedeutet,

$$S=a\sqrt{aq}$$

oder, weil nach der Gleichung $y=\sqrt{qx}$ die Gerade $XD=\sqrt{aq}$ ist, S gleich dem Rechtecke aus OX und DX. Bezeichnen wir die Fläche der Projektion $OXEKG$ mit F, so ist der Inhalt derselben bekanntlich $=\frac{2}{3}OX.DX$, folglich

$$S = \frac{3}{2}F,$$

ein ebenfalls überraschend einfaches Resultat.

Herr Dr. Wittstein hat sehr richtig bemerkt, dass die spezielle, von ihm gestellte Aufgabe wegen ihres praktischen Interesses als Rechnungsbeispiel in technischen Anstalten dienen könne; man darf diese Bemerkung vielleicht auch auf die hier mitgetheilte allgemeinere Betrachtung ausdehnen, da sie keinerlei Schwierigkeiten des Calcüls darbietet und demjenigen, der die graphische Darstellung der quadrirten Flächenstücke mit Hülfe der descriptiven Geometrie versuchen will, zu mancher netten Zeichnung Gelegenheit giebt.

XVII.

Konstruktion und Klassifikation der Flächen des zweiten Grades mittels projektivischer Gebilde.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Erster Theil.

Die folgenden Betrachtungen bezwecken die Auflösung der Aufgabe: **Durch 9 beliebig gegebene Punkte oder an 9 beliebig gegebene Ebenen mittels des Lineals allein eine Fläche des zweiten Grades zu legen,** eine Aufgabe, welche mit der wiederholentlich vorgelegten Frage nach dem geometrischen Gesetze, welches zwischen 10 beliebigen Punkten einer Fläche des zweiten Grades stattfindet, wo nicht zusammenfällt, doch in sehr naher Verbindung steht. Die Vorbereitung hierzu ist grossentheils im zweiten Theile meiner Abhandlung über die geometrischen Verwandtschaften gegeben; doch wird es nöthig sein, einmal besondere Fälle einiger dort aufgestellter Lehrsätze noch ins Auge zu fassen, und sodann zu den Eigenschaften der

collinearen und reciproken Ebenen die der collinearen und reciproken räumlichen Strahlbüschel hinzuzufügen. Im Grunde sind letztere den ersteren coordinirt; denn denkt man sich im Raume zwei Ebenenbüschel 𝔄, 𝔄', deren Achsen sich in einem Punkte D schneiden, oder aber zwei ebene Strahlbüschel B, B', deren Mittelpunkte in einem Punkte D liegen, so bestimmt einerseits ein jeder Strahl a des Punktes D zwei Ebenen α, α' von 𝔄, 𝔄', andererseits eine jede durch D gehende Ebene α zwei Strahlen a, a' von B, B', und umgekehrt; gibt man sich also

1) in einer Ebene 𝔈 zwei Strahlbüschel B, B' und in einem räumlichen Strahlbüschel D_1 zwei mit ersteren projektivische Ebenenbüschel $𝔄_1$, $𝔄_1'$;

2) in 𝔈 zwei Strahlbüschel B, B' und in D_1 zwei mit ersteren projektivische ebene Strahlbüschel $𝔅_1$, $𝔅_1'$;

3) in 𝔈 zwei Gerade A, A' und in D_1 zwei mit ihnen projektivische Ebenenbüschel $𝔄_1$, $𝔄_1'$;

4) in 𝔈 zwei Gerade A, A' und in D_1 zwei mit ihnen projektivische ebene Strahlbüschel $𝔅_1$, $𝔅_1'$;

5) in einem räumlichen Strahlbüschel D zwei Ebenenbüschel 𝔄, 𝔄' und in einem zweiten räumlichen Slrahlbüschel D_1 zwei mit ihnen projektivische Ebenenbüschel $𝔄_1$, $𝔄_1'$;

6) in D zwei Ebenenbüschel 𝔄, 𝔄' und in D_1 zwei mit ihnen projektivische ebene Strahlbüschel B_1, B_1';

7) endlich in D zwei ebene Strahlbüschel B, B' und in D_1 zwei mit ihnen projektivische ebene Strahlbüschel B_1, B_1'; so erhält man ausser den früher behandelten drei Beziehungs-Systemen noch sieben neue, wo bezüglich

1) jedem Punkte von 𝔈 ein Strahl von D_1;
2) jedem Punkte von 𝔈 eine Ebene von D_1;
3) jeder Geraden von 𝔈 ein Strahl von D_1;
4) jeder Geraden von 𝔈 eine Ebene von D_1;
5) jedem Strahle von D ein Strahl von D_1;
6) jedem Strahle von D eine Ebene von D_1;
7) jeder Ebene von D eine Ebene von D_1

entspricht, und wo in demselben Sinne, wie dort, höhere und niedere Grade der Verwandtschaft zu unterscheiden sind.

Man kann aber auch die Verwandtschaften räumlicher Strahlbüschel mittels Projektion aus denen der Ebenen ableiten, und dieser Weg soll hier, wo er am Kürzesten zum Ziele führt, eingeschlagen werden.

§. 1.

Aufeinandergelegte reciproke und involutorische Ebenen.

Im achten Theile des Archivs S. 42. ist gezeigt worden, dass zwei beliebige reciproke Ebenen sich immer so aufeinander legen lassen, dass einem jeden Punkte derselben eine und dieselbe Gerade in doppeltem Sinne, und umgekehrt, entspricht, und so, dass bald gar keine, bald unzählige Punkte, welche bald eine Ellipse, bald eine Hyperbel bilden, auf ihren entsprechenden Geraden liegen, und man wird sogleich gesehen haben, dass nur in dem Falle, wenn die Mittelpunkte beider Ebenen unendlich entfernt sind, die Parabel hervortritt. Sowie nun früher zwei aufeinander gelegte projekt. Gerade, deren Durchschnitte der Parallelstrahlen, und zwei concentrische projekt. Strahlbüschel, deren ungleichnamige Schenkel der entsprechenden rechten Winkel coincidiren, involutorisch genannt worden sind, so sollen auch zwei aufeinandergelegte reciproke Ebenen, deren Mittelpunkte sich decken und deren zug. Durchmesser eine Involution bilden, weil hier, wie dort, je zwei Elemente sich in doppeltem Sinne entsprechen, zwei **involutorische Ebenen** heissen; auch werden von jetzt an die vereinigten Mittelpunkte derselben der **Mittelpunkt**, die Achsen jener Involution die **Achsen** der Ebenen selbst, jeder Punkt derselben der **harmonische Pol** der ihm entsprechenden Geraden und letztere die **harmonische Polare** des ersteren, je zwei zug. Punkte einer Geraden und je zwei zug. Strahlen eines Punktes bezüglich **zugeordnete harmonische Pole und Polaren** dieser letzteren genannt, und diese Ausdrücke auch im allgemeinen Falle reciproker Ebenen, jedoch ohne das Beiwort „harmonisch" gebraucht werden.

Lehrsatz 1.

Zwei aufeinander gelegte reciproke Ebenen sind involutorisch, wenn irgend zwei Punkte, welche nicht, oder wenn irgend drei Punkte, welche auf ihren Polaren, aber nicht in gerader Linie, liegen, denselben in doppeltem Sinne entsprechen.

Beweis. Denn jede Gerade, welche durch einen jener beiden Punkte geht, schneidet dessen Polare in einem Punkte, welcher in doppeltem Sinne der zug. Pol des ersteren ist; also gilt das nämliche von je zwei zug. Polen dieser Geraden. Wird nun ein beliebiger Punkt a der Ebene mit jenen zwei Punkten durch zwei Gerade verbunden, so schneiden die beiden Polaren von a eine jede dieser Geraden in einerlei Punkte, fallen also zusammen. Und verbindet man die drei Punkte des Satzes durch zwei Gerade, so müssen diese zwei Durchschnitten der drei Polaren in doppeltem Sinne entsprechen, und es liegen nun diese zwei Durchschnitte nicht auf ihren Polaren.

Lehrsatz 2.

Werden zwei beliebige reciproke Ebenen involutorisch und zwar so gelegt, dass sie eine Ellipse erzeugen, und wird nun die eine dieser Ebenen um irgend einen Punkt der Ellipse, als festen Punkt, und zwar um einen Winkel von zwei Rechten herumgedreht, so gibt es ausser diesem Punkte keinen zweiten, welcher auf seiner Polare liegt, und die Ebenen sind dann nicht involutorisch; doch ist es nicht umgekehrt richtig, dass zwei reciproke Ebenen, welche diese letztere Lage zu einander haben, allemal durch Umdrehung in jene involutorische Lage gebracht werden können.

Beweis. Liegen die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ involutorisch und erzeugen eine Ellipse, und man legt durch einen beliebigen Punkt (ee_1) derselben die Tangente (ee_1) und ausserdem eine beliebige Gerade (AA_1), so ist erstere die harmonische Polare von (ee_1), letztere hat nothwendig mit der Ellipse einen zweiten Punkt (ff_1) von endlicher Entfernung gemein, und die harmonische Polare (pp_1) ihres unendlich entfernten Punktes (pp_1) hälftet die Strecke ef in einem Punkte (qq_1). Wird nun die Ebene $\mathfrak{E}_1$ um den Punkt (ee_1) um zwei Rechte herumgedreht, so fällt e_1 wieder auf e, und A_1 wieder auf A, aber der Punkt (ee_1) liegt jetzt in der Mitte sowohl zwischen den Punkten f und f_1, als auch zwischen q und q_1. Die zug. Pole der Geraden (AA_1) bilden also zwei gleichliegende projektivische Gerade, zwischen deren Durchschnitten q, q_1 der Parallelstrahlen mitteninne sich zwei solche Pole e, e_1 vereinigen; also können sich längs (AA_1) kein zweites Paar zug. Pole vereinigen, d. h. kein zweiter Punkt auf seiner Polare liegen; und da jeder Punkt der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ einem Strahle des Punktes (ee_1) angehört, so gibt es in denselben überhaupt keinen zweiten solchen Punkt. Setzt man dagegen statt der Ellipse eine Hyperbel oder Parabel, so bilden die zug. harm. Pole derjenigen Geraden, welche mit den Asymptoten oder mit der Achse der Parabel parallel laufen, ungleichliegende projektivisch-gleiche Gerade, und man erhält durch die Umdrehung zwei und bezüglich eine Gerade, deren sämmtliche Punkte auf ihren Polaren liegen.

Umgekehrt: enthalten zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ nur einen Punkt (ee_1), welcher auf seiner Polare liegt, so kann derselbe nicht zwei verschiedene Polaren besitzen, weil sonst einer jeden dieser letzteren, in anderem Sinne genommen, ein zweiter auf ihr liegender Punkt entsprechen müsste. Entweder nun hat der unendlich entfernte Punkt der Geraden (ee_1) einerlei oder verschiedene Polaren. Im ersten Falle liegen die Mittelpunkte der Ebenen auf dieser Polare gleichweit von (ee_1) entfernt und fallen nach der Umdrehung zusammen, und da zugleich ein Paar zugeordnete Durchmesser sich in doppeltem Sinne entsprechen müssen, so bilden sämmtliche zug. Durchmesser eine Involution, und folglich sind die Ebenen involutorisch und erzeugen eine Ellipse. Im zweiten Falle dagegen fallen nach der Umdrehung die Mittelpunkte der Ebenen nicht zusammen, sondern in eine mit (ee_1) parallele Gerade; die zug. Pole eines jeden Strahles von (ee_1) bilden eine Involution von Punkten, und wird also (ee_1) der Berührungspol zweier sich os-

kulirender Kegelschnitte, von denen der eine diejenigen Geraden zu Tangenten hat, deren Pole auf ihnen und auf dem anderen Kegelschnitte liegen. Ueberhaupt lässt sich zeigen, dass zwei reciproke Ebenen auf unzählige Arten in diese letztere Lage gebracht werden können.

Dass endlich in den beiden gedachten Fällen die Ebenen nicht involutorisch sein können, geht einfach daraus hervor, dass ihre Mittelpunkte im ersten Falle erst nach der Umdrehung sich vereinigen, und im zweiten schon anfangs getrennt gewesen sind.

Lehrsatz 3.

Zwei reciproke Ebenen lassen sich immer so aufeinander legen, dass *a*) alle Punkte, welche auf ihre Polaren fallen, zwei geraden Linien, und ihre Polaren zwei Strahlbüscheln angehören, deren Mittelpunkte mit dem Durchschnitt dieser Linien in gerader Linie liegen; und dass *b*) alle jene Punkte einer einzigen Geraden, und ihre Polaren einem einzigen Strahlbüschel angehören; und zwar sind in beiden Fällen die Ebenen nicht involutorisch.

Beweis. *a*) Denn da eine Gerade und ein ebener Strahlbüschel, welche projektivisch sind, allemal perspektivisch gelegt werden können, so kann man die eine Ebene $\mathfrak{E}_1$ allemal so auf $\mathfrak{E}$ legen, dass die Punkte einer beliebigen Geraden A_1 auf ihre Polaren fallen. Es sei B der Pol von A_1, nach welchem diese Polaren gehen, so werden die Polaren aller Punkte derjenigen Geraden A, welche sich mit A_1 vereinigt, im Allgemeinen einen anderen Strahlbüschel B_1 bilden und durch diese Punkte gehen; und wiederum werden die Pole aller Strahlen des Punktes B_1', welcher mit B vereinigt ist, in einer neuen Geraden A' und ein jeder auf seiner Polare liegen, und die mit A' vereinigte Gerade A_1' muss dem mit B_1 vereinigten Punkte B' entsprechen. Die beiden Polaren des Durchschnittes von (AA_1) und $(A'A_1')$ gehen eine jede sowohl durch diesen Punkt, als auch durch die beiden Punkte (BB_1') und $(B'B_1)$, fallen also zusammen.

b) Man denke sich die Ebenen involutorisch und zwar so gelegt, dass sie eine Hyperbel erzeugen; so lässt sich allemal eine, ja, wenn dieselbe nicht gleichseitig ist, vier Tangenten ziehen, welche auf einer Asymptote senkrecht stehen. Durch den Berührungspunkt $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$ einer solchen Tangente lege man eine Gerade (AA_1) mit jener Asymptote parallel; so ist der Punkt (BB_1), in welchem die Tangente und Asymptote sich schneiden, der harmonische Pol von (AA_1), und die zug. harm. Pole dieser Geraden haben paarweise gleiche Abstände vom Punkte $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$. Wendet man nun die Ebene $\mathfrak{E}_1$ um jene Tangente herum, so behaupten diese letztere, die Gerade A_1 und die Punkte $\mathfrak{e}_1$, B_1 nebst dem unendlich entfernten von A_1 ihre Stelle, alle übrigen Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$.... dieser letzteren aber fallen auf ihre zug. Pole $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.... und also auch auf ihre Polaren $B\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b}$, $B\mathfrak{c}$...., mit welchen gleichzeitig auch die Polaren $B_1\mathfrak{a}_1$, $B_1\mathfrak{b}_1$, $B_1\mathfrak{c}_1$.... von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.... sich vereinigen. Die Gerade (AA_1) entspricht also auch jetzt noch dem Punkte (BB_1) in doppeltem Sinne, zugleich aber auch jeder

Punkt $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$.... dem ihn treffenden Strahle von (BB_1). Ist nun $\mathfrak{p}$ irgend ein ausserhalb (AA_1) liegender Punkt, a der nach ihm gehende Strahl von (BB_1) und $\mathfrak{a}$ der Durchschnitt von a und (AA_1), so gehen die Polaren von $\mathfrak{p}$ beide durch $\mathfrak{a}$, können also nicht durch $\mathfrak{p}$ gehen, weil sie sonst mit a, und folglich $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a}$ sich vereinigen müssten. Also liegen nur die Punkte von (AA_1) auf ihren Polaren. Denkt man sich endlich, dass die Ebenen auf irgend eine Weise die Lage *b)* erhalten haben, so überzeugt man sich mittels des ersten Theiles von Lehrsatz 1. sogleich, dass sie durch gehörige Umwendung involutorisch werden, dass die Gerade (AA_1) einer Asymptote der so entstehenden Hyperbel parallel wird, und daher die nun vereinigten Mittelpunkte der Ebenen vorher nicht vereinigt, die Ebenen also auch nicht involutorisch gewesen sein können.

Lehrsatz 4.

In zwei aufeinander gelegten reciproken Ebenen können nicht bloss zwei oder irgend eine grössere, aber beschränkte Anzahl von Punkten auf ihren Polaren liegen.

Beweis. Hat irgend ein solcher Punkt zwei besondere Polaren, so hat jede der letzteren, in anderem Sinne genommen, einen zweiten auf ihr liegenden Pol, dieser eine zweite Polare, diese einen neuen Pol und so ins Unendliche fort; es kann also höchstens von solchen Punkten die Rede sein, denen einerlei Gerade in doppeltem Sinne entspricht. Liegen nun drei derselben in gerader Linie, so müssen alle Punkte dieser Linie auf ihren Polaren liegen — und findet jenes nicht statt, so sind die Ebenen nach Lehrsatz 1. involutorisch und auf jeder durch einen dieser Punkte gehenden Geraden müssen sich zwei zug. harm. Pole derselben in einem neuen Punkte vereinigen, so dass also die Ebenen unzählige Punkte besitzen, die auf ihren Polaren liegen. Es erübrigt also nur noch der Fall von zwei solchen Punkten. Man denke sich durch diese Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, deren Verbindungslinie A sei, zwei Parallelen a, b gezogen; so werden die zug. Polare von a, und ebenso die von b, zwei gleichliegende projektivische Gerade bilden, weil nur in solchen es sich ereignen kann, dass ein einziges Paar entsprechende Punkte sich in $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{b}$) vereinigen, und nur in einem Falle, wenn a mit der Polare von $\mathfrak{a}$ zusammenfällt, tritt der Umstand ein, dass alle Punkte der einen Geraden dem einzigen Punkte $\mathfrak{a}$ entsprechen. In allen anderen Fällen wird $\mathfrak{a}$, und ebenso $\mathfrak{b}$, in der Mitte zwischen den Durchschnitten der Parallelstrahlen, d. h. der Polaren des unendlich entfernten Punktes von a und b liegen, diese Polaren also in einem Punkte $\mathfrak{p}$ von A convergiren müssen. Nun aber haben die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein jeder nur eine einzige Polare, also die Gerade A auch nur einen einzigen Pol B; die beiden Polaren von $\mathfrak{p}$ gehen sowohl durch B, als auch nach dem unendlich entfernten Punkte von a, b; sie fallen also in eine einzige p zusammen. Die Ebenen besitzen also zwei Punkte B und $\mathfrak{p}$, welche nicht auf ihren Polaren liegen und denselben in doppeltem Sinne entsprechen, sind also nach Lehrs. 1. involutorisch und besitzen unzählige Punkte wie $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Aus den drei letzten Lehrsätzen ergiebt sich nun mit aller Strenge:

Lehrsatz 5.

In zwei aufeinandergelegten reciproken Ebenen gibt es entweder keinen oder nur einen oder unzählige Punkte, welche auf ihren Polaren liegen; und diese Punkte bilden entweder einen Kegelschnitt oder zwei Gerade oder eine einzige Gerade.

Lehrsatz 6.

In zwei involutorischen Ebenen gibt es entweder keinen oder unzählige Punkte, welche auf ihren Polaren liegen, und diese Punkte bilden allemal einen Kegelschnitt, dessen Tangenten ihre Polaren sind.

Die im vierten Theile des Archivs S. 273 und 276 enthaltenen Sätze gelten auch von den zug. Durchmessern, Achsenpunkten und den Brennpunkten zweier involutorischer Ebenen, und zwar nicht bloss, wenn sie einen Kegelschnitt erzeugen, sondern auch wenn dieses nicht der Fall ist. Da dieselben später zur Entwickelung ganz ähnlicher Eigenschaften der reciproken Stahlbüschel dienen sollen, welche letzteren für die Theorie der Flächen des zweiten Grades von äusserster Wichtigkeit sind, so soll hier der Beweis für den noch nicht betrachteten Fall nachgeholt werden.

Es sei in Taf. V. Fig. 1. M der Mittelpunkt der beiden Ebenen; $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ seien diejenigen zwei zug. harm. Pole (ideale Scheitel) der einen Achse, welche gleichen Abstand vom Mittelpunkte M der Involution haben; so ist $M\mathfrak{s} = A$ die halbe Länge dieser Achse, und es sei B die auf ähnliche Weise zu nehmende halbe Länge der anderen Achse; die im Punkte $\mathfrak{s}$ auf $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ senkrechte Gerade s ist die harm. Polare des anderen Punktes $\mathfrak{s}_1$. Sind nun $M\mathfrak{a}$, $M\mathfrak{a}_1$ irgend zwei zug. Durchmesser der Ebenen, welche die s in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ schneiden, so geht die harm. Polare von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{s}_1$ und ist mit $M\mathfrak{a}_1$ parallel, und die harm. Polare von $\mathfrak{a}_1$ geht auch durch $\mathfrak{s}_1$ und ist mit $M\mathfrak{a}$ parallel; erstere schneide die $M\mathfrak{a}$ in α_1 und die andere Achse in $\mathfrak{b}_1$, letztere die $M\mathfrak{a}_1$ in α und dieselbe Achse in $\mathfrak{b}$; so ist $M\mathfrak{b} \# \mathfrak{s}\mathfrak{a}$, $M\mathfrak{b}_1 \# \mathfrak{s}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \perp \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$; und da die harm. Polare von $\mathfrak{b}_1$ durch $\mathfrak{a}$ gehen und senkrecht auf $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ stehen muss, so sind $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ zug. harm. Pole der anderen Achse, und folglich $M\mathfrak{b} . M\mathfrak{b}_1 = B^2$. Sind endlich A_1, B_1 die halben Längen der Durchmesser $M\mathfrak{a}$, $M\mathfrak{a}_1$, d. h. der gegenseitigen Abstände derjenigen zug. harm. Pole dieser Durchmesser, welche vom Punkte M gleichweit entfernt sind, so ist, weil $\mathfrak{a}$, α_1 und $\mathfrak{a}_1$, α zug. harm. Pole derselben sind, $M\mathfrak{a} . M\alpha_1 = A_1{}^2$, $M\mathfrak{a}_1 . M\alpha = B_1{}^2$. Aus den Proportionen

$$M\mathfrak{a} : M\alpha_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 : M\mathfrak{b}_1 \text{ und } M\mathfrak{a}_1 : M\alpha = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 : M\mathfrak{b}$$

ergibt sich nun

$$M\mathfrak{a} . M\alpha_1 = A_1{}^2 = \frac{M\mathfrak{a}^2 . M\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}; \quad M\mathfrak{a}_1 . M\alpha = B_1{}^2 = \frac{M\mathfrak{a}_1{}^2 . M\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}; \quad (1)$$

also ist

$$A_1^2+B_1^2=\frac{M\mathfrak{a}^2.M\mathfrak{b}_1+M\mathfrak{a}_1^2.M\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}=\frac{(M\mathfrak{s}^2+\mathfrak{a}\mathfrak{s}^2)M\mathfrak{b}_1+(M\mathfrak{s}^2+\mathfrak{a}_1\mathfrak{s}^2)M\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}$$

$$=\frac{M\mathfrak{s}^2(M\mathfrak{b}_1+M\mathfrak{b})+M\mathfrak{b}.M\mathfrak{b}_1(M\mathfrak{b}+M\mathfrak{b}_1)}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}=M\mathfrak{s}^2+M\mathfrak{b}.M\mathfrak{b}_1,$$

oder

$$A_1^2+B_1^2=A^2+B^2. \qquad (2)$$

Sind α, α_1, φ die Winkel, welche $M\mathfrak{a}$, $M\mathfrak{a}_1$ mit $M\mathfrak{s}$ und mit einander bilden, so ist

$$M\mathfrak{s}.\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1=M\mathfrak{a}.M\mathfrak{a}_1.\sin\varphi \text{ und } A_1^2.B_1^2=\frac{M\mathfrak{a}^2.M\mathfrak{a}_1^2}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1^2}.M\mathfrak{b}.M\mathfrak{b}_1$$

$$=\frac{M\mathfrak{a}^2.M\mathfrak{a}_1^2.B^2}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1^2};\ \text{also } A_1.B_1.\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1=M\mathfrak{a}.M\mathfrak{a}_1.B$$

$$=\frac{M\mathfrak{s}.\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1.B}{\sin\varphi};\ A_1.B_1.\sin\varphi=A.B; \qquad (3)$$

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{s}}{M\mathfrak{a}}\cdot\frac{M\mathfrak{s}}{M\mathfrak{a}}:\frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{s}}{M\mathfrak{a}_1}\cdot\frac{M\mathfrak{s}}{M\mathfrak{a}_1}=\sin\alpha.\cos\alpha:\sin\alpha_1.\cos\alpha_1=$$

$$\sin 2\alpha:\sin 2\alpha_1=\frac{M\mathfrak{a}_1^2}{M\mathfrak{a}^2}\cdot\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{s}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{s}}=\frac{M\mathfrak{a}_1^2.M\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}:\frac{M\mathfrak{a}^2.M\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}=B_1^2:A_1^2,$$

also

$$A_1^2:B_1^2=\sin 2\alpha_1:\sin 2\alpha. \qquad (4)$$

In Taf. V. Fig. 2. seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ irgend zwei zug. harm. Pole (Achsenpunkte) der Achse $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$; a_1 die harm. Polare von $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$ die vom Mittelpunkte M gleichweit entfernten zug. harm. Pole der anderen Achse; t_1 die harm. Polare von $\mathfrak{t}$, welche a_1 in $\mathfrak{b}_1$ schneidet; b, b_1 die von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{b}_1$ gehenden Geraden, und α, α_1 die Winkel, welche sie mit $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ bilden; so liegt der harm. Pol von b auf den harm. Polaren von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{t}$, also in $\mathfrak{b}_1$; folglich sind b, b_1 zwei zug. harm. Polaren des Punktes $\mathfrak{a}$. Nennt man endlich denjenigen Winkel, welchen die gleichweit von $M\mathfrak{s}$ abstehenden zug. harm. Polaren des Punktes $\mathfrak{a}$ einschliessen, den diesem Punkte zugehörigen Achsenpunktwinkel, bezeichnet die Hälfte desselben mit A_1 und die des dem Punkte $\mathfrak{a}_1$ zugehörigen mit B_1, so ist

$$\operatorname{tng}\alpha.\operatorname{tng}\alpha_1=\operatorname{tng}^2 A_1=\frac{MA}{M\mathfrak{a}}\cdot\frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}=\frac{B^2}{M\mathfrak{a}.\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1},$$

und ebenso

$$\operatorname{tng}^2 B_1=\frac{B^2}{M\mathfrak{a}_1.\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}; \qquad (1)$$

also

$$\operatorname{tng}^2 A_1+\operatorname{tng}^2 B_1=\frac{B^2}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}\left(\frac{1}{M\mathfrak{a}}+\frac{1}{M\mathfrak{a}_1}\right)=\frac{B^2.\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}{M\mathfrak{a}.M\mathfrak{a}_1.\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}=\frac{B^2}{A^2}; \qquad (2)$$

$$\operatorname{tng}^2 A_1 \,.\, \operatorname{tng}^2 B_1 = \frac{B^2 . B^2}{M\mathfrak{a} . M\mathfrak{a}_1 . \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1^{\,2}} = \frac{B^2 . B^2}{A^2 . \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1^{\,2}};$$

$$\operatorname{tng} A_1 . \operatorname{tng} B_1 . \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \frac{B^2}{A}; \tag{3}$$

$$\operatorname{tng}^2 A_1 : \operatorname{tng}^2 B_1 = \frac{B^2}{M\mathfrak{a} . \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} : \frac{B^2}{M\mathfrak{a}_1 . \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} = M\mathfrak{a}_1 : M\mathfrak{a}. \tag{4}$$

Setzt man in (1) $\operatorname{tng} A_1 = 1$ oder $A_1 = 45^0$, so ist

$$M\mathfrak{a} . \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = B^2 = M\mathfrak{a}^2 + M\mathfrak{a} . M\mathfrak{a}_1 = M\mathfrak{a}^2 + A^2,$$

also

$$M\mathfrak{a}^2 = B^2 - A^2. \tag{5}$$

In diesem Falle aber bilden die zug. harm. Polaren des Punktes $\mathfrak{a}$ eine Involution der rechten Winkel, und $\mathfrak{a}$ heisst dann ein Brennpunkt der involutorischen Ebenen; also besitzen die letzteren auch, wenn sie keinen Kegelschnitt erzeugen, zwei Brennpunkte, welche aber der kleineren Achse angehören, u. s. w.

§. 2.

Projektivische Ebenen und räumliche Strahlbüschel.

Sind im Raume irgend eine Ebene $\mathfrak{E}$ und ein Punkt D gegeben, so geht nach jedem Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots$ von $\mathfrak{E}$ ein bestimmter Strahl $a, b, c, d\ldots$ von D, und nach jeder Geraden $a, b, c, d\ldots$ von $\mathfrak{E}$ eine bestimmte Ebene $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ von D (insbesondere nach der unendlich entfernten Geraden von $\mathfrak{E}$ eine Parallelebene von D), und man erhält so einen räumlichen Strahlbüschel D, worin jeder ebene Strahlbüschel $\mathfrak{B}$ mit einer Geraden A, und jeder Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ mit einem ebenen Strahlbüschel B von $\mathfrak{E}$, in Ansehung der sich treffenden Elementenpaare, perspektivisch ist. Ein solcher Strahlbüschel D heisst daher selbst mit der Ebene $\mathfrak{E}$, in Ansehung jener Elementenpaare, perspektivisch, und es sollen auch zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, welche mit einerlei räumlichen Strahlbüschel D, und andererseits zwei räumliche Strahlbüschel D, D_1, welche mit einerlei Ebene $\mathfrak{E}$ perspektivisch sind, unter sich, in Ansehung der sich entsprechenden Elementenpaare, perspektivisch heissen und diese Eigenschaft durch

$$\begin{array}{ll} & \mathfrak{E}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots) \equiv D(a, b, c, d\ldots) \text{ oder} \\ & \mathfrak{E}(a, b, c, d\ldots) \equiv D(\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots) \text{ oder} \\ & \mathfrak{E}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\ldots\, a, b\ldots) \equiv D(a, b\ldots\, \alpha, \beta); \\ (1) & \mathfrak{E}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots) \equiv \mathfrak{E}_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1\ldots) \text{ und so fort} \end{array}$$

bezeichnet werden.

In zwei perspektivischen Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ heissen diejenigen zwei Geraden r, q_1, welche den unendlich entfernten Geraden r_1, q

von $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}$ entsprechen, die Durchschnitte der Parallelebenen oder auch die Achsen beider Ebenen. Im Durchschnitte (ee_1) zweier perspektivischen Ebenen sind allemal zwei entsprechende projektivisch-gleiche Gerade vereinigt, und je zwei entsprechende Gerade, welche mit (ee_1) parallel sind, sind projektivisch-ähnlich, ausgenommen ein einziges Paar, welche ebenfalls gleich, aber ungleichliegend sind, nämlich diejenigen, in deren Mitte der Projektionspunkt D liegt. Diejenige Ebene von D, welche auf (ee_1) senkrecht ist, schneidet $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in zwei Geraden, welche auf (ee_1) senkrecht stehen, und derjenige Strahl s von D, welcher diese Geraden unter gleichen inneren Winkeln schneidet, bestimmt in $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ zwei Punkte, deren entsprechende Strahlenpaare zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel bilden. Es gibt zwei Strahlen s und folglich auch zwei Paar solche Strahlbüschel u. s. w. (vergl. Arch. Thl. 8. S. 10.). Ueberhaupt geht unmittelbar aus der Erklärung der Collineation hervor, dass zwei perspektivische Ebenen jedesmal auch collinear sind. Liegt ihr Projektionspunkt unendlich entfernt, so sind sie affin und insbesondere gleich, wenn zugleich die mit (ee_1) parallelen Projektionsebenen die $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ unter gleichen inneren Flächenwinkeln schneiden; ähnlich dagegen, wenn der Projektionspunkt eine endliche Entfernung und die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ eine parallele Lage haben; und endlich congruent, wenn letztere parallel und ersterer entweder unendlich entfernt ist oder zwischen beiden Ebenen mitteninne liegt.

Aber auch umgekehrt lässt sich behaupten:

Lehrsatz 7.

Zwei collineare Ebenen lassen sich allemal auf unzählige Weisen in perspektivische Lage bringen.

Beweis. Denn legt man sie so im Raume, dass das eine Paar ihrer entsprechenden projektivisch-gleichen Geraden und deren entsprechende Punkte sich vereinigen, und sind B, B_1 irgend zwei andere entsprechende Punkte, so schneiden sich je zwei entsprechende Strahlen dieser Punkte im Durchschnitte der Ebenen, sie sind also perspektivisch, d. h. alle diesen Strahlen angehörige entsprechenden Punktenpaare liegen mit einerlei Punkte der Geraden BB_1 in gerader Linie. Folglich convergiren sämmtliche Verbindungslinien entsprechender Punktenpaare beider zunächst schaarenweise in besonderen Punkten von BB_1; aus demselben Grunde aber auch in den Punkten jeder anderen Geraden, welche zwei entsprechende Punkte verbindet; also convergiren alle in einem und demselben Punkte D.

Weit schwieriger wird sich der Beweis für den analogen Fall räumlicher Strahlbüschel zu Stande bringen lassen, und diess hat seinen Grund darin, dass vier gegeneinander feste Strahlen eines Punktes D im Raume sich nicht allemal so legen lassen, dass sie vier beliebig gegebene Punkte einer Ebene $\mathfrak{E}$ treffen.

Lehrsatz 8.

In zwei perspektivischen räumlichen Strahlbüscheln gibt es allemal entweder zwei Paar entsprechende pro-

jektivisch-gleiche ebene Strahlbüschel und zwei Paar entsprechende projektivisch-gleiche Ebenenbüschel, oder es gibt von beiden Arten nur eines oder unzählige Paare.

Beweis. *a*) Steht der gemeinschaftliche Strahl von D, D_1 schief auf dem perspektivischen Durchschnitte 𝔈, so wird das eine Paar der ersten Art von den beiden Parallelebenen gebildet, das andere von denjenigen zwei Ebenen, welche man erhält, wenn man senkrecht auf den gem. Strahl in der Mitte desselben eine Ebene errichtet und nach der Geraden, worin diese Ebene die 𝔈 schneidet, durch D, D_1 zwei Ebenen legt, was sich aus der Congruenz ebener Dreiecke ergibt. Das eine Paar der anderen Art wird von den gemeinschaftlichen Ebenen beider Strahlbüschel gebildet, und die Achsen des anderen erhält man, wenn man aus D, D_1 zwei Senkrechte DA, D_1A_1 auf 𝔈 fällt, den Abstand AA_1 ihrer Fusspunkte im Verhältniss von $DA:D_1A_1$ in einem Punkte M theilt, und die Geraden DM, D_1M zieht. Denn ist BMB_1 irgend ein in 𝔈 liegender Strahl des Punktes M, dessen Theile MB, MB_1 auf verschiedenen Seiten der Linie AA_1 liegen, so sind in den rechtwinkligen Dreikanten $M(DAB)$ und $M(D_1A_1B_1)$ die Winkel $DMA = D_1M_1A_1$, weil $\frac{DA}{MA} = \frac{D_1A_1}{MA_1}$; ferner die Scheitelwinkel $AMB = A_1MB_1$; also sind auch die Flächenwinkel $A(MD)B = A_1(MD_1)B_1$ u. s. w. *b*) Steht der gem. Strahl senkrecht auf 𝔈, so fallen die zweiten Paare mit den ersten zusammen; und *c*) liegt ausserdem die Ebene 𝔈 in der Mitte zwischen D und D_1, oder ist dieselbe unendlich entfernt, so gibt es unzählige Paare von beiden Arten.

Lehrsatz 9.

In zwei perspektivischen räumlichen Strahlbüscheln gibt es entweder nur ein einziges Paar entsprechende normale gleichseitige Dreikante, d. h. wo drei zueinander senkrechten Strahlen des einen drei ebensolche Strahlen des anderen entsprechen, oder es gibt unzählige solche Paare, welche eine Kante gemein haben, oder es gibt unzählige beliebige, d. h. jedem normalen gleichseitigen Dreikant des einen entspricht ein ebensolches des anderen Strahlbüschels.

Beweis. *a*) Der gem. Strahl DD_1 stehe schief auf 𝔈. Legt man durch D, D_1 eine Ebene senkrecht auf 𝔈, so liegen in dieser Ebene zwei entsprechende ebene Strahlbüschel; die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel dieser letzteren bilden zwei Paar entsprechende Kanten r, r_1; t, t_1, und diejenigen zwei Strahlen s, s_1, welche auf jener Ebene senkrecht stehen, bilden das dritte Paar Kanten der in Rede stehenden Dreikante. Denkt man sich nun, die Kanten a, b, c und a_1, b_1, c_1 eines neuen Paares entsprechender normaler gleichseitiger Dreikante schnitten die Ebene 𝔈 in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so seien γ, β, α, M die Mittelpunkte der Strecken $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bc}$, DD_1; weil nun Winkel $\mathfrak{a}D\mathfrak{b} = \mathfrak{a}D_1\mathfrak{b} = R$, so wäre die Strecke $D\gamma = \mathfrak{a}\gamma = \mathfrak{b}\gamma = D_1\gamma$, also $M\gamma$, und aus demselben Grunde auch $M\beta$, $M\alpha$, senkrecht auf

DD_1; folglich müssten $M\gamma$, $M\beta$, $M\alpha$ in einer Ebene, und die Punkte γ, β, α in einer Geraden liegen, was nur dann möglich ist, wenn einer der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, z. B. $\mathfrak{c}$, unendlich entfernt ist. Dann aber wäre $c \| c_1$, die Ebenen $D\mathfrak{ab}$, $D_1\mathfrak{ab}$, beide senkrecht auf $\mathfrak{E}$, würden also, da durch DD_1 nur eine senkrechte Ebene auf $\mathfrak{E}$ gefällt werden kann, mit der vorhin gedachten Ebene, und die neuen Dreikante mit den früheren zusammenfallen. *b*) Steht DD_1 senkrecht auf $\mathfrak{E}$, so bilden je zwei rechtwinklige und mit $\mathfrak{E}$ parallele Strahlen nebst DD_1 ein normales gleichseitiges Dreikant, welchem ein gleiches im anderen Strahlbüschel entspricht; und *c*) liegt $\mathfrak{E}$ mitteninne zwischen D, D_1 oder ist unendlich entfernt, so gibt es unzählige beliebige solche Dreikante.

Erklärungen.

Eine Ebene und ein räumlicher Strahlbüschel heissen collinear oder reciprok, wenn eine zweite Ebene mit der ersteren bezüglich collinear oder reciprok und mit dem letzteren (in Ansehung der betreffenden Elementenpaare) perspektivisch ist.

Zwei räumliche Strahlbüschel heissen collinear oder reciprok, wenn bezüglich entweder beide mit derselben Ebene collinear oder beide reciprok, oder aber der eine mit einer Ebene collinear, der andere mit derselben Ebene reciprok ist.

Ohne weitere Erläuterung wird man nun die folgenden Sätze für richtig befinden.

Lehrsatz 10.

In zwei collinearen räumlichen Strahlbüscheln entspricht jedem ebenen Strahlbüschel des einen ein demselben projektivischer ebener Strahlbüschel des anderen, und jedem Ebenenbüschel des ersten ein demselben projektivischer Ebenenbüschel des letzten; und umgekehrt.

Zusatz. Zwei räumliche Strahlbüschel, deren Strahlen paarweise gleiche Winkel einschliessen, sind collinear, und jenachdem dieselben congruent oder symmetrisch sind, sollen sie gleichliegend oder ungleichliegend gleich heissen.

Lehrsatz 11.

In zwei reciproken räumlichen Strahlbüscheln entspricht einem jeden ebenen Strahlbüschel des einen ein demselben projektivischer Ebenenbüschel des anderen, und einem jeden Ebenenbüschel des ersten ein demselben projektivischer ebener Strahlbüschel des letzten; und umgekehrt.

Zusatz. Können zwei räumliche Strahlbüschel so gelegt werden, dass einem jeden Strahle des einen eine gegen ihn senkrechte Ebene des anderen entspricht, so gilt dasselbe auch gegenseitig, und jedem ebenen Strahlbüschel des einen entspricht ein demselben projektivisch-gleicher Ebenenbüschel des anderen; dieselben sind

daher in jeder beliebigen Lage reciprok, und zwar sollen sie gleiche reciproke räumliche Strahlbüschel heissen.

Lehrsatz 12.

Ist bei irgend einer Anzahl n Gebilden — Ebenen und räumliche Strahlbüschel — in irgend einer bestimmten Ordnung genommen, der Reihe nach jedes Gebilde mit dem darauf folgenden collinear oder reciprok, so ist jedes mit jedem und namentlich auch das erste mit dem letzten collinear oder reciprok.

Lehrsatz 13.

In zwei concentrischen collinearen räumlichen Strahlbüscheln müssen sich allemal wenigstens ein Paar entsprechende Strahlen und ein Paar entsprechende Ebenen vereinigen.

Beweis nach Seite 25, 1. des 8ten Thls. des Archivs mittels zweier aufeinandergelegten Ebenen, deren eine mit dem einen, die andere mit dem anderen räumlichen Strahlbüschel perspektivisch ist.

Lehrsatz 14.

In zwei beliebig liegenden collinearen räumlichen Strahlbüscheln sind wenigstens ein Paar entsprechende Strahlen und ein Paar entsprechende Ebenen parallel.

Beweis nach dem vorigen Satze mittels eines dritten Strahlbüschels, welcher mit dem einen concentrisch ist und dessen Strahlen denen des anderen parallel sind.

Lehrsatz 15.

In zwei collinearen räumlichen Strahlbüscheln gibt es allemal ein Paar entsprechende normale gleichseitige Dreikante, d. h. drei zu einander rechtwinkligen Strahlen des einen entsprechen drei eben solche Strahlen im anderen.

Beweis. Es seien D, D_1 irgend zwei collineare räumliche Strahlbüschel, nämlich

$$D(a, b, c, d....) = D_2(a_1, b_1, c_1, d_1....);$$

man denke sich einen mit D_1 concentrischen räumlichen Strahlbüschel D_2, dessen Ebenen α_2, β_2, γ_2, δ_2.... auf den Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1.... des ersteren senkrecht stehen; rechne jetzt diese Ebenen auch zu D_1 und denke sich die denselben in D entsprechenden Ebenen α, β, γ, δ....; endlich denke man sich einen mit D concentrischen Strahlbüschel D', dessen Strahlen a', b', c', d'.... auf den Ebenen α, β, γ, δ.... senkrecht stehen; so ist, weil nach Lehrsatz 11. Zusatz. die Strahlbüschel D_1 und D_2, D und D' reciprok sind:

$$D(a, b, c, d....) = D_1 (a_1, b_1, c_1, d_1....) = D_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2....) =$$
$$D_1(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2....) = D(\alpha, \beta, \gamma, \delta.....) = D'(a', b', c', d'.....),$$

also auch

$$D(a, b, c, d....) = D'(a', b', c', d'....).$$

So oft nun in diesen letzten Strahlbüscheln D, D' zwei entsprechende Strahlen e, e' sich vereinigen, muss die zu D gehörige, auf (ee') senkrechte Ebene ε in D_1 einer Ebene ε_2 entsprechen, welche auf einem Strahle e_1 dieses Strahlbüschels senkrecht steht, der seinerseits wieder jenem ersten Strahle e oder (ee') von D entspricht. Nun aber gibt es nach Lehrsatz 13. allemal ein Paar solche Strahlen e, e'; also gibt es in den Strahlbüscheln D, D_1 auch allemal zwei sich entsprechende Strahlen, welche auf zwei Ebenen senkrecht stehen, die sich ebenfalls entsprechen. Die diesen Ebenen angehörigen entsprechenden projektivischen Strahlbüschel aber enthalten allemal zwei entsprechende rechte Winkel; also bilden die Schenkel des einen dieser Winkel mit dem auf ihrer Ebene senkrechten Strahle ein normales gleichseitiges Dreikant, welchem ein ebensolches Dreikant im anderen Strahlbüschel entspricht.

Die entsprechenden Kanten und Seiten dieser beiden Dreikante sollen die **entsprechenden drei Paar Normalstrahlen** und die **entsprechenden drei Paar Normalebenen** der collinearen räumlichen Strahlbüschel heissen.

Lehrsatz 16.

Zwei collineare räumliche Strahlbüschel lassen sich allemal und zwar auf unzählige Weisen in perspektivische Lage bringen; doch fallen in jeder dieser Lagen immer nur ein bestimmtes Paar entsprechende Normalebenen aufeinander.

Beweis. Es seien D, D_1 (Taf. V. Fig. 3.) irgend zwei collineare räumliche Strahlbüschel, deren Mittelpunkte eine beliebig gewählte feste Lage haben; r, r_1; s, s_1; t, t_1 seien die entsprechenden drei Paar Normalstrahlen; und ϱ, ϱ_1; σ, σ_1; τ, τ_1 die denselben gegenüberliegenden entsprechenden drei Paar Normalebenen. Man denke sich beide Strahlbüschel so gedreht, dass ein Paar dieser Ebenen, z. B. ϱ, ϱ_1, sich vereinigen, und sodann wieder den einen der in $(\varrho\varrho_1)$ liegenden entsprechenden ebenen Strahlbüschel dergestalt um seinen festen Mittelpunkt D_1 gedreht, dass irgend zwei entsprechende Strahlen r', r_1' derselben mit der Verbindungslinie der festen Punkte D, D_1 zusammenfallen. Diess vorausgesetzt, so müssen diese ebenen Strahlbüschel perspektivisch sein, und sämmtliche entsprechende Ebenenpaare von D, D_1, welche durch die parallelen Strahlen r, r_1 gehen, werden sich in lauter mit r, r_1 parallelen Geraden, welche auf dem perspektivischen Durchschnitt jener ebenen Strahlbüschel, also in einer Ebene $\mathfrak{E}$ liegen, durchschneiden. Kann man nun zeigen, dass ausser r, r_1 noch irgend ein zweites Paar entsprechende Strahlen, welche nicht auf der Ebene $(\varrho\varrho_1)$ liegen, sich in einem Punkte schneiden, oder dass ausser den Ebenen $r'r$ und $r_1'r_1$, ϱ und ϱ_1

noch irgend ein Paar entsprechende sich vereinigen, so werden, da zwei proj. Ebenenbüschel durch drei Paar entsprechende Ebenen bestimmt sind, je zwei entsprechende Ebenen, welche durch den Strahl DD_1 gehen, sich vereinigen, und demnach je zwei entsprechende Strahlen von D, D_1 sich in der Ebene $\mathfrak{E}$ schneiden müssen.

Zu diesem Behufe denke man sich durch den Strahl r' eine Ebene gelegt, welche die Ebenen σ, τ in den Strahlen s', t' schneidet, und durch r_1' die der ersteren entsprechende Ebene, welche die Ebenen σ_1, τ_1 in den entsprechenden Strahlen s_1', t_1' schneidet. Jetzt bestimme man auf der Geraden DD_1 zwei Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ dergestalt, dass

$$\frac{D\mathfrak{p}}{D_1\mathfrak{p}}=\frac{D\mathfrak{q}}{D_1\mathfrak{q}}=\frac{\cot sr'}{\cot s_1r_1'},$$

und errichte in diesen Punkten in der Ebene $(\varrho\varrho_1)$ auf DD_1 zwei Senkrechte p, q. Ferner bestimme man auf DD_1 zwei andere Punkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ so, dass

$$\frac{D\mathfrak{m}}{D_1\mathfrak{m}}=\frac{D\mathfrak{n}}{D_1\mathfrak{n}}=\frac{\cot st'}{\cot s_1t_1'},$$

und beschreibe in der Ebene $(\varrho\varrho_1)$ über der Strecke $\mathfrak{mn}$ als Durchmesser einen Kreis K. Es sind nun bloss drei Fälle möglich: *a*) die Punkte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ schliessen die Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ein, und die Geraden p, q schneiden den Kreis K; *b*) die Punkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ werden von den Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ eingeschlossen, und die Geraden p, q schneiden K nicht; *c*) die Punktenpaare $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ schliessen sich gegenseitig aus, und die Geraden p, q schneiden K nicht; denn der Fall, dass $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ zusammenfallen, lässt sich immer durch eine andere Wahl der Strahlen t', t_1' vermeiden. Man bemerke hierbei, dass sowohl $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ als $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ mit den Punkten D, D_1 harmonisch sind.

a) Es schneide p den Kreis K in $\mathfrak{s}$; so denke man sich die in $(\varrho\varrho_1)$ liegenden ebenen Strahlbüschel (und zugleich die räumlichen Strahlbüschel selbst) so lange um die Punkte D, D_1 gedreht, bis die Strahlen s, s_1 durch den Punkt $\mathfrak{s}$ gehen; dann ist

$$\frac{\cot \mathfrak{p}D\mathfrak{s}}{\cot \mathfrak{p}D_1\mathfrak{s}}=\operatorname{tng}\mathfrak{p}Dt.\operatorname{tng}\mathfrak{p}D_1s_1=\frac{\mathfrak{p}D}{\mathfrak{ps}}:\frac{\mathfrak{p}D'}{\mathfrak{ps}}$$

$$=\frac{D\mathfrak{p}}{D_1\mathfrak{p}}=\frac{\cot sr'}{\cot s_1r_1'}=\operatorname{tng}tr'.\operatorname{tng}s_1r_1'.$$

Aber $\operatorname{tng}tr'.\operatorname{tng}s_1r_1'$ ist das Produkt der Tangenten der Winkel, welche zwei entsprechende Strahlen der gedachten ebenen Strahlbüschel mit zwei ungleichnamigen Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel einschliessen, und diess ist nach Archiv Thl. IV. S. 250. 6. constant; also werden durch diese letzte Drehung längs der Geraden DD_1 wiederum zwei entsprechende Strahlen vereinigt.

Nach einem bekannten Satze hat jeder Punkt $\mathfrak{s}$ des Kreises K die Eigenschaft, dass

$$\frac{D\mathfrak{s}}{D_1\mathfrak{s}}=\frac{D\mathfrak{m}}{D_1\mathfrak{m}}=\frac{D\mathfrak{n}}{D_1\mathfrak{n}}=\frac{\cot st'}{\cot s_1t_1'},$$

also ist

$$D\mathfrak{s}\,.\,\mathrm{tng}\,st'=D_1\mathfrak{s}\,.\,\mathrm{tng}\,s_1t_1'.$$

Die den Ebenen τ, τ_1 gemeinsame Gerade steht im Punkte $\mathfrak{s}$ auf $(\varrho\varrho_1)$ senkrecht, und sind nun $\mathfrak{t}'$, $\mathfrak{t}_1'$ die Punkte, wo diese Gerade von den Strahlen t', t_1' geschnitten wird, so ist $\mathfrak{s}\mathfrak{t}'=D\mathfrak{s}\,.\,\mathrm{tang}\,st'$ $=D_1\mathfrak{s}\,.\,\mathrm{tng}\,s_1t_1'=\mathfrak{s}\mathfrak{t}_1'$; entweder also schneiden sich die Strahlen t', t_1' in einem Punkte jener Geraden, oder die Punkte $\mathfrak{t}'$, $\mathfrak{t}_1'$ liegen auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{s}$ gleichweit davon entfernt; im letzten Falle aber bilden die Ebenen $D\mathfrak{t}'D_1$, $D\mathfrak{t}_1'D_1$ gleiche Winkel mit $(\varrho\varrho_1)$; man kann also den räumlichen Strahlbüschel D_1 dergestalt um seinen Mittelpunkt drehen, dass drei Paar entsprechende Ebenen, nämlich ϱ und ϱ_1, $rD\mathfrak{p}$ und $r_1D_1\mathfrak{p}$, $D\mathfrak{t}'D_1$ und $D\mathfrak{t}_1'D_1$ sich decken. Folglich sind die räumlichen Strahlbüschel D, D_1 in beiden Fällen perspektivisch.

b) Werden die Punkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ von den Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ eingeschlossen, so denke man sich die Strahlbüschel D, D_1 so gedreht, dass jetzt die Ebenen τ, τ_1 zusammenfallen und die Strahlen t', t_1' sich längs DD_1 vereinigen, und lasse jetzt die Strahlen s, s_1 dieselbe Rolle wie früher, und die Strahlen r', r_1' diejenige der Strahlen t', t_1' spielen. Dann aber vertauschen die Winkel sr' und st', s_1r_1' und s_1t_1' gegenseitig ihre Rollen, und folglich die nunmehrigen Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ bezüglich mit den früheren Punkten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ ihre Stellen; der neue Kreis K wird also von den neuen Geraden p, q geschnitten, und folglich lassen sich die Strahlbüschel D, D_1 perspektivisch legen.

c) Schliessen die Punktenpaare $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sich gegenseitig aus, so muss, wenn z. B. die Strecke $D\mathfrak{q}$ kleiner als $D_1\mathfrak{q}$ ist, dagegen $D\mathfrak{n}$ grösser als $D_1\mathfrak{n}$ sein, folglich

$$\mathrm{W.}\ sr' > \mathrm{W.}\ s_1r_1' \text{ und } \mathrm{W.}\ st' < s_1t_1',$$

wo immer nur spitze Winkel zu verstehen sind. Ist nun in Taf. V. Fig. 4. rst ein normales gleichseitiges sphärisches Dreieck, dessen Seiten von einem grössten Kreise der Kugel in den Punkten r', s', t' geschnitten werden, so ist bekanntlich

$$\mathrm{tng}\,st'r'\,.\,\sin st'=\mathrm{tng}\,sr' \text{ und } \mathrm{tng}\,rt's'\,.\,\sin rt'=\mathrm{tng}\,rs'$$

oder

$$\mathrm{tng}\,st'r'\,.\,\cos st'=\mathrm{tng}\,rs',$$

also

$$\mathrm{tng}\,sr'=\mathrm{tng}\,rs'\,.\,\mathrm{tng}\,st'.$$

Verbindet man hiermit noch

$$\mathrm{tng}\,s_1r_1'=\mathrm{tng}\,r_1s_1'\,.\,\mathrm{tng}\,s_1t_1'$$

und nimmt, was offenbar erlaubt ist, die jetzige Bezeichnung im Sinne der früheren, so sieht man, dass, wenn

$$\mathrm{W.}\ sr' > \mathrm{W.}\ s_1r_1' \text{ und } \mathrm{W.}\ st' < \mathrm{W.}\ s_1t_1'$$

ist, dann nothwendig W. $rs' >$ W. r_1s_1' sein muss, während auch

$$\text{W. } rt' > \text{W. } r_1t_1'$$

ist. Auch bemerke man, dass dann der stumpfe W. ts' grösser als der stumpfe t_1s_1', also der spitze W. ts' kleiner als der spitze t_1s_1' und zugleich W. $tr' <$ W. t_1r_1' ist.

Können also im Falle $c)$ die Strahlbüschel D, D_1 nicht perspektivisch werden, so lange man die Ebenen ϱ, ϱ_1 oder τ, τ_1 sich decken lässt, so müssen sie es nothwendig werden, wenn die Ebenen σ, σ_1 sich decken.

Und umgekehrt: sind dieselben der genannten Lage fähig, indem die Ebenen ϱ, ϱ_1 sich decken, so ist nothwendig der Fall $a)$ vorhanden, also

$$\text{W. } sr' \gtrless \text{W. } s_1r_1' \text{ und zugleich W. } st' \gtrless \text{W. } s_1t_1';$$

$$\text{W. } tr' \lessgtr \text{W. } t_1r_1' \quad ,, \quad ,, \quad \text{W. } ts' \lessgtr \text{W. } t_1s_1';$$

$$\text{W. } rs' \gtrless \text{W. } r_1s_1' \quad ,, \quad ,, \quad \text{W. } rt' \lessgtr \text{W. } r_1t_1';$$

es sind also die Strahlbüschel der perspektivischen Lage nicht fähig, weder wenn die Ebenen τ, τ_1 noch wenn σ, σ_1 zur Deckung gebracht werden. Endlich leuchtet ein, dass dieselben in der perspektivischen Lage verharren, wenn man ihren Mittelpunkten immer andere Lagen gibt, aber dafür sorgt, dass ihre vereinigten Ebenenpaare vereinigt bleiben.

Erklärung.

In zwei reciproken räumlichen Strahlbüscheln soll jeder **Strahl die Polare der ihm entsprechenden Ebene**, und **jede Ebene die Polare des ihr entsprechenden Strahles**; und wenn erstere concentrisch sind, sollen je zwei Strahlen einer Ebene, von denen der eine in der Polare des anderen liegt, **zugeordnete Polaren dieser Ebene**, und je zwei Ebenen, von denen die eine die Polare der anderen enthält, **zugeordnete Polaren des Strahles**, in welchem sie sich schneiden, genannt werden. Entsprechen sich je zwei Elementenpaare in doppeltem Sinne, so wird diess durch das Beiwort „harmonisch" angedeutet, und die Strahlbüschel heissen dann **involutorisch**.

Die folgenden drei Sätze wird man ohne Schwierigkeit aus den Sätzen 11, 5 und 6 abzuleiten wissen.

Lehrsatz 17.

In zwei concentrischen reciproken räumlichen Strahlbüscheln bilden die sämmtlichen Paare zugeordneter Polaren einer Ebene, in bestimmtem Sinne genommen, zwei projektivische ebene Strahlbüschel, und die sämmtlichen Paare zugeordneter Polaren eines Strahls, in bestimmtem Sinne genommen, zwei projektivische Ebenenbüschel, und zwar sind jene ebenen Strahl-

büschel sowohl als diese Ebenenbüschel involutorisch, wenn die räumlichen Strahlbüschel involutorisch sind.

Lehrsatz 18.

In zwei concentrischen reciproken räumlichen Strahlbüscheln gibt es entweder keinen oder nur einen oder unzählige Strahlen, welche auf ihren Polaren liegen, und diese Strahlen bilden entweder einen Kegel des zweiten Grades oder zwei Ebenen oder nur eine einzige Ebene.

Lehrsatz 19.

In zwei involutorischen räumlichen Strahlbüscheln gibt es entweder keinen oder unzählige Strahlen, welche auf ihren Polaren liegen, und diese Strahlen bilden allemal einen Kegel des zweiten Grades, dessen Berührungsebenen ihre Polaren sind.

Lehrsatz 20.

Liegen zwei reciproke räumliche Strahlbüschel beliebig im Raume, so gibt es entweder in keinem von beiden einen Strahl, der mit seiner Polare parallel ist, oder es gibt in jedem nur einen solchen Strahl, und diese beiden Strahlen sind unter sich parallel, oder es gibt in jedem unzählige solche Strahlen; und zwar bilden diese Strahlen entweder zwei Kegel des zweiten Grades, deren Strahlen paarweise parallel sind, oder zwei Paar parallele Ebenen, oder ein einziges Paar solche Ebenen.

Beweis. Denn denkt man sich einen dritten räumlichen Strahlbüschel D_2, welcher mit dem einen der in Rede stehenden, z. B. D, concentrisch ist und dessen Strahlen $a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots$ mit den Strahlen $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ des anderen D_1 parallel sind, so sind D und D_2 reciprok; so oft nun ein Strahl a_2 auf seiner Polare α liegt, wird der Strahl a_1 mit seiner Polare α parallel sein, und ist a der mit a_2 vereinigte Strahl von D, so muss auch die dem D_1 angehörige Polare α_1 von a durch den Strahl a_1 gehen, also auch a mit seiner Polare parallel sein. Folglich ergibt sich unser Satz ganz einfach aus Lehrsatz 18.

Lehrsatz 21.

In zwei reciproken räumlichen Strahlbüscheln gibt es allemal ein Paar entsprechende normale gleichseitige Dreikante, d. h. die Kanten des einen sind die Polaren der Seitenflächen des anderen.

Beweis. Denn ist

$$D(a, b, c, d \ldots) \equiv D_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \ldots),$$

und denkt man sich einen mit D_1 concentrischen räumlichen Strahl-

büschel D_2, dessen Strahlen a_2, b_2, c_2, d_2.... auf den Ebenen α_1, β_1, γ_1, δ_1.... senkrecht sind, rechnet jetzt diese Strahlen zu D_1 und denkt sich wieder einen mit D concentrischen Strahlbüschel D', dessen Strahlen a', b', c', d'.... auf denjenigen Ebenen α, β, γ, δ.... von D senkrecht sind, welche den Strahlen a_2, b_2, c_2, d_2... entsprechen, so ist

$$D(a, b, c, d....) = D_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1....) = D_2(a_2, b_2, c_2, d_2....)$$
$$= D_1(a_2, b_2, c_2, d_2....) = D(\alpha, \beta, \gamma, \delta....) = D'(a', b', c', d'....),$$

also

$$D(a, b, c, d....) = D'(a', b', c', d'....).$$

So oft nun in den collinearen Strahlbüscheln D, D' zwei entsprechende Strahlen e, e' sich vereinigen, muss auch der auf (ee') senkrechten Ebene ε von D ein Strahl e_2 in D_1 entsprechen, welcher auf einer Ebene ε_1 von D_1 senkrecht steht, die ihrerseits wieder dem Strahle (ee') von D entspricht. Nun aber gibt es nach Lehrsatz 13. allemal zwei solche Strahlen e, e'; also gibt es in D allemal einen Strahl und eine darauf senkrechte Ebene, deren Polaren in D_1 bezüglich eine Ebene und ein darauf senkrechter Strahl sind. Erstere mögen r, ϱ, letztere ϱ_1, r_1 heissen. Sämmtliche der Ebene ϱ angehörige Strahlen von D bilden einen ebenen Strahlbüschel B, und deren Polaren einen mit B projektivischen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}_1$, dessen Achse r_1 ist, dessen Ebenen also auf ϱ_1 senkrecht stehen, und $\mathfrak{A}_1$ schneidet ϱ_1 in einem ebenen Strahlbüschel B_1, der also auch mit B projektivisch ist. Aber B, B_1 haben allemal zwei entsprechende rechte Winkel; also gibt es in B zwei rechtwinklige Strahlen s, t, denen in $\mathfrak{A}_1$ zwei Ebenen σ_1, τ_1 entsprechen, welche ebenfalls einen rechten Flächenwinkel einschliessen; und somit gibt es in D drei zu einander rechtwinklige Strahlen r, s, t, denen in D_1 drei zu einander rechtwinklige Ebenen ϱ_1, σ_1, τ_1 entsprechen, und ϱ, σ, τ sind die Verbindungsebenen von s und t, r und t, r und s; und sind r_1, s_1, t_1 die Durchschnittslinien von σ_1 und τ_1, ϱ_1 und τ_1, ϱ_1 und σ_1, so müssen auch ϱ, σ, τ und r_1, σ_1, τ_1 sich bezüglich entsprechen.

Erklärung.

Die so erhaltenen drei Strahlen r, s, t und deren Polaren ϱ_1, σ_1, τ_1 (oder r_1, s_1, t_1 und ϱ, σ, τ) sollen **drei polarische Normalstrahlen und Normalebenen**, und je zwei Strahlen r, r_1; s, s_1; t, t_1 **zugeordnete Normalstrahlen**, je zwei Ebenen ϱ, ϱ_1; σ, σ_1; τ, τ_1 **zugeordnete Normalebenen** der reciproken Strahlbüschel D, D_1 heissen.

Lehrsatz 22.

Zwei concentrische reciproke räumliche Strahlbüschel sind involutorisch, wenn irgend zwei Strahlen, welche nicht, oder wenn irgend drei Strahlen, welche auf ihren Polaren, doch nicht in einer Ebene, liegen, denselben in doppeltem Sinne entsprechen; und daher auch, wenn ihre zugeordneten Normalstrahlen sich paarweise vereinigen.

Beweis nach Lehrsatz 1. mittels zweier auf einander gelegter Ebenen, welche einzeln mit den beiden Strahlbüscheln perspektivisch sind.

Erklärung.

Die vereinigten Normalstrahlen (rr_1), (ss_1), (tt_1) oder r, s, t zweier involutorischen räumlichen Strahlbüschel sollen die Achsen, und die vereinigten Normalebenen $(\varrho\varrho_1)$, $(\sigma\sigma_1)$, $(\tau\tau_1)$ oder ϱ, σ, τ sollen die Achsenebenen dieser Strahlbüschel heissen; ferner jede Ebene, welche durch eine Achse geht, eine Durchmesserebene dieser Achse, jeder Strahl einer Achsenebene ein Achsenstrahl dieser Ebene. Die Hauptstrahlen der von den zug. harm. Polaren einer Durchmesserebene gebildeten Involution oder auch die von der betreffenden Achse gleichweit abstehenden zug. harm. Polaren bilden zwei Winkel; derjenige von beiden, welcher von der Achse gehälftet wird, heisst ein Durchmesserwinkel, und die zwei zugeordneten Durchmesserebenen zugehörigen Durchmesserwinkel heissen selber zugeordnete. Die beiden einer Achsenebene zugehörigen Durchmesserwinkel heissen Achsenwinkel in Bezug auf die Achse, von welcher sie gehälftet werden, und ihre Schenkel Scheitelkanten der involutorischen Strahlbüschel. Ebenso bilden die Hauptebenen der von den zug. harm. Polaren eines Achsenstrahls gebildeten Involution von Ebenen oder auch die von der Achsenebene gleichweit abstehenden zug. harm. Polaren zwei Winkel; derjenige von beiden, welcher von der Achsenebene gehälftet wird, heisst ein Achsenstrahlwinkel, und die zwei zug. Achsenstrahlen zugehörigen Achsenstrahlwinkel heissen selber zugeordnete. Die beiden einer Achse zugehörigen Achsenstrahlwinkel sind den beiden Achsenwinkeln gleich, welche der gegenüberliegenden Achsenebene angehören; ihre Schenkelebenen können Scheitelebenen der Strahlbüschel genannt werden.

Erzeugen diese letzteren einen Kegel, so sind die Achsen und Achsenebenen derselben zugleich auch Achsen und Achsenebenen des Kegels. Die innerhalb des letzteren liegende Achse heisst die innere und die ihr entsprechende Achsenebene die äussere; von den beiden Achsenwinkeln, die der inneren Achse zugehören, heisst der grössere der Haupt-, der kleinere der Nebenachsenwinkel, und der spitze, welcher in der äusseren Achsenebene liegt, der äussere Achsenwinkel; Haupt- oder Nebenachsenebene sagt man, jenachdem dieselbe den Haupt- oder Nebenachsenwinkel enthält; und auch die entsprechende Achse heisst Haupt- oder Nebenachse. Erzeugen aber die Strahlbüschel keinen Kegel, so sollen die drei spitzen Achsenwinkel je nach ihrer Grösse Haupt-, Mittel- und Nebenachsenwinkel, die sie enthaltenden Achsenebenen Haupt-, Mittel- und Nebenachsenebene, und die darauf senkrechten Achsen bezüglich Haupt-, Mittel- und Nebenachse heissen. Kommt nur eine einzige Achse in Betracht, so wird derjenige Achsenwinkel, dessen Schenkel wirkliche Scheitelkanten des Kegels sind, und wenn kein Kegel vorhanden ist, der grössere der Achsenwinkel, welche dieser Achse zugehören, Haupt-, der kleinere Nebenachsenwinkel genannt werden.

Lehrsatz 23.

Der äussere Achsenwinkel und der Mittelachsenwinkel gehören allemal der Nebenachse an; und der Mittelachse gehören allemal der Haupt- und der Nebenachsenwinkel an.

Beweis. Man denke sich *a*) wenn ein Kegel erzeugt wird, auf die innere Achse, *b*) wenn keiner erzeugt wird, auf irgend eine Achse eine Ebene senkrecht gelegt, so erhält man zwei involutorische Ebenen, deren Mittelpunkt der Fusspunkt jener Achse ist und deren Achsen mit den beiden anderen Achsen der involutorischen Strahlbüschel parallel sind. Ausserdem ist der von der grösseren Achse der Ebenen gehälftete kleinste Winkel, den zwei zug. Durchmesser derselben einschliessen, demjenigen Achsenwinkel gleich, welcher der mit jener Ebene parallelen Achsenebene und der mit der grösseren Achse der Ebenen parallelen Achse der Strahlbüschel angehört. Bezeichnet man nun die Hälfte jenes kleinsten Winkels mit γ, die halbe grosse Achse der Ebenen mit A, die halbe kleinere mit B, den halben Achsenwinkel, welcher jener ersten Achse angehört und die Strecke A bestimmt, mit α und den halben anderen, welcher die Strecke B bestimmt, mit β, endlich den Abstand der Mittelpunkte der Ebenen und der Strahlbüschel von einander mit h; so ist

$$A = h . \operatorname{tng} \alpha, \quad B = h . \operatorname{tng} \beta,$$

und nicht nur im Falle *a*), wo A und B einer Ellipse angehören, sondern auch im Falle *b*), wie aus der am Ende des §. 1. entwickelten Gleichung (2) hervorgeht, wenn $A_1 = \gamma$, $B_1 = 0$ gesetzt wird:

$$\operatorname{tng} \gamma = \frac{B}{A} = \frac{\operatorname{tng} \beta}{\operatorname{tng} \alpha}.$$

Da nun $B < A$, so ist auch $\beta < \alpha$ und $\gamma < 45^0$. Hiermit ist also bewiesen, dass im Falle *a*) von den beiden Achsenwinkeln, welche auf der äusseren Achsenebene liegen, derjenige ein spitzer, d. h. der äussere Achsenwinkel ist, welcher der auf der Ebene von β stehenden Achse, d. h. der Nebenachse angehört. Im Falle *b*) denke man sich in Taf. V. Fig. 4. die Bogen rs_1, rt'; st', sr'; tr', ts_1 als die Maasse der halben Achsenwinkel, welche bezüglich den Achsen r, s, t angehören; so ergibt sich aus dem Vorigen, dass wenn $sr' < st'$ ist, $rs_1 < 45^0$ sein muss. Ist nun $st' < 45^0$, so ist $ts_1 < tr'$ aus demselben Grunde, als $rs_1 < 45^0$ ist, wenn $sr' < st'$; und folglich ist $rs_1 > sr'$; also messen die doppelten Bogen st', rs_1 und sr' drei spitze Achsenwinkel, von denen der erste der grösste und der letzte der kleinste ist. Ist dagegen $st' > 45^0$, so ist ausser rs_1 auch $rt' < 45^0$. Es sei nun $rs_1 < rt'$; so ist $sr' < 45^0$, und da $rt' < 45^0$, so ist $tr' < ts_1$, also $sr' > rs_1$; die doppelten Bogen rt', sr', rs_1 messen also drei spitze Winkel, von denen der erste der grösste, der letzte der kleinste ist. Oder ist endlich $rs_1 > rt'$, während $st' > 45^0$ ist, so ist $tr' < 45^0$, und weil von vornherein $sr' < st'$ ist, so ist $tr' > rt'$; also messen wieder die doppelten Bogen: rs_1 den grössten, tr' den mittleren und rt' den kleinsten spitzen Achsenwinkel. Unser Satz ist also vollständig erwiesen.

Anmerkung. Vergleicht man die Relation $\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\gamma$ mit einer im Beweise von Lehrsatz 16. gebrauchten, so sieht man sogleich, dass die sechs Scheitelkanten zweier involutorischer räumlicher Strahlbüschel drei zu drei in vier Ebenen liegen.

In der Figur, welche der letzten Betrachtung zu Grunde lag, seien A_1, B_1 irgend zwei halbe zugeordnete Durchmesserlängen der involutorischen Ebenen, α_1, β_1 die dieselben bestimmenden halben Durchmesserwinkel der involutorischen Strahlbüschel, und φ, α', β' die Winkel, welche jene Durchmesser bezüglich mit einander und mit der grossen Achse einschliessen, oder, was offenbar einerlei ist, die Winkel, welche die betreffenden Durchmesserebenen bezüglich mit einander und mit der den Winkel α enthaltenden Achsenebene einschliessen; so ist

$$A_1 = h . \operatorname{tng}\alpha_1,\; B_1 = h . \operatorname{tng}\beta_1,\; A = h . \operatorname{tng}\alpha,\; B = h . \operatorname{tng}\beta;$$

und nach Archiv. Thl. IV. S. 273. und §. 1. ist

$$A_1^2 + B_1^2 = A^2 + B^2;\; A_1 . B_1 . \sin\varphi = A . B;\; A_1^2 : B_1^2 = \sin 2\alpha' : \sin 2\beta'.$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tng}^2\alpha_1 + \operatorname{tng}^2\beta_1 = \operatorname{tng}^2\alpha + \operatorname{tng}^2\beta; \quad (1)$$

$$\operatorname{tng}\alpha_1 . \operatorname{tng}\beta_1 . \sin\varphi = \operatorname{tng}\alpha . \operatorname{tng}\beta; \quad (2)$$

$$\operatorname{tng}^2\alpha_1 : \operatorname{tng}^2\beta_1 = \sin 2\alpha' : \sin 2\beta'. \quad (3)$$

Steht in dem Falle, dass die involutorischen Strahlbüschel einen Kegel erzeugen, eine Ebene nicht auf der inneren, sondern auf der Haupt- oder Nebenachse senkrecht, so erhält man statt der Ellipse eine Hyperbel, und da für diese

$$A_1^2 - B_1^2 = A^2 - B^2$$

ist, so ist auch

$$\operatorname{tng}^2\alpha_1 - \operatorname{tng}^2\beta_1 = \operatorname{tng}^2\alpha - \operatorname{tng}^2\beta \text{ u. s. w.}$$

Andererseits denke man sich jetzt wieder auf eine Achse r irgend zweier involutorischer Strahlbüschel eine Ebene $\mathfrak{E}$ senkrecht errichtet; es sei α der in der Achsenebene rs oder τ liegende, β der in der Achsenebene rt oder σ liegende, zur Achse r gehörige, halbe Achsenwinkel; a, a_1 seien irgend zwei zug. harm. Polaren oder Achsenstrahlen der Ebene τ, welche mit r bezüglich die Winkel α', α_1' einschliessen, und zwar sei α' grösser als α_1'; und F, F_1 seien irgend zwei zug. harm. Polaren des Achsenstrahles d, welche mit der Achsenebene τ bezüglich die Flächenwinkel φ, φ_1 einschliessen. Endlich seien A_1, B_1 bezüglich die den Strahlen a, a_1 zugehörigen halben Achsenstrahlwinkel. Es werde die Ebene $\mathfrak{E}$, welche auch jetzt zwei involutorische Ebenen enthält, von der Achse r im Punkte M, von den Achsenebenen τ und σ in den Geraden (Achsen) A, B, welche zugleich die betreffenden halben Achsenlängen vorstellen mögen, von den Achsenstrahlen a, a_1 in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ und von den Ebenen F, F_1 in den Geraden f, f_1 geschnitten, und es seien φ', φ_1' die Winkel, welche f, f_1 bezüglich mit A einschliessen. Diess vor-

ausgesetzt, so sind f, f_1 zwei zug. harm. Polaren des Achsenpunktes $\mathfrak{a}$ in Bezug auf die involutorischen Ebenen, also nach der am Ende des §. 1. und anderwärts entwickelten Gleichung (1) ist

$$\operatorname{tng}\varphi' . \operatorname{tng}\varphi_1' = \frac{B^2}{M\mathfrak{a} . \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1};$$

aber in dem Dreikant, dessen Scheitel $\mathfrak{a}$ und dessen Kanten a, A, f sind, ist der von den Ebenen $\mathfrak{E}$ und τ eingeschlossene Flächenwinkel ein rechter, φ' der von f und A; $R-\alpha'$ der von a und A eingeschlossene Kantenwinkel und φ der dem φ' gegenüberliegende Flächenwinkel; also ist

$$\operatorname{tng}\varphi' = \operatorname{tng}\varphi . \sin(R-\alpha') = \operatorname{tng}\varphi \cos\alpha'$$

und ebenso

$$\operatorname{tng}\varphi_1' = \operatorname{tng}\varphi_1 . \cos\alpha';$$

also

$$\operatorname{tng}\varphi' . \operatorname{tng}\varphi_1' = \operatorname{tng}\varphi . \operatorname{tng}\varphi_1 . \cos^2\alpha' = \frac{B^2}{M\mathfrak{a} . \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}.$$

Das Produkt $\operatorname{tng}\varphi . \operatorname{tng}\varphi_1$ ist für je zwei zug. harm. Polaren des Strahles a constant und der zweiten Potenz der Tangente des halben Achsenstrahlwinkels gleich, welcher dem Strahle a zugehört; $B = h . \operatorname{tng}\beta$, $M\mathfrak{a} = h . \operatorname{tng}\alpha'$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = h(\operatorname{tng}\alpha' \pm \operatorname{tng}\alpha_1')$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem die Strahlen a, a_1 auf verschiedenen Seiten oder auf einerlei Seite von τ liegen; also ist

$$\operatorname{tng}^2 A_1 . \cos^2\alpha' = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha' (\operatorname{tng}\alpha' \pm \operatorname{tng}\alpha_1')}$$

oder

$$\operatorname{tng}^2 A_1 = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\sin\alpha' . \cos\alpha' (\operatorname{tng}\alpha' \pm \operatorname{tng}\alpha_1')} = \frac{\operatorname{tng}^2\beta (1 + \operatorname{tng}^2\alpha')}{\operatorname{tng}\alpha' (\operatorname{tng}\alpha' \pm \operatorname{tng}\alpha_1')};$$

ebenso aber auch

$$\operatorname{tng}^2 B_1 = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\sin\alpha_1' . \cos\alpha_1' (\operatorname{tng}\alpha' \pm \operatorname{tng}\alpha_1')} = \frac{\operatorname{tng}^2\beta (1 + \operatorname{tng}^2\alpha_1')}{\operatorname{tng}\alpha_1' (\operatorname{tng}\alpha' \pm \operatorname{tng}\alpha_1')}. \quad (1$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tng}^2 A_1 \pm \operatorname{tng}^2 B_1 = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha' \pm \operatorname{tng}\alpha_1'} \left(\frac{1 + \operatorname{tng}^2\alpha'}{\operatorname{tng}\alpha'} \pm \frac{1 + \operatorname{tng}^2\alpha_1'}{\operatorname{tng}\alpha_1'} \right)$$

$$= \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha' \pm \operatorname{tng}\alpha_1'} \times \frac{\operatorname{tng}\alpha_1' \pm \operatorname{tng}\alpha' + \operatorname{tng}\alpha' . \operatorname{tng}\alpha_1' (\operatorname{tng}\alpha' \pm \operatorname{tng}\alpha_1')}{\operatorname{tng}\alpha' . \operatorname{tng}\alpha_1'}$$

folglich, da $\operatorname{tng}\alpha' . \operatorname{tng}\alpha_1' = \operatorname{tang}^2\alpha$ ist:

$$\operatorname{tng}^2 A_1 \pm \operatorname{tng}^2 B_1 = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}^2\alpha} (\operatorname{tng}^2\alpha \pm 1) = \operatorname{tng}^2\beta (1 \pm \cot^2\alpha).$$

$$\operatorname{tng}^2 A_1 . \operatorname{tng}^2 B_1 = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha' \cos^2\alpha' (\operatorname{tng}\alpha' \pm \operatorname{tng}\alpha_1')}$$
$$\times \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha_1' . \cos^2\alpha_1' (\operatorname{tng}\alpha' \pm \operatorname{tng}\alpha_1')}$$
$$= \frac{\operatorname{tng}^2\beta . \operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha' . \operatorname{tng}\alpha_1' (\sin\alpha' \cos\alpha_1' \pm \cos\alpha' \sin\alpha_1')^2} = \frac{\operatorname{tng}^2\beta . \operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}^2\alpha . \sin^2(\alpha' \pm \alpha_1')};$$

folglich, wenn ψ der von a, a_1 eingeschlossene Winkel ist:

$$\operatorname{tng} A_1 . \operatorname{tng} B_1 . \sin\psi = \operatorname{tng}^2\beta . \cot\alpha, \tag{3}$$

$$\operatorname{tng}^2 A_1 : \operatorname{tng}^2 B_1 = \frac{1}{\sin\alpha' . \cos\alpha'} : \frac{1}{\sin\alpha_1' . \cos\alpha_1'} = \sin 2\alpha_1' : \sin 2\alpha'. \tag{4}$$

Ist γ der halbe Achsenwinkel, welcher der Achsenebene ϱ und zwar der Achse s angehört, so ist, wie wir oben gesehen,

$$\operatorname{tng}\beta = \operatorname{tng}\alpha . \operatorname{tng}\gamma$$

oder auch

$$\operatorname{tng}\beta . \cot\alpha = \operatorname{tng}\gamma;$$

daher lassen sich die zweite und dritte der obigen Relationen auch so wie folgt ausdrücken:

$$\operatorname{tng}^2 A_1 \pm \operatorname{tng}^2 B_1 = \operatorname{tng}^2\beta \pm \operatorname{tng}^2\gamma,$$
$$\operatorname{tng} A_1 . \operatorname{tng} B_1 . \sin\psi = \operatorname{tng}\beta . \operatorname{tng}\gamma;$$

was auch an und für sich klar ist, da β und γ den, den zug. Achsenstrahlen s, r angehörigen halben Achsenstrahlwinkeln gleich sind, für welche $\sin\psi = 1$ ist.

Bedenkt man endlich, dass die Strahlen a, a_1 nur dann auf einerlei Seite der Achse r liegen, wenn die Achsenebene τ den erzeugten Kegel durchschneidet, so wird man sich vollkommen von folgenden Doppelsätzen überzeugt halten:

Lehrsatz 24.

In zwei involutorischen räumlichen Strahlbüscheln ist allemal

die Summe oder der Unterschied der zweiten Potenzen der Tangenten zweier zugeordneten halben Durchmesserwinkel, jenachdem die betreffende Achse innerhalb eines Kegels liegt oder nicht, von unveränderlichem Werthe, und zwar bezüglich der Summe oder dem Unterschiede der zweiten Potenzen der Tangenten der zu jener Achse gehörigen halben Achsenwinkel gleich.

die Summe oder der Unterschied der zweiten Potenzen der Tangenten zweier zugeordneten halben Achsenstrahlwinkel, jenachdem die betreffende Achsenebene ausserhalb eines Kegels liegt oder nicht, von unveränderlichem Werthe, und zwar bezüglich der Summe oder dem Unterschiede der zweiten Potenzen der Tangenten der an jene Achsenebene stossenden halben Achsenwinkel gleich.

Lehrsatz 25.

Das Produkt der Tangenten je zweier zugeordneter halber Durchmesserwinkel in den Sinus des von ihren Ebenen eingeschlossenen Winkels ist von unveränderlichem Werthe, und zwar dem Produkte der Tangenten der halben Achsenwinkel gleich, welche der betreffenden Achse angehören.

Das Produkt der Tangenten je zweier zugeordneter halber Achsenstrahlwinkel in den Sinus des von den Achsenstrahlen eingeschlossenen Winkels ist von unveränderlichem Werthe, und zwar dem Produkte der Tangenten der halben Achsenwinkel gleich, welche an die betreffende Achsenebene stossen.

Lehrsatz 26.

Die zweiten Potenzen der Tangenten je zweier zugeordneter halber Durchmesserwinkel verhalten sich umgekehrt wie die Sinus der doppelten Winkel, welche ihre Ebenen mit einer Achsenebene einschliessen.

Die zweiten Potenzen der Tangenten je zweier zugeordneter halber Achsenstrahlwinkel verhalten sich umgekehrt wie die Sinus der doppelten Winkel, welche die Achsenstrahlen mit einer Achse einschliessen.

Durch die Achse t und den der Achsenebene τ angehörigen Achsenstrahl a sei eine Durchmesserebene gelegt, und die Schenkel m, m' des dieser Ebene angehörigen Durchmesserwinkels 2δ mit dem zugeordneten Achsenstrahle a_1, d. h. der harm. Polare dieser Ebene, durch zwei Ebenen verbunden; so ist der von den letzteren eingeschlossene Winkel $2B_1$ der dem a_1 angehörige Achsenstrahlwinkel, und man hat für die Winkel δ, ψ, B_1 des von den Strahlen a, a_1, m gebildeten rechtwinkligen Dreikants folgende Relation:

$$\operatorname{tng} B_1 . \sin\psi = \operatorname{tng}\delta.$$

Nun aber war

$$\operatorname{tng} A_1 . \operatorname{tng} B_1 . \sin\psi = \operatorname{tng}\beta . \operatorname{tng}\gamma = \operatorname{tng}^2\beta . \cot\alpha;$$

also ist

$$\operatorname{tng} A_1 . \operatorname{tng}\delta = \operatorname{tng}\beta . \operatorname{tng}\gamma = \operatorname{tng}^2\beta . \cot\alpha.$$

Lehrsatz 27.

Das Produkt der Tangenten eines beliebigen halben Durchmesserwinkels, welcher einer bestimmten Achse angehört, und des halben Achsenstrahlwinkels, welcher demjenigen Achsenstrahle angehört, in welchem die entsprechende Achsenebene von der Durchmesserebene geschnitten wird, ist von unveränderlichem Werthe, und zwar dem Produkte der Tangenten der an diese Achsenebene stossenden halben Achsenwinkel gleich.

Es entsteht nun die Frage: *a*) ob und wie viele Ebenen, und *b*) ob und wie viele Strahlen in zwei involutorischen räumlichen Strahlbüscheln es gibt, deren zugeordnete harmonische Polaren eine Involution der rechten Winkel bilden? und diese Frage wird entschieden sein, wenn ausser den sog. Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel noch ein einziges Paar zug. harm. Polaren einer Ebene oder eines Strahles, welche rechte Winkel einschliessen, nachgewiesen werden können.

a) Gibt es eine solche Ebene, so muss sie eine Durchmesserebene sein. Denn wäre sie dieses nicht, so sei a der Strahl, in welchem sie irgend eine Achsenebene, z. B. ϱ, schneidet; die harm. Polare von a würde durch die Achse r gehen und jene Ebene in einem Strahle a_1 schneiden, welcher mit a einen rechten Winkel bildet. Also würde a auf r und a_1, d. h. auf seiner Polare senkrecht sein, folglich entweder mit s oder t zusammenfallen, oder je zwei zug. harm. Polaren von ϱ würden rechte Winkel einschliessen, was im Allgemeinen nicht angenommen werden kann.

Ferner kann eine Durchmesserebene, deren zug. harm. Polaren eine Involution der rechten Winkel bilden, im Fall dass ein Kegel erzeugt wird, denselben nicht durchschneiden, weil sonst jene Involution aus ungleichliegenden Gebilden bestehen würde, was widersprechend ist; sie kann also nicht der inneren Achse angehören, und der Strahl a, in welchem sie die betreffende Achsenebene schneidet, muss mit der inneren Achse einen grösseren Winkel α' einschliessen, als der zugeordnete Achsenstrahl a_1.

Es seien α, β die der inneren Achse angehörigen halben Achsenwinkel, wobei unentschieden bleibt, ob $\alpha \gtrless \beta$ ist, und γ der halbe äussere Achsenwinkel; r sei die innere Achse; der Winkel α gehöre der Ebene τ, β der Ebene σ an; a sei der Strahl, in welchem eine beliebige, durch die Achse t gehende Durchmesserebene $\mathfrak{A}$ die Achsenebene τ schneidet; A_1 der dem a angehörige halbe Achsenstrahlwinkel, δ der der $\mathfrak{A}$ angehörige halbe Durchmesserwinkel, und α' der Winkel, welchen a und r einschliessen; so ist nach dem Obigen:

$$\operatorname{tng} A_1 \,.\, \operatorname{tng} \delta = \operatorname{tng}^2\beta \,.\, \cot\alpha$$

und

$$\operatorname{tng}^2 A_1 = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha' \,(\operatorname{tng}\alpha' - \operatorname{tng}\alpha_1') \cos^2\alpha'}$$

$$= \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\sin^2\alpha' - \cos^2\alpha' \,.\, \operatorname{tng}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{1 - \cos^2\alpha' \,(1 + \operatorname{tng}^2\alpha)}.$$

Wäre nun $\delta = 45^\circ$, so wäre $\mathfrak{A}$ eine Ebene, wie wir sie suchen; man setze also $\operatorname{tng}\delta = 1$, so ist

$$\operatorname{tng}^2 A_1 = \operatorname{tng}^4\beta \,.\, \cot^2\alpha = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{1 - \cos^2\alpha' \,(1 + \operatorname{tng}^2\alpha)};$$

also

$$\cos^2\alpha' = \frac{\operatorname{tng}^2\beta - \operatorname{tng}^2\alpha}{\operatorname{tng}^2\beta \,(1 + \operatorname{tng}^2\alpha)} = \frac{1 - \operatorname{tng}^2\alpha \,.\, \cot^2\beta}{1 + \operatorname{tng}^2\alpha}.$$

Jedenfalls muss also $\beta > \alpha$ sein, und da dann auch

$$1 - \operatorname{tng}^2\alpha . \cot^2\beta < 1 + \operatorname{tng}^2\alpha$$

ist, so gibt es allemal zwei Ebenen 𝔄, aber auch nur zwei; und zwar gehören dieselben der Nebenachse t an und bilden mit der inneren Achse r einen Winkel α', welcher durch die Gleichung

$$\cos^2\alpha' = \frac{1 - \operatorname{tng}^2\alpha . \cot^2\beta}{1 + \operatorname{tng}^2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tng}^2\gamma}{1 + \operatorname{tng}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma} . \cos 2\gamma$$

bestimmt ist, indem jetzt $\operatorname{tng}\alpha = \operatorname{tng}\beta . \operatorname{tng}\gamma$ ist.

Ist kein Kegel vorhanden, und werden alle vorigen Bestimmungen mit Ausnahme der besonderen Bedeutung der Achsen und Achsenebenen beibehalten, so ist

$$\operatorname{tng} A_1 . \operatorname{tng}\delta = \operatorname{tng}^2\beta . \cot\alpha;$$

$$\operatorname{tng}^2 A_1 = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha' (\operatorname{tng}\alpha' + \operatorname{tng}\alpha_1') \cos^2\alpha'} = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\sin^2\alpha' + \cos^2\alpha' . \operatorname{tng}^2\alpha}$$

$$= \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{1 + \cos^2\alpha' (\operatorname{tng}^2\alpha - 1)};$$

also, wenn $\operatorname{tng}\delta = 1$ gesetzt wird:

$$\cos^2\alpha' = \frac{\operatorname{tng}^2\alpha - \operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}^2\beta (\operatorname{tng}^2\alpha - 1)} = \frac{\operatorname{tng}^2\alpha . \cot^2\beta - 1}{\operatorname{tng}^2\alpha - 1} = \frac{1 - \operatorname{tng}^2\alpha . \cot^2\beta}{1 - \operatorname{tng}^2\alpha}.$$

Es sind nun bloss drei Fälle denkbar:

1) $\alpha < 45^0$, $\beta < 45^0$; 2) $\alpha > 45^0$, $\beta > 45^0$; 3) $\alpha \lesseqgtr 45^0$, $\beta \gtreqless 45^0$.

Ist im Falle 1) $\alpha > \beta$, so wird der ganze Ausdruck negativ, was unmöglich ist, da $\cos^2\alpha'$ immer positiv ist; diess ist aber nicht der Fall, wenn $\beta > \alpha$, und dann ist auch $1 - \operatorname{tng}^2\alpha . \cot^2\beta < 1 - \operatorname{tng}^2\alpha$. Im Falle 2) muss $\alpha > \beta$ sein, und im Falle 3) führt jede Annahme zum Widerspruch. Geht man nun auf Lehrsatz 23. zurück und bedenkt, dass wenn in Taf. V. Fig. 4. sr' und st' kleiner als 45^0, und $sr' < st'$, dann tr' und ts_1 grösser als 45^0, und $tr' > ts_1$; $rs_1 < 45^0$, $rt' > 45^0$ sind, so schliesst man aus dem Vorigen, dass die gesuchte Ebene 𝔄 nur auf derjenigen Achsenebene senkrecht stehen kann, welche den kleinsten, d. h. den Nebenachsenwinkel, enthält, und also durch die Nebenachse gehen muss, und dass es nothwendig zwei, aber auch nur zwei solche Ebenen gibt, deren Neigung α' gegen die Mittelachse oder, was einerlei ist, gegen die Hauptachsenebene durch die Gleichung:

$$\cos^2\alpha' = \frac{1 - \operatorname{tng}^2\alpha \cot^2\beta}{1 - \operatorname{tng}^2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tng}^2\gamma}{1 - \operatorname{tng}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma} . \frac{\cos 2\gamma}{\cos 2\alpha}$$

bestimmt wird, indem β, γ, α der Reihe nach den halben Haupt-, Mittel- und Nebenachsenwinkel bedeuten.

b) Gibt es einen Strahl a, dessen zug. harm. Polaren eine Involution der rechten Winkel bilden, so muss derselbe einer Achsenebene angehören; denn die harm. Polare a_1 derjenigen Ebene α, welche a mit einer Achse, z. B. mit r, verbindet, liegt in der Achsenebene ϱ, welche auf α senkrecht steht; läge nun a nicht in ϱ, so würde auch die Ebene, welche a_1 mit a verbindet, auf α senkrecht sein und folglich auch a_1 auf α; entweder würde also α mit einer der Achsenebenen σ, τ zusammenfallen, oder je zwei zug. harm. Polaren der Ebene ϱ würden rechte Winkel einschliessen, was im Allgemeinen nicht anzunehmen ist.

Ferner muss der Strahl a, wenn ein Kegel erzeugt wird, innerhalb desselben liegen, weil nur dann seine zug. harm. Polaren gleichliegende involutorische Ebenenbüschel bilden, und muss daher mit der inneren Achse einen kleineren Winkel α', als sein zug. Achsenstrahl a_1, einschliessen. Daher ist, wenn wir alle unter a) gemachten Bestimmungen beibehalten, jetzt

$$\operatorname{tng}^2 A_1 = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha'(\operatorname{tng}\alpha_1{}' - \operatorname{tng}\alpha').\cos^2\alpha'} = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\cos^2\alpha'.\operatorname{tng}^2\alpha - \sin^2\alpha'}$$
$$= \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\cos^2\alpha'(\operatorname{tng}^2\alpha + 1) - 1}.$$

Wäre nun der halbe Achsenstrahlwinkel $A_1 = 45^0$, oder $\operatorname{tng} A_1 = 1$, so wäre a der gesuchte Strahl. Unter dieser Annahme aber ist

$$\cos^2\alpha' = \frac{1 + \operatorname{tng}^2\beta}{1 + \operatorname{tng}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}$$

oder

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Es gibt also allemal zwei Strahlen a, wenn $\alpha > \beta$, d. h. auf der Hauptachsenebene, und zwar ist der von ihnen und der inneren Achse eingeschlossene Winkel die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreikants, dessen andere Kathete dem halben Nebenachsenwinkel, und dessen Hypotenuse dem halben Hauptachsenwinkel gleich ist.

Wird kein Kegel erzeugt, so ist

$$\operatorname{tng}^2 A_1 = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha'(\operatorname{tng}\alpha' + \operatorname{tng}\alpha_1{}')\cos^2\alpha'} = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\sin^2\alpha' + \cos^2\alpha'.\operatorname{tng}^2\alpha}$$
$$= \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{1 + \cos^2\alpha'(\operatorname{tng}^2\alpha - 1)};$$

also, wenn $\operatorname{tng} A_1 = 1$ gesetzt wird:

$$\cos^2\alpha' = \frac{\operatorname{tng}^2\beta - 1}{\operatorname{tng}^2\alpha - 1} = \frac{1 - \operatorname{tng}^2\beta}{1 - \operatorname{tng}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}.\frac{\cos 2\beta}{\cos 2\alpha}.$$

Ist nun $\alpha < 45^0$, $\beta < 45^0$, so muss $\alpha < \beta$ sein, wenn ein Werth für α' existiren soll; ist $\alpha > 45^0$, $\beta > 45^0$, so ist $\beta > \alpha$; und ist

$\alpha \gtrless 45^0$, $\beta \lessgtr 45^0$, so ist kein Winkel α' denkbar. Also gibt es auch jetzt allemal zwei, aber auch nur zwei Strahlen a; dieselben liegen auf der Nebenachsenebene und schliessen mit der Mittelachse einen Winkel α' ein, welcher durch den halben Hauptachsenwinkel β und den halben Nebenachsenwinkel α so, wie gezeigt, bestimmt wird.

Noch ist zu bemerken, dass, wenn $\alpha = \beta$ ist, im Falle *a)* $\cos\alpha' = 0$ ist, also beide Ebenen $\mathfrak{A}$ bezüglich mit der äusseren oder der Mittelachsenebene zusammenfallen, was auch daraus folgt, dass dann die Gleichung $\operatorname{tng}\beta = \operatorname{tng}\alpha . \operatorname{tng}\gamma$ für den halben äusseren oder Mittelachsenwinkel γ den Werth von 45^0 liefert; und dass im Falle *b)* $\cos\alpha' = 1$ ist, also die beiden Strahlen a bezüglich mit der inneren oder der Mittelachse sich vereinigen, womit wiederum die Gleichung $\operatorname{tng}\gamma = 1$ übereinstimmt.

Erklärung.

In zwei involutorischen räumlichen Strahlbüscheln soll jeder Strahl und jede Ebene, deren zug. harm. Polaren eine Involution der rechten Winkel bilden, bezüglich eine **Brennlinie** und eine **Brennebene** dieser Strahlbüschel heissen.

Lehrsatz 28.

Zwei involutorische räumliche Strahlbüschel

besitzen im Allgemeinen allemal zwei, aber auch nur zwei Brennebenen, und zwar gehen dieselben in jedem Falle durch die Nebenachse und haben gegen die innere oder die Mittelachse gleiche Neigung.	**besitzen im Allgemeinen allemal zwei, aber auch nur zwei Brennlinien, und zwar liegen dieselben auf der Haupt- oder der Nebenachsenebene, jenachdem erstere einen Kegel erzeugen oder nicht, und sie haben gegen die innere oder die Mittelachse gleiche Neigung.**

Lehrsatz 29.

Jeder Kegel des zweiten Grades wird in zwei verschiedenen Richtungen, welche auf der Nebenachsenebene senkrecht sind, von einer beliebigen Ebene in einer Kreislinie geschnitten.

Beweis. Denn aus Archiv. Thl. VIII. S. 44. geht hervor, dass ein jeder solcher Kegel zwei involutorische räumliche Strahlbüschel bestimmt, und da die zug. Durchmesser eines jeden ebenen Schnittes des ersteren den zug. harm. Polaren einer Ebene der letzteren parallel sein müssen, so bilden die zug. Durchmesser derjenigen Schnitte des Kegels, welche einer Brennebene dieser Strahlbüschel parallel sind, eine Involution der rechten Winkel, gehören also lauter Kreisen an.

Anmerkung. Die Brennlinien und Brennebenen zweier involutorischer räumlicher Strahlbüschel sind nicht nur für die Theorie des Kegels, sondern auch für die der Flächen des zweiten Grades überhaupt von Wichtigkeit. Hat man nämlich sich überzeugt, dass die zug. Durchmesser und Durchmesserebenen einer Fläche des zweiten Grades zwei involutorische räumliche Strahlbüschel bilden, und dass einerseits die zug. harm. Polaren irgend einer Ebene der letzteren zug. Durchmesser des dieser Ebene und der Fläche zweiten Grades gemeinschaftlichen Schnittes, und dass andererseits die zug. harm. Polaren eines beliebigen Strahles jener Strahlbüschel zug. Durchmesserebenen aller derjenigen Kegel sind, welche diese Fläche umhüllen, und deren Scheitel in diesem Strahle liegen, so übersieht man mit einem Blicke, dass 1) alle den Brennebenen parallele Ebenen die Fläche in Kreisen schneiden müssen, und dass dieselben auf der Nebenachsenebene des Hyperboloids und auf derjenigen Achsenebene des Ellipsoids, welche die grösste und kleinste Achse enthält, senkrecht sind; 2) dass es unzählige senkrechte Kegel gibt, welche die Fläche umhüllen, dass die Scheitel derselben zwei Durchmessern der letzteren, nämlich den Brennlinien jener involutorischer Strahlbüschel, angehören und daher auf der Hauptachsenebene des Hyperboloids und auf derjenigen Ebene des Ellipsoids, welche die grösste und kleinste Achse enthält, liegen.

Zweiter Theil.

§. 3.

Unmittelbare Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung und Klasse durch reciproke räumliche Strahlbüschel und Ebenen.

I. Flächen zweiter Ordnung. Sind im Raume eine Gerade und eine Ebene beliebig gegeben, so ist hierdurch, jenachdem sie sich schneiden oder nicht, ein Punkt von endlicher oder unendlicher Entfernung gegeben; und ist irgend ein System von Geraden und ein demselben entsprechendes System von Ebenen gegeben, so bilden die Durchschnitte je einer Geraden und einer Ebene ein bestimmtes System von Punkten, dessen Gesetz von der Beziehung jener beiden Systeme auf einander abhängig ist. Es ist die Frage: welcher Art dieses Gesetz sei, wenn die gegebenen Systeme zwei im Raume beliebig liegende reciproke Strahlbüschel D, D_1 sind?

Es sei B irgend eine Ebene oder ein ebener Strahlbüschel von D mit den Strahlen a, b, c, d....; und es sei $\mathfrak{A}_1$ die Polare von B oder der entsprechende Ebenenbüschel mit den Ebenen a_1,

β_1, γ_1, δ_1...., den Polaren von a, b, c, d....; endlich seien a_1, b_1, c_1, d_1.... diejenigen Geraden, in welchen die Ebene B von den Ebenen α_1, β_1, γ_1, δ_1.... geschnitten wird, welche also einen zweiten ebenen Strahlbüschel B_1 bilden, und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... die Durchschnittspunkte von a, b, c, d.... und α_1, β_1, γ_1, δ_1.... oder a_1, b_1, c_1, d_1.... Diess vorausgesetzt, so ist nach Lehrsatz 11.

$$B(a, b, c, d....) = \mathfrak{A}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma, \delta_1....) \equiv B_1(a_1, b_1, c, d_1....),$$

also

$$B(a, b, c, d....) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1....);$$

d. h. sämmtliche Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$...., in welchen die Strahlen der Ebene B von den entsprechenden Ebenen des Strahlbüschels D_1 geschnitten werden, liegen auf einem Kegelschnitte K, welcher auch die Mittelpunkte D, B_1 des räumlichen und des ebenen Strahlbüschels D, B_1 enthält und im Punkte D von demjenigen Strahle e berührt wird, dessen Polare ε_1 die Punkte D, D_1 und B_1 verbindet. Im Punkte B_1 berührt den K derjenige Strahl m_1 oder diejenige Ebene μ_1, welchen im Strahlbüschel B oder D der Strahl DB_1 oder m entspricht.

Vertauscht man jetzt B mit beliebigen anderen Ebenen B', B''.... des Strahlbüschels D, so erhält man eben so viele neue Kegelschnitte K', K''...., deren Tangenten in D lauter solchen Ebenen von D_1, die durch den gemeinschaftlichen Strahl DD_1 oder $(f_1 g)$ beider Strahlbüschel D, D_1 gehen, entsprechen, also sämmtlich in einer Ebene φ liegen müssen, welche die Polare des Strahles f_1 ist. Gehen die Ebenen B, B', B''.... alle durch einerlei Strahl m oder DB_1, bilden sie also einen Ebenenbüschel, so liegen ihre Polaren $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_1''$,... alle in einerlei Ebene μ_1; die in den ersteren liegenden Kegelschnitte K, K', K''.... gehen sämmtlich durch die Punkte D und B_1, werden von der Ebene μ_1 in den neuen Punkten B_1', B_1''...., die den Strahlen $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_1''$.... angehören, geschnitten, und in diesen Punkten von denjenigen Ebenen μ_1', μ_1''.... berührt, welche den Strahlen DB_1', DB_1''.... oder m', m''.... entsprechen. Aus demselben Grunde, weshalb die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... der Ebene B einen Kegelschnitt K bilden, müssen nun auch andererseits die Punkte B_1, B_1', B_1''.... der Ebene μ_1 einen Kegelschnitt K_1 bilden, dessen Tangente in D_1 die Polare der Ebene DD_1B_1 ist, und dessen Tangente in B_1 der Ebene B angehört. Und so erhält man auch in allen übrigen Ebenen von D_1 Kegelschnitte K_1', K_1''...., in deren Punkten die in diesen Ebenen liegenden Strahlen von ihren Polaren geschnitten werden; und die Geraden, welche diese Kegelschnitte im Punkte D_1 berühren, gehören sämmtlich einer Ebene χ_1, der Polare des gemeinschaftlichen Strahles g der Strahlbüschel D, D_1, an. Ist $\mathfrak{a}$ irgend ein Punkt eines der Kegelschnitte, welche in den Ebenen von D liegen, und sind a, a_1 die nach diesem Punkte gehenden Strahlen von D, D_1, so geht die Polare α_1 von a durch den Punkt $\mathfrak{a}$ und also auch durch den Strahl a_1, und folglich geht die Polare α von a_1 durch den Strahl a; der Punkt $\mathfrak{a}$ wird also auf doppelte Weise erhalten: einmal als Durchschnitt eines Strahles von D und dessen Polare in D_1, sodann als Durchschnitt eines Strahles von D_1 und dessen Polare in D. Ferner berührt die

Gerade, in welcher sich die Ebenen α, α_1 schneiden, sowohl den in α, als auch den in α_1 liegenden Kegelschnitt im Punkte $\mathfrak{a}$.

Geht die Ebene B durch den gemeinschaftlichen Strahl von D, D_1, so fällt der Punkt B_1 mit dem Punkte D_1 zusammen, und der Kegelschnitt K wird in den Punkten D, D_1 von denjenigen Geraden berührt, in welchen B von den Polaren φ, χ_1 des Strahles $(f_1 g)$ geschnitten wird. Nach den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... dieses Kegelschnittes K gehen von D und D_1 die Strahlenpaare a, b, c, d....; a_1, b_1, c_1, d_1....; es seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$....; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.... bezüglich die Polaren dieser Strahlen; so bilden erstere einen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}_1$, letztere einen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, deren Achsen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}$, die Polaren der Ebene B, im Allgemeinen sich nicht schneiden, und da

$$\mathfrak{A}(\alpha,\beta,\gamma,\delta....) \equiv B(a,b,c,d....) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 ...)$$
$$\equiv \mathfrak{A}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1....)$$

ist, so ist

$$\mathfrak{A}(\alpha, \beta, \gamma, \delta....) = \mathfrak{A}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1....);$$

aber die Durchschnittslinien je zweier Ebenen α, α_1; β, β_1; γ, γ_1; δ, δ_1.... berühren in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... ebensoviele Paare von Kegelschnitten, welche auch von den Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ berührt werden; also sind alle jene Berührungslinien die Durchschnitte der entsprechenden Ebenenpaare zweier projektivischer Ebenenbüschel, welche schief im Raume liegen, und bilden also die eine Schaar der Geraden eines einfachen Hyperboloids, zu dessen anderer Schaar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ gehören *).

---

*) Die Theorie der Flächen des zweiten Grades hat die des einfachen Hyperboloids und des hyperbolischen Paraboloids, ebenso wie die des Kegels des zweiten Grades, zur Voraussetzung; denn obschon dieselben, wie sogleich gezeigt werden wird, auf dieselbe allgemeine Weise, wie die übrigen Flächen dieses Grades erzeugt werden können, so lässt sich doch die Genesis derselben mittels einfacherer Gebilde bewerkstelligen, und hierdurch die Erkenntniss ihrer Eigenschaften um Vieles erleichtern. Diess letztere ist durch Steiner bereits geschehen, und es wird daher zu unserem Zwecke genügen, aus dem ersten Theile seines Werkes nur folgenden Lehrsatz nebst Definition auszuziehen und wegen des Beweises auf das Werk selber zu verweisen.

„Wenn im Raume irgend drei Gerade A, A_1, A_2 irgend drei andere Gerade a, b, c schneiden, so schneiden alle Geraden d, e..., welche den drei ersten begegnen, alle Geraden A_3, A_4...., welche den drei letzten begegnen, und es haben die zwei Schaaren Geraden A, A_1, A_2, A_3, A_4...; a, b, c, d, e.... solche Beziehung zu einander:

dass je zwei Gerade, die der nämlichen Schaar angehören, unter sich projektivisch sind, und zwar die andere Schaar Gerader zu Projektionsstrahlen haben.“	dass je zwei Gerade aus einer Schaar die Achsen projektivischer Ebenenbüschel sind, deren entsprechende Ebenen die andere Schaar zu Durchschnittslinien haben.“

„Zwei solche zusammengehörige Schaaren von Geraden, die einander gegenseitig schneiden, erfüllen eine krumme, windschiefe Fläche zweiter Ordnung, nämlich das „einfache Hyperboloid“ (hyperboloide à une nappe). Man kann daher, gemäss der vorstehenden Sätze auch sagen:

Endlich denke man sich irgend eine im Raume beliebig liegende Ebene $\mathfrak{E}$; so wird dieselbe sowohl von den Strahlen und Ebenen des räumlichen Strahlbüschels D, als auch von denen des räumlichen Strahlbüschels D_1 geschnitten, und dieselbe vereinigt zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, welche in Ansehung der Punkte und Geraden, in welchen sie von je einem Strahle jener Strahlbüschel und seiner Polare geschnitten werden, reciprok sind. Ein jeder Punkt dieser Ebenen, welcher auf seiner Polare liegt, ist zugleich auch ein Punkt der durch die Strahlbüschel D, D_1 erzeugten Fläche, und wenn in $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ kein solcher Punkt vorhanden ist, hat auch die Ebene $\mathfrak{E}$ mit dieser Fläche keinen Punkt gemein. Dem Lehrsatz 5. zufolge hat also die beliebige Ebene $\mathfrak{E}$ mit dieser Fläche entweder keinen oder nur einen oder unzählige Punkte gemein, und diese Punkte bilden entweder einen Kegelschnitt oder zwei Gerade oder eine einzige Gerade.

E r k l ä r u n g.

Diejenige Fläche, welche mit einer sie schneidenden Ebene im Allgemeinen einen Kegelschnitt und folglich mit einer sie schneidenden Geraden höchstens zwei Punkte gemein hat, wird eine F l ä c h e d e r z w e i t e n O r d n u n g genannt; jede Ebene, welche mit einer solchen Fläche nur einen Punkt oder zwei Gerade oder nur eine Gerade gemein hat, heisst eine B e r ü h r u n g s e b e n e dieser Fläche, und zwar jener Punkt oder der Durchschnittspunkt der zwei Geraden ihr B e r ü h r u n g s p u n k t, jene eine Gerade ihre B e r ü h r u n g s l i n i e, und diesen letzteren Namen trägt auch jede Gerade, welche mit der Fläche nur einen Punkt gemein hat.

II. F l ä c h e n z w e i t e r K l a s s e. Eine Ebene im Raume ist bestimmt, wenn irgend ein Punkt und eine Gerade derselben, welche nicht durch jenen Punkt geht, gegeben sind. Es seien nun $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ irgend zwei im Raume beliebig liegende reciproke Ebenen; so ist durch die Gesammtheit ihrer entsprechenden Elementenpaare ein System von Ebenen bestimmt, dessen Gesetz zu ermitteln der Zweck der nächsten Betrachtung ist.

Es sei B der Mittelpunkt irgend eines ebenen Strahlbüschels in $\mathfrak{E}$; A_1 die Polare desselben in $\mathfrak{E}_1$, und $a, b, c, d....$; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... die entsprechenden Elementenpaare von B und A_1; ferner sei B_1 die durch B und A_1; und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$.... die durch a und $\mathfrak{a}_1$, b und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und c_1, d und $\mathfrak{d}_1$.... gelegten Ebenen.

Irgend zwei im Raume beliebig schiefliegende projektivische Gerade A, A_1 erzeugen ein einfaches Hyperboloid, d. h. sie und alle ihre Projektionsstrahlen, nebst der Schaar Gerader, welche die letzteren schneiden, liegen in einem einfachen Hyperboloid."

Irgend zwei im Raume beliebig schiefliegende projektivische Ebenenbüschel A, A_1 erzeugen ein einfaches Hyperboloid, d. h. die Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenen, nebst der Schaar Gerader, welche dieselben schneiden, liegen in einem einfachen Hyperboloid."

Ist eine der Geraden $a, b, c, d, e....$ unendlich entfernt, oder, was einerlei ist, sind die Geraden A, A_1 projektivisch-ähnlich, so heisst die durch sie erzeugte Fläche „h y p e r b o l i s c h e s P a r a b o l o i d", und dann ist auch eine der Geraden $A, A_1, A_2, A_3, A_4....$ unendlich entfernt u. s. w.

welche die Ebene B_1 in den Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1.... eines Strahlbüschels B_1 schneiden. Diess vorausgesetzt, so ist

$$B(a, b, c, d....) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1....) \equiv B_1(a_1, b_1, c_1, d_1....),$$

also auch

$$B(a, b, c, d....) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1....);$$

demnach müssen, zufolge „Abh. der geom. Gest. §. 38. II." oder auch Archiv. Thl. IV. S. 252. 10., sämmtliche Ebenen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... nebst $\mathfrak{E}$ und B_1 einen und denselben Kegel K des zweiten Grades umhüllen, und zwar muss derselbe die Ebene $\mathfrak{E}$ in demjenigen Strahle e von B berühren, welcher in B_1 der Durchschnittslinie e_1 von $\mathfrak{E}$ und B_1, oder in $\mathfrak{E}_1$ dem Durchschnittspunkte $\mathfrak{e}_1$ der Ebene $\mathfrak{E}$ und der Geraden A_1 entspricht. Und ebenso berührt K die Ebene B_1 in demjenigen Strahle m_1, und folglich die Gerade A_1 in demjenigen Punkte $\mathfrak{m}_1$, welcher derselben Durchschnittslinie von $\mathfrak{E}$ und B_1, nämlich dem Strahle m von B, entspricht.

Alle Ebenen des in Rede stehenden Systems, welche von einerlei Punkte B, B', B''.... der Ebene $\mathfrak{E}$ ausgehen, umhüllen also einen Kegel K, K', K''.... des zweiten Grades, und da die Punkte $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_1''$...., in welchen die Polaren A_1, A_1', A_1''.... der Punkte B, B', B''.... die Ebene $\mathfrak{E}$ treffen, alle in einer geraden Linie, nämlich in der Durchschnittslinie $(f_1 g)$ der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ liegen, so gehen sämmtliche Gerade e, e', e''...., in welchen die Kegel K, K', K''.... die Ebene $\mathfrak{E}$ berühren, durch einerlei Punkt $\mathfrak{f}$, den Pol der Geraden f_1. — Liegen die Punkte B, B', B''.... alle in einer Geraden m, so gehen ihre Polaren A_1, A_1', A_1''.... alle durch einerlei Punkt $\mathfrak{m}_1$; die Kegel K, K', K''.... haben sämmtlich diejenige Ebene B_1 gemein, welche durch m und $\mathfrak{m}_1$ geht, und berühren die Ebenen B_1, B_1', B_1''.... in denjenigen Strahlen m_1, m_1', m_1''...., und folglich die Geraden A_1, A_1', A_1''... in denjenigen Punkten $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_1'$, $\mathfrak{m}_1''$...., welche in $\mathfrak{E}$ den Durchschnittslinien m, m', m''.... der Ebene $\mathfrak{E}$ und der Ebenen B_1, B_1', B_1''.... entsprechen.

Das nämliche, was von einem beliebigen Punkte B der Ebene $\mathfrak{E}$ gilt, muss nun auch von einem jeden Punkte der Ebene $\mathfrak{E}_1$ gelten, d. h. alle von ihm ausgehende Ebenen unseres Systems umhüllen einen Kegel K_1 zweiten Grades, welcher auch die Ebene $\mathfrak{E}_1$ berührt, und sämmtliche Berührungslinien dieser Ebene und der verschiedenen Kegel K_1, K_1', K_1''.... gehen durch einerlei Punkt u. s. w.

Ist $\mathfrak{A}$ irgend eine Berührungsebene eines der Kegel K, K', K''...., welche einen Punkt der Ebene $\mathfrak{E}$ zum Scheitel haben, und hat $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{E}$ die Gerade a, mit $\mathfrak{E}_1$ die Gerade a_1 gemein, so liegt der Pol $\mathfrak{a}_1$ von a auf $\mathfrak{A}$ und also auch auf a_1, und demnach der Pol $\mathfrak{a}$ von a_1 auf der Geraden a. Die Ebene $\mathfrak{A}$ gehört also nicht nur einem Kegel, dessen Scheitel auf $\mathfrak{E}$ liegt, sondern auch einem Kegel, dessen Scheitel auf $\mathfrak{E}_1$ liegt, an, und man erhält also keine zwei besonderen Systeme von Ebenen, jenachdem man die Punkte von $\mathfrak{E}$ oder die Punkte von $\mathfrak{E}_1$ mit deren Polaren in $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}$ durch Ebenen verbindet. Ferner müssen die beiden Kegel,

deren Scheitel die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ sind, die Ebene $\mathfrak{A}$ längs derselben Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ berühren.

Liegt der Punkt B auf der Durchschnittslinie $(f_1 g)$ von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, so fällt die Ebene B_1 mit $\mathfrak{E}_1$ zusammen, und der Kegel K berührt die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in denjenigen Geraden, welche den Punkt B mit den Polen von f_1 und g verbinden. Die Berührungsebenen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... dieses Kegels mögen die $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in den Geraden a, b, c, d.... und a_1, b_1, c_1, d_1.... schneiden; es seien $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... die Pole dieser Geraden; so bilden a, b, c, d.... und a_1, b_1, c_1, d_1.... zwei proj. Strahlbüschel B, B_1, und die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... eine Gerade A, welche mit B_1; und die Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... eine Gerade A_1, welche mit B projektivisch ist; also ist auch

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}....) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1....).$$

Aber $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$.... sind die Geraden, in welchen die Ebenen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... von je zwei Kegeln, deren Scheitel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$.... sind, berührt werden; folglich bilden alle diese Geraden, da sie die A, A_1 projektivisch schneiden, nebst A, A_1 ein einfaches Hyperboloid.

Endlich denke man sich irgend einen beliebig im Raume liegenden Punkt D; so ist derselbe der gemeinschaftliche Mittelpunkt zweier reciproker räumlicher Strahlbüschel D, D_1, deren entsprechende Elementenpaare nach den entsprechenden Elementenpaaren der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ gerichtet sind. Jede Ebene von D, welche ihre Polare von D_1 enthält, verbindet zwei entsprechende Elemente von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ und gehört also zu dem in Rede stehenden System von Ebenen; und wenn in D, D_1 keine solche Ebene existirt, so geht auch keine Ebene jenes Systems durch den Punkt D. Geht man nun auf die Sätze 5. und 18. zurück und trägt das dort von Punkten und Strahlen Gesagte auf deren Polaren über, wozu man offenbar berechtigt ist, so sieht man, dass unser System von Ebenen mit einem beliebigen Punkte D des Raumes entweder keine oder nur eine oder unzählige Ebenen gemein habe, und dass diese letzteren entweder einen Kegel des zweiten Grades umhüllen oder zwei Ebenenbüschel oder nur einen Ebenenbüschel bilden.

Erklärung.

Jedes System von Ebenen, welches mit einem beliebigen Punkte im Raume im Allgemeinen eine, einen Kegel zweiten Grades umhüllende Schaar von Ebenen und folglich mit einer beliebigen Geraden im Raume im Allgemeinen höchstens zwei Ebenen gemein hat, wird eine **Fläche der zweiten Klasse** genannt; jene Ebenen selbst heissen **Berührungsebenen** dieser Fläche; eine jede Gerade, durch welche unzählige solche Ebenen gehen, wird ein **Strahl**, und jeder Punkt, durch welchen nur eine solche Ebene geht oder in welchem zwei Strahlen der Fläche sich schneiden, ein **Punkt** der Fläche genannt.

Lehrsatz 30.

a) **Zwei beliebig im Raume liegende reciproke räumliche Strahlbüschel D, D_1 erzeugen eine Fläche der zweiten Ordnung, welche auch durch ihre Mittelpunkte geht; nämlich die Durchschnittspunkte aller Strahlen des einen und ihrer Polaren im anderen liegen in einer solchen Fläche; und zwar wird dieselbe in den Mittelpunkten der Strahlbüschel von denjenigen Ebenen berührt, deren Polaren im gemeinschaftlichen Strahle derselben vereinigt sind.**

b) **Man erhält nur eine solche Fläche, man mag nun die Strahlen des einen Strahlbüschels oder die des anderen auf ihre Polaren beziehen.**

c) **Die Fläche wird in jedem ihrer Punkte von der Durchschnittslinie derjenigen zwei Ebenen der räumlichen Strahlbüschel berührt, deren Polaren nach diesem Punkte gehen.**

d) **Alle diese Durchschnittslinien, deren Berührungspunkte einer den beiden Strahlbüscheln gemeinschaftlichen Ebene angehören, bilden ein einfaches Hyperboloid.**

a) **Zwei beliebig im Raume liegende reciproke Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ erzeugen eine Fläche der zweiten Klasse, welche auch diese Ebenen selbst zu Berührungsebenen hat; nämlich die Verbindungsebenen aller Punkte der einen Ebene mit ihren Polaren in der anderen umhüllen eine solche Fläche; und zwar berührt dieselbe die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in denjenigen zwei Punkten, deren Polaren sich in der Durchschnittslinie beider Ebenen vereinigen.**

b) **Man erhält nur eine solche Fläche, man mag nun die Punkte der einen Ebene oder die der anderen mit ihren Polaren verbinden.**

c) **In jeder Berührungsebene der Fläche geht die Verbindungslinie derjenigen zwei Punkte der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, deren Polaren die Durchschnittslinien dieser Ebenen und jener Berührungsebene sind, durch einen Punkt der Fläche.**

d) **Alle diese Verbindungslinien, welche den durch einen gemeinschaftlichen Punkt der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ gehenden Berührungsebenen angehören, bilden ein einfaches Hyperboloid.**

Nun lässt sich aber auch umgekehrt zeigen, dass

Lehrsatz 31.

Alle Flächen der zweiten Ordnung sich durch reciproke Strahlbüschel, und zwar auf unzählige Weisen erzeugen lassen.

Alle Flächen der zweiten Klasse sich durch reciproke Ebenen, und zwar auf unzählige Weisen erzeugen lassen.

Beweis (links). Denn ist irgend eine Fläche F der zweiten Ordnung gegeben, so kann man drei Punkte D, D_1, $\mathfrak{s}$ derselben beliebig auswählen und durch zwei dieser Punkte, z. B. durch D_1 und $\mathfrak{s}$, zwei Ebenen M_1, M_1' legen, welche F in zwei Kegelschnitten K, K' schneiden, und sofort durch den dritten Punkt D und den Punkt $\mathfrak{s}$ eine beliebige dritte Ebene $(\sigma\sigma')$, welche den Kegelschnitt K zum zweitenmale im Punkte B, und den Kegelschnitt K' im Punkte B' schneidet. Vom Punkte D_1 aus denke man sich nach den sämmtlichen Punkten $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... des Kegelschnittes K die Strahlen s_1, a_1, b_1, c_1, d_1...., und nach den sämmtlichen Punkten $\mathfrak{s}'$ (d. h. $\mathfrak{s}$), $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$...., des Kegelschnittes K' die Strahlen s_1' (oder s_1), a_1', b_1', c_1', d_1'.... gezogen; so bilden diese Strahlen zwei ebene Strahlbüschel B_1, B_1', deren Mittelpunkte in D_1 liegen; ferner denke man sich vom Punkte D nach den Punkten B, B' die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ gezogen, und einmal durch $\mathfrak{A}$ und die Punkte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... die Ebenen σ, α, β, γ, δ...., welche die Ebene M_1 in den Geraden s, a, b, c, d.... schneiden, sodann durch $\mathfrak{A}'$ und die Punkte $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$.... die Ebenen σ' (oder σ), α', β', γ', δ'.... gelegt, welche die Ebene M_1' in den Geraden s', a', b', c', d'.... schneiden: so bilden die genannten Ebenen zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ und die neuen Geraden zwei ebene Strahlbüschel B, B', und zwar ist:

$$B_1(s_1, a_1, b_1, c_1, d_1 ...) = B(s, a, b, c, d ...) \equiv \mathfrak{A}(\sigma, \alpha, \beta, \gamma, \delta ...)$$

und

$$B_1'(s_1', a_1', b_1', c_1', d_1' ...) = B'(s', a', b', c', d' ...) \equiv \mathfrak{A}'(\sigma', \alpha', \beta', \gamma', \delta' ...);$$

also auch

$$B_1(s_1, a_1, b_1, c_1, d_1 ...) = \mathfrak{A}(\sigma, \alpha, \beta, \gamma, \delta ...)$$

und

$$B_1'(s_1', a_1', b_1', c_1', d_1' ...) = \mathfrak{A}'(\sigma', \alpha', \beta', \gamma', \delta' ...).$$

Betrachtet man nun die Punkte D, D_1 als die Mittelpunkte zweier räumlichen Strahlbüschel D, D_1, so hat man in dem einen zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ und in dem anderen zwei ebene Strahlbüschel B_1, B_1', welche bezüglich mit den ersteren in Ansehung der Elementenpaare, die sich in den Punkten $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... und $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$.... der Fläche F schneiden, projektivisch sind, und zwar entspricht der gemeinschaftlichen Ebene $(\sigma\sigma')$ von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ der gemeinschaftliche Strahl $(s_1 s_1')$ von B_1, B_1'. Also darf man festsetzen: die räumlichen Strahlbüschel D, D_1 sollen reciprok, und zwar die Elementenpaare $\mathfrak{A}$ und M_1, $\mathfrak{A}'$ und M_1'; σ, α, β, γ, δ.... und s_1, a_1, b_1, c_1, d_1....; σ', α', β', γ', δ'.... und s_1', a_1', b_1', c_1', d_1'.... sollen entsprechende Elementenpaare von D, D_1 selber sein. Aber, kraft des vorigen Satzes, erzeugen diese Strahlbüschel eine Fläche zweiter Ordnung F', welche durch die Punkte D, D_1 und durch sämmtliche Punkte B, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$...., B, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$.... der Kegelschnitte K, K' geht; ist also $\mathfrak{k}$ ein beliebiger Punkt der Fläche F', so kann man sich durch die Punkte D und $\mathfrak{k}$ allemal eine Ebene gelegt denken, welche die Kegelschnitte K, K' in zwei Punktenpaaren $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$; $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ schneidet, und da nun die beiden Kegelschnitte, welche diese Ebene

mit den Flächen F, F' gemein hat, durch die nämlichen fünf Punkte D, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ gehen, also zusammenfallen, so muss auch der dem einen angehörige Punkt $\mathfrak{t}$ auf dem anderen und somit auf der Fläche F liegen; folglich die durch die reciproken Strahlbüschel D, D_1 erzeugte Fläche F' mit der gegebenen Fläche F identisch sein, w. z. b. w.

Der Beweis der rechten Seite wird auf ähnliche Weise geführt, und man ist also nun berechtigt, die allgemeine Eintheilung und die Eigenschaften der durch reciproke Gebilde erzeugten Flächen des zweiten Grades als die der sämmtlichen Flächen dieses Grades auszusprechen. Unter anderen leuchten nun folgende zwei Sätze ein:

Lehrsatz 32.

Eine Fläche der zweiten Ordnung hat mit einer beliebigen Ebene im Raume entweder keinen oder nur einen oder unzählige Punkte gemein, und diese letzteren bilden entweder einen Kegelschnitt oder zwei Gerade oder nur eine einzige Gerade.

An eine Fläche der zweiten Klasse gehen von einem beliebigen Punkte im Raume entweder keine oder nur eine oder unzählige Berührungsebenen, und diese letzteren umhüllen entweder einen Kegel des zweiten Grades oder bilden zwei Ebenenbüschel oder nur einen einzigen Ebenenbüschel.

Lehrsatz 33.

Ist irgend eine Fläche der zweiten Ordnung gegeben, so darf man vier Punkte D, D_1, B, $\mathfrak{s}$ derselben beliebig auswählen und, nachdem man zwei dieser Punkte, z. B. D, D_1, bezüglich mit B und $\mathfrak{s}$ durch zwei Gerade $\mathfrak{A}$ und s_1 und mit beiden Punkten B, $\mathfrak{s}$ durch zwei Ebenen σ und M_1 verbunden hat, festsetzen: die Punkte D, D_1 sollen die Mittelpunkte zweier reciproker räumlicher Strahlbüschel, welche die gegebene Fläche erzeugen, und die Ebenen σ und M_1 sollen die Polaren der Strahlen s_1 und $\mathfrak{A}$ sein.

Ist irgend eine Fläche der zweiten Klasse gegeben, so darf man vier Berührungsebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{B}$, σ derselben beliebig auswählen und, wenn A, s_1 die Durchschnittslinien, $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{m}_1$ die Durchschnittspunkte zweier dieser Ebenen, z. B. $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, und bezüglich der einzelnen Ebenen $\mathfrak{B}$, σ und wieder beider Ebenen $\mathfrak{B}$, σ zugleich bezeichnen, festsetzen: die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen reciprok sein und die gegebene Fläche erzeugen, und zwar sollen die Punkte $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{m}_1$ die Pole der Geraden s_1 und A in diesen Ebenen sein.

§. 4.

Klassifikation der Flächen der zweiten Ordnung und Klasse.

I. Zwei reciproke räumliche Strahlbüschel D, D_1 mögen ganz beliebig im Raume liegen; es sei $\mathfrak{A}_1$ ihr gemeinschaftlicher Strahl; α_1, β_1, γ_1, δ_1.... ihre gemeinschaftlichen Ebenen; a, b, c, d.... die den letzteren in D entsprechenden Strahlen, und a_1, b_1, c_1, d_1.... diejenigen Strahlen, in welchen die Ebene der a, b, c, d...., oder die Polare von $\mathfrak{A}_1$, von den Ebenen α_1, β_1, γ_1, δ_1.... geschnitten wird; so bilden a, b, c, d.... und a_1, b_1, c_1, d_1.... zwei concentrische ebene Strahlbüschel B, B_1; α_1, β_1, γ_1, δ_1.... einen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}_1$, und es ist

$$B(a,b,c,d....) = \mathfrak{A}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1....) \equiv B_1(a_1, b_1, c_1, d_1...),$$

also

$$B(a,b,c,d....) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1....).$$

Es sind nun, nach Archiv Thl. IV. S. 252., drei und zwar nur drei Fälle denkbar: a) Entweder besitzen die concentrischen proj. ebenen Strahlbüschel B, B_1 zwei, oder b) nur einen oder c) keinen Strahl, in welchem sich entsprechende Strahlen vereinigen, oder mit anderen Worten: Von den Ebenen α_1, β_1, γ_1, δ_1... gehen entweder zwei, oder nur eine oder keine durch ihre Polare in D. Geht aber irgend eine jener Ebenen, z. B. α_1, durch ihre Polare a, und man rechnet dieselbe jetzt zu D, so muss ihre Polare in D_1 gleichfalls auf α_1, d. h. auf dieser Ebene liegen.

a) Es seien in Taf. V. Fig. 5. DMD_1 und $DM'D_1$ zwei, den Strahlbüscheln D, D_1 gemeinschaftliche Ebenen, welche durch ihre Polaren DM, D_1M und DM', D_1M' gehen. Da allen Ebenen α, β, γ, δ...., welche z. B. durch DM gehen, lauter Strahlen von D_1, die in der Ebene DMD_1 liegen, entsprechen müssen, so gehören alle Punkte der Geraden DM, und ebenso auch die der Geraden D_1M, DM', D_1M', zu der durch D, D_1 erzeugten Fläche F. Es sei nun $DM\mathfrak{b}$ oder B irgend eine durch DM gehende Ebene, welche die Ebene $DM'D_1$ in der Geraden $D\mathfrak{b}$ oder b schneidet, und es seien a, c, d.... sämmtliche übrigen in B liegenden Strahlen von D; D_1B_1 oder $\mathfrak{A}_1$ sei die auf DMD_1 liegende Polare der Ebene B, welche DM in B_1 schneidet, und α_1, β_1, γ_1, δ_1.... die Polaren der Strahlen a, b, c, d...., welche einen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}_1$ bilden und die Ebene B in den Geraden a_1, b_1, c_1, d_1...., so wie die Strahlen a, b, c, d.... in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... schneiden; so ist

$$B(a,b,c,d....) = \mathfrak{A}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1...) \equiv B_1(a_1, b_1, c_1, d_1...),$$

also

$$B(a,b,c,d....) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1....).$$

Aber dem Strahle DM von B entspricht in $\mathfrak{A}_1$ die Ebene DMD_1 und folglich in B_1 ein mit DM vereinigter Strahl; also sind die

ebenen Strahlbüschel B, B_1 perspektivisch, d. h. sämmtliche Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... — Punkte, welche der Fläche F angehören — liegen in einer Geraden A; und da die Polare des Strahles b durch D_1B_1 und durch D_1M' gehen muss, also mit der Ebene $D_1M'B_1$ einerlei ist, so gehört der Punkt $\mathfrak{b}$ der Geraden D_1M' an, oder die Gerade A begegnet den Linien DM und D_1M' zugleich.

Die Fläche F wird also von allen Ebenen, welche durch eine der vier Linien DM, D_1M, DM', D_1M', z. B. durch DM, gehen, in lauter geraden Linien geschnitten, zu denen auch DM' und D_1M gehören, und alle diese Linien treffen auch die Linien D_1M'.

Es seien nun in Taf. V. Fig. 6. $D\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $D\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $D\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, $D\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$.... oder α, β, γ, δ.... sämmtliche durch DM gehende Ebenen, welche einen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ bilden; A, B, C, D.... die in denselben und in der Fläche F liegenden Geraden; α_1, β_1, γ_1, δ_1.... die durch D_1M' und dieselben Geraden gehenden Ebenen, welche einen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}_1$ bilden; und eine den Strahlbüscheln D, D_1 gemeinschaftliche Ebene, welche weder mit DMD_1 noch mit $DM'D_1$ identisch ist, schneide die Geraden A, B, C, D.... in den Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$....; so liegen diese Punkte in einem Kegelschnitte (oder in einer Geraden), indem sie der Fläche F angehören, und verbindet man dieselben mit D, D_1 durch die Strahlen a, b, c, d....; a_1, b_1, c_1, d_1...., so bilden die letzteren zwei projektivische ebene Strahlbüschel, von denen der eine mit dem Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, der andere mit dem Ebenenbüschel $\mathfrak{A}_1$ perspektivisch ist; also ist

$$\mathfrak{A}(\alpha, \beta, \gamma, \delta....) = \mathfrak{A}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1....).$$

Da nun die Achsen DM, D_1M' dieser Ebenenbüschel sich nicht schneiden, so folgt aus dem letzteren, dass die sämmtlichen Geraden A, B, C, D.... die eine Schaar der Geraden eines einfachen Hyperboloids bilden, zu dessen anderer Schaar DM und D_1M' gehören; d. h. die Fläche F ist im Falle *a)* ein **einfaches Hyperboloid**.

b) Gibt es nur einen Strahl DM und D_1M, welcher auf seiner Polare DMD_1 liegt, so zeigt man, wie vorhin, dass jede Ebene B, welche durch DM (oder D_1M) geht, die Fläche F in einer Geraden A schneidet. Ist nun B_1 die durch den Punkt D_1 und die Gerade A gehende Ebene, so muss, eben weil A eine der Fläche F angehörige Gerade ist, von allen Strahlen in der Ebene B_1 einer auf seiner Polare liegen, also, da D_1M der einzige derartige Strahl ist, mit diesem zusammenfallen. Die Gerade A trifft also die beiden Geraden DM und D_1M, geht demnach, da sie nicht in die Ebene DMD_1 fällt, durch den Punkt M. Somit schneiden alle durch DM und D_1M gelegten Ebenen die Fläche F in geraden Linien, welche durch einerlei Punkt M gehen, und weil jede von DMD_1 verschiedene, den Strahlbüscheln D, D_1 gemeinschaftliche Ebene die Fläche F in einem Kegelschnitte schneidet, so ist diese Fläche im Falle *b)* ein **Kegel des zweiten Grades**.

c) Enthielte in diesem dritten Falle die Fläche F eine gerade Linie, so würde die nach dieser letzteren gehende Ebene des

Strahlbüschels D oder D_1 einen Strahl enthalten müssen, welcher auf seiner Polare liegt, was gegen die Voraussetzung streitet.

Auf die so eben betrachteten drei Fälle und die denselben entsprechenden drei Hauptgattungen von Flächen der zweiten Ordnung kommt man zurück, wenn man von der Art des Schnittes einer beliebigen Ebene $\mathfrak{E}$ mit der Fläche F ausgeht. Besteht nämlich 1) dieser Schnitt aus zwei Geraden (AA_1) und $(A'A_1')$, so sind in den mit $\mathfrak{E}$ vereinigten zwei reciproken Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ die Pole dieser Geraden ein einziges Paar Punkte (B_1B) und $(B_1'B')$, welche mit dem Durchschnitte jener Geraden in einer geraden Linie S liegen; und jedem Punkte der ersteren, z. B. von A, entspricht ein durch ihn selbst gehender Strahl von B_1, sowie demselben Punkte, insofern er zu A_1 gezählt wird, ein durch ihn selbst gehender Strahl von B. Legt man nun durch die Gerade DD_1 und den Punkt (BB_1) eine Ebene, welche (AA_1) in $\mathfrak{m}$, $(A'A_1')$ in $\mathfrak{m}_1$ schneidet, so ist die Polare dieser Ebene, insofern sie zu D gehört, der nach $\mathfrak{m}_1$ gehende Strahl von D_1, und die Polare derselben Ebene, insofern sie zu D_1 gehört, der nach $\mathfrak{m}$ gehende Strahl von D. Die Polaren dieser Ebene liegen also auf ihr selbst und das nämliche gilt von der durch DD_1 und $(B'B_1')$ gelegten Ebene. Jenachdem also die Gerade S mit der Geraden DD_1 in einerlei Ebene liegt oder nicht, ist der Fall *b*) oder *a*) vorhanden.

Ist 2) der Schnitt von F und $\mathfrak{E}$ nur eine einzige Gerade (AA_1), so hat dieselbe in den mit $\mathfrak{E}$ vereinigten reciproken Ebenen nur einen Pol (B_1B), und ein jeder Strahl des letzteren nur einen auf ihm selbst und auf (AA_1) liegenden Pol. Die Polaren derjenigen Ebene also, welche durch DD_1 und (BB_1) gelegt wird, gehen nach dem Durchschnitte dieser Ebene und der Geraden (AA_1) und liegen also auf ihr selber. Gäbe es nun eine zweite durch DD_1 gehende Ebene, deren Polaren auf ihr selber liegen, so würde in den Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ die Durchschnittslinie der letzteren und jener Ebene die Polare eines auf ihr liegenden Punktes sein, also durch den Punkt (BB_1) gehen; diese zweite Ebene würde also in der That von der ersteren nicht verschieden sein. Der in Rede stehende Fall ist also mit dem früheren *b*) identisch.

3) Hat die Ebene $\mathfrak{E}$ nur einen Punkt B mit F gemein, so hat dieser Punkt in den mit $\mathfrak{E}$ vereinigten reciproken Ebenen nur eine einzige Polare A. Existirte nun eine Ebene DMD_1, welche ihre Polaren DM, D_1M enthielte, so würden diese letzteren beide durch den Punkt B, und die Ebene selbst durch die Gerade A gehen müssen, und es könnte wenigstens keine zweite solche Ebene existiren. Es ist also dieser Fall mit *b*) oder *c*) identisch, jenachdem die Geraden DD_1 und A in einerlei Ebene liegen oder nicht.

4) Ist der Schnitt der Ebene $\mathfrak{E}$ und der Fläche F ein Kegelschnitt, so kann jeder der Fälle *a*), *b*), *c*) stattfinden.

II. Sind andererseits $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ irgend zwei reciproke Ebenen im Raume; A_1 der Durchschnitt beider; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... die Punkte von A_1; a, b, c, d.... die in $\mathfrak{E}$ liegenden Polaren dieser Punkte, welche einen Strahlbüschel B bilden, und a_1, b_1, c_1, d_1... die Strahlen eines mit B concentrischen Strahlbüschels B_1, welche nach jenen Punkten gehen; so ist

$$B(a,b,c,d\ldots.)=A_1(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}_1,\mathfrak{d}_1\ldots.)\equiv B_1(a_1,b_1,c_1,d_1\ldots.);$$

also

$$B(a,b,c,d\ldots.)=B_1(a_1,b_1,c_1,d_1\ldots.).$$

Entweder nun besitzen die Strahlbüschel B, B_1 *a*) **zwei**, oder *b*) **nur einen**, oder *c*) **keinen** Strahl, in welchem sich entsprechende vereinigen, d. h. von den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... liegen entweder zwei, oder nur einer, oder keiner auf seiner Polare. Liegt aber irgend ein Punkt von A_1 auf seiner Polare in $\mathfrak{E}$, so liegt er auch auf seiner Polare in $\mathfrak{E}_1$.

a) Es seien $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ zwei Punkte der Geraden A_1, welche auf ihren Polaren m, m' in $\mathfrak{E}$, und m_1, m_1' in $\mathfrak{E}_1$ liegen. Da allen Punkten der Linie m solche Gerade in $\mathfrak{E}_1$ entsprechen, welche durch den Punkt $\mathfrak{m}$ gehen, so sind alle Ebenen, welche durch m gehen, und desgleichen alle, welche durch m_1, m', m_1' gehen, Berührungsebenen der Fläche F, die durch $\mathfrak{E}$; $\mathfrak{E}_1$ erzeugt wird.

Es sei nun B irgend ein Punkt von m, welcher mit dem Punkte $\mathfrak{m}'$ die Linie b gemein hat; a, c, d.... beliebige andere Strahlen von B; A_1 die (vom Durchschnitte der $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ jetzt zu unterscheidende) Polare des Punktes B in $\mathfrak{E}_1$, und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$... die Pole von a, b, c, d...., welche mit dem Punkte B die Geraden a_1, b_1, c_1, d_1.... und mit den Geraden a, b, c, d.... die Ebenen α, β, γ, δ.... gemein haben; so ist

$$B(a,b,c,d\ldots.)=A_1(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}_1,\mathfrak{d}_1\ldots.)\equiv B_1(a_1,b_1,c_1,d_1\ldots.),$$

also

$$B(a,b,c,d\ldots.)=B_1(a_1,b_1,c_1,d_1\ldots.).$$

Aber dem Strahle m von B entspricht in $\mathfrak{E}_1$ der Punkt $\mathfrak{m}$, und somit in B_1 ein mit m vereinigter Strahl; also liegen die concentrischen ebenen Strahlbüschel B, B_1 perspektivisch, d. h. sämmtliche Ebenen α, β, γ, δ.... oder die Berührungsebenen von F, welche durch den Punkt B gehen, schneiden sich in einer Geraden $\mathfrak{A}$, welche auch der Geraden m begegnet; und da dem Strahle b ein auf m_1' liegender Punkt entspricht, also die Ebene β durch m_1' geht, so begegnet die $\mathfrak{A}$ auch der m_1'.

Sind nun $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... die verschiedenen, durch sämmtliche Punkte B von m erhaltenen Geraden, und legt man durch dieselben und einen beliebigen Punkt, z. B. durch einen, den Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ gemeinschaftlichen Punkt (BB_1), die Ebenen α, β, γ, δ...., welche $\mathfrak{E}$ in a, b, c, d....; $\mathfrak{E}_1$ in a_1, b_1, c_1, d_1.... schneiden, so umhüllen diese, als Berührungsebenen der Fläche F, einen Kegel zweiten Grades, welcher auch $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ berührt; also ist

$$B(a,b,c,d\ldots.)=B_1(a_1,b_1,c_1,d_1\ldots.),$$

und folglich sind auch die Geraden m, m_1' hinsichtlich der Punkte, in denen sie von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... getroffen werden, projektivisch; d. h. die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$...., wozu auch m' und m_1 gehören, durch welche sämmtliche Berührungsebenen von F gehen, bilden

die eine Schaar, und m, m_1' gehören zur anderen Schaar Gerader eines einfachen Hyperboloids.

b) Fallen, um das Räsonnement abzukürzen, die Punkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ zusammen, so schneiden sich die Geraden m, m_1'; und folglich umhüllen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... nebst m, m_1' einen Kegelschnitt, ohne dass jedoch die Ebenen α, β, γ, δ.... einen Kegel zweiten Grades umhüllen, indem dieselben nicht durch einerlei Punkt gehen.

c) Gibt es keinen Punkt $\mathfrak{m}$, so können auch keine drei Berührungsebenen von F durch eine Gerade gehen; denn sonst würde der Durchschnittspunkt dieser letzteren mit der Ebene $\mathfrak{E}$ (oder $\mathfrak{E}_1$) einen Strahl in $\mathfrak{E}$ enthalten, dessen Pol auf ihm selber läge.

Auf ähnliche Weise, wie oben, lässt sich ferner darthun, dass wenn die von einem beliebigen Punkte im Raume an die Fläche F gehenden Berührungsebenen zwei Ebenenbüschel bilden, die Fälle a) oder b); wenn sie nur einen Ebenenbüschel bilden, bloss der Fall b); wenn nur eine einzige Berührungsebene an F geht, die Fälle b) oder c), und wenn unzählige Ebenen, die einen Kegel zweiten Grades umhüllen, alle drei Fälle a), b), c) stattfinden können.

Durch die beiden letzten Betrachtungen hat sich uns also nun folgende ganz allgemeine Eintheilung der Flächen der zweiten Ordnung und Klasse ergeben:

Lehrsatz 34.

Eine jede Fläche der zweiten Ordnung ist entweder ein Kegel des zweiten Grades, oder im Allgemeinen ein einfaches Hyperboloid, oder eine durchaus krummlinige Fläche, welche mit einer beliebigen Ebene entweder einen Kegelschnitt oder nur einen Punkt oder keinen Punkt gemein hat.

Eine jede Fläche der zweiten Klasse ist entweder ein Kegelschnitt, durch dessen Tangenten, oder im Allgemeinen ein einfaches Hyperboloid, durch dessen Geraden die Berührungsebenen der ersteren gehen, oder eine Fläche, an welche von einem beliebigen Punkte des Raumes entweder unzählige, einen Kegel des zweiten Grades umhüllende Berührungsebenen, oder nur eine einzige oder gar keine gehen.

Ein dem so eben gebrauchten untergeordneter Eintheilungsgrund der Flächen der zweiten Ordnung und Klasse ist derjenige, welcher von den unendlich entfernten Punkten und Berührungsebenen hergenommen wird; doch ist derselbe für die ersteren bei Weitem ergiebiger, als für die letzteren, indem hier nur der eine Fall, dass die Mittelpunkte der reciproken Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ unendlich entfernt sind, und also eine einzige unendlich entfernte Berührungsebene vorhanden ist, in Betracht kommen kann. — Wendet man den Lehrsatz 20. auf die Strahlbüschel D, D_1 an, welche eine Fläche der zweiten Ordnung erzeugen, so sieht man sogleich,

weil jeder Strahl, welcher mit seiner Polare parallel ist, einen unendlich entfernten Punkt der Fläche F bestimmt, dass eine solche Fläche entweder 1) keinen, oder 2) nur einen oder unzählige unendlich entfernte Punkte besitzt, und dass die nach diesen Punkten gehenden Strahlen eines beliebigen Punktes entweder 3) einen Kegel des zweiten Grades oder 4) zwei Ebenen, oder 5) eine einzige Ebene bilden. Im ersten Falle, welcher offenbar bei keiner geradlinigen Fläche stattfinden kann, heisst die erzeugte Fläche Ellipsoid, im dritten Falle, wenn dieselbe ebenfalls keine geraden Linien enthält, elliptisches Hyperboloid, und im zweiten unter derselben Bedingung elliptisches Paraboloid. Der dritte Fall tritt ausserdem beim Kegel ein, wenn sein Scheitel in endlicher Entfernung liegt, und bei dem einfachen Hyperboloid; und der zweite, vierte und fünfte beim Kegel, wenn sein Scheitel unendlich entfernt, und seine Grundfläche bezüglich eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist (elliptischer, hyperbolischer, parabolischer Cylinder). Endlich gilt der vierte Fall auch noch vom hyperbolischen Paraboloid, nach dessen unendlich entfernten Geraden die beiden Ebenen gerichtet sind, und dasselbe heisst gleichseitig, wenn diese Ebenen auf einander senkrecht sind.

Lehrsatz 35.

Alle Flächen der zweiten Ordnung zerfallen in folgende drei Hauptgattungen und deren Arten: 1) der Kegel nebst dem elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Cylinder; 2) geradlinige windschiefe Flächen, nämlich das einfache Hyperboloid nebst dem hyperbolischen Paraboloid; 3) durchaus krummlinige Flächen, das Ellipsoid, das elliptische Hyperboloid und das elliptische Paraboloid.

Eine Aufgabe, welche über die Grenzen dieser Abhandlung hinausgeht, ist, zu zeigen, dass jede Fläche der zweiten Klasse zugleich eine Fläche der zweiten Ordnung ist; und dann ergibt sich, dass nur das elliptische Paraboloid eine unendlich entfernte Berührungsebene mit einem einzigen Berührungspunkte, und nur der parabolische Cylinder eine solche Ebene mit einer Berührungslinie besitzt.

Aufgabe.

Mittels reciproker räumlicher Strahlbüschel eine Kugel zu erzeugen.

Auflösung. Man lege zwei reciproke gleiche räumliche Strahlbüschel dergestalt, dass jeder Strahl des einen auf seiner Polare senkrecht steht; so erzeugen dieselben, was unmittelbar einleuchtet, eine Kugel, deren Durchmesser der gemeinschaftliche Strahl ist.

Aufgabe.

Mittels zweier beliebig gegebener reciproker räumlicher Strahlbüschel ein einfaches Hyperboloid zu erzeugen.

Auflösung. *a*) Man wähle einen beliebigen Strahl g in D und eine durch denselben gehende Ebene φ, suche in D_1 die Polare f_1 von φ und die durch letztere gehende Polare χ_1 von g, und lege nun die Strahlbüschel D, D_1 so, dass die Strahlen g und f_1, nicht aber die Ebenen φ und χ_1 zusammenfallen; so erzeugen sie ein einfaches Hyperboloid. *b*) Oder man gebe den Strahlbüscheln eine beliebige Lage; erzeugen dieselben nun nicht die verlangte Fläche, so drehe man den einen so herum, dass die vereinigt gewesenen Strahlen in entgegengesetzter Richtung wieder zusammenfallen; so entsteht nothwendig ein einfaches Hyperboloid.

Beweis *a*) ähnlich wie oben im Falle *a*); *b*) denn durch die Umdrehung erhält man dann nothwendig zwei ungleichliegende ebene Strahlbüschel B, B_1, von welchen zu Anfang dieses Paragraphen die Rede war, und es muss also der dortige Fall *a*) eintreten.

Aufgabe.

Mittels zweier beliebig gegebener reciproker räumlicher Strahlbüschel einen Kegel des zweiten Grades zu erzeugen.

Auflösung. Man verfahre ebenso, wie in der vorigen Aufgabe; doch lasse man jetzt auch die Ebenen φ und χ_1 zusammenfallen.

Beweis. Denn dann hat die Ebene $(\varphi\chi_1)$ mit der Fläche nur den einen Strahl $(f_1 g)$ gemein, eine Eigenschaft, welche der Kegel ausschliesslich besitzt.

Aufgabe.

Mittels zweier beliebig gegebener reciproker räumlicher Strahlbüschel ein hyperbolisches Paraboloid zu erzeugen.

Auflösung. Man bringe die gegebenen Strahlbüschel in involutorische Lage, suche eine Brennebene derselben und drehe nun den einen Strahlbüschel dergestalt um seinen Mittelpunkt, dass die in dieser Brennebene vereinigten Ebenen vereinigt bleiben, und jeder Strahl derselben einen Winkel von 90° beschreibt; so wird jetzt ein jeder solche Strahl auf seiner Polare liegen. Wird nun der eine Strahlbüschel parallel mit sich selber in irgend eine Stelle des Raumes versetzt, so werden alle jene Strahlen mit ihren Polaren parallel sein und folglich unzählige, in gerader Linie liegende, unendlich entfernte Punkte bestimmen, im Allgemeinen also die erzeugte Fläche ein hyperbolisches Paraboloid sein.

Aufgabe.

Mittels zweier beliebig gegebener reciproker räumlicher Strahlbüschel ein Ellipsoid zu erzeugen.

Auflösung. Man bringe die gegebenen Strahlbüschel in diejenige concentrische, z. B. involutorische Lage, in welcher dieselben keinen Kegel erzeugen, und versetze dann den einen Strahlbüschel parallel mit sich selber in irgend eine Stelle des Raumes; so wird

kein Strahl des einen, noch des anderen, mit seiner Polare parallel sein, die erzeugte Fläche also auch keinen unendlich entfernten Punkt enthalten können. Dieselbe muss also ein Ellipsoid sein.

Aufgabe.

Mittels zweier beliebig gegebener reciproker räumlicher Strahlbüschel ein elliptisches Hyperboloid zu erzeugen.

Auflösung. Man bringe die gegebenen Strahlbüschel in diejenige concentrische Lage, in welcher dieselben einen Kegel erzeugen, und versetze jetzt, was immer möglich ist, den einen parallel mit sich selber und, ohne dass ein Strahl des Kegels auf seiner Polare verharrt, in irgend eine Stelle des Raumes; so werden erstlich alle Strahlen des Kegels jetzt mit ihren Polaren parallel sein und folglich unzählige unendlich entfernte Punkte bestimmen, deren Richtungen mit den Strahlen eines Kegels parallel sind; zweitens wird weder ein Strahl jenes Kegels, noch auch irgend ein anderer Strahl auf seiner Polare liegen, weil ein solcher letzterer vor der Trennung der Strahlbüschel seine Polare durchschnitt, und folglich auch nach derselben durchschneiden muss. Die erzeugte Fläche kann also aus dem letzteren Grunde keine geradlinige, und muss folglich aus dem ersteren ein elliptisches Hyperboloid sein.

Aufgabe.

Mittels zweier beliebig gegebener reciproker räumlicher Strahlbüschel ein elliptisches Paraboloid zu erzeugen.

Auflösung. Man bringe die gegebenen Strahlbüschel in diejenige involutorische Lage, in welcher dieselben einen Kegel erzeugen. Im Allgemeinen wird nun eine, auf einem Strahle dieses Kegels senkrechte Ebene denselben in einer Ellipse schneiden, und dreht man nun den einen Strahlbüschel um diesen Strahl, und zwar um einen Winkel von zwei Rechten herum, so werden die in jener Ebene vereinigten reciproken Ebenen, kraft Lehrsatz 2., nur einen einzigen Punkt besitzen, welcher auf seiner Polare liegt; und daher auch in den beiden Strahlbüscheln bloss jener eine Strahl auf seiner Polare liegen. Versetzt man also jetzt den einen Strahlbüschel parallel mit sich selber in irgend eine andere Stelle des Raumes, so wird auch nur ein einziger Strahl mit seiner Polare parallel sein; die erzeugte Fläche also, weil sie nur einen unendlich entfernten Punkt besitzt, im Allgemeinen ein elliptisches Paraboloid sein müssen.

Aufgabe.

Zwei beliebig gegebene reciproke räumliche Strahlbüschel so zu legen, dass die durch dieselben erzeugte Fläche der zweiten Ordnung in der Richtung einer gegebenen Ebene in lauter Kreisen geschnitten werde.

Auflösung. Man lege die gegebenen Strahlbüschel D, D_1 involutorisch und suche eine Brennebene derselben. Jetzt gebe man denselben, ohne ihre Lage zu einander zu ändern, eine solche

Lage im Raume, dass diese Brennebene mit der gegebenen Richtungsebene parallel laufe, und versetze den einen Strahlbüschel, z. B. D_1, parallel mit sich selber und so, dass die Polaren der Brennebene auf einander liegen bleiben, in irgend eine Stelle des Raumes; so haben beide Strahlbüschel die geforderte Lage.

Beweis. Bei der involutorischen Lage von D, D_1 seien B, B_1 die von den zug. harm. Polaren der Brennebene gebildeten Strahlbüschel, in welchen also die zug. Strahlenpaare a, a_1; b, b_1; c, c_1; d, d_1.... lauter rechte Winkel einschliessen; und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}$ seien die vereinigten harm. Polaren jener Ebene; ferner seien α, β, γ, δ.... die durch $\mathfrak{A}$ und a, b, c, d.... gehenden Ebenen, d. h. die harm. Polaren von a_1, b_1, c_1, d_1....; und α_1, β_1, γ_1, δ_1.... die durch $\mathfrak{A}_1$ und a_1, b_1, c_1, d_1.... gehenden Ebenen oder die harm. Polaren von a, b, c, d....; ferner a', b', c', d'.... diejenigen Strahlen von B, welche mit a_1, b_1, c_1, d_1....; und wieder a_1', b_1', c_1', d_1'.... diejenigen Strahlen von B_1, welche mit a, b, c, d.... vereinigt sind; endlich α', β', γ', δ'.... die mit α_1, β_1, γ_1, δ_1.... vereinigten Polaren von a_1', b_1', c_1', d_1'....; und α_1', β_1', γ_1', δ_1'.... die mit α, β, γ, δ.... vereinigten Polaren von a', b', c' d'.... Wird nun der Strahlbüschel D_1 auf die angegebene Weise von D getrennt, so bleiben je zwei Ebenen α und α_1'; β und β_1'....α' und α_1; β' und β_1.... vereinigt, und die Ebenen der Strahlbüschel B, B_1 und deren Strahlenpaare a, a_1'; b, b_1'....a', a_1; b', b_1.... werden mit einander und der geg. Richtungsebene parallel. Ist nun $\mathfrak{E}$ irgend eine Ebene, welche die erzeugte Fläche F in der geg. Richtung schneidet, so sind in derselben zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ vereinigt, welche in Ansehung der Punkte und Geraden, in denen sie von den entsprechenden Elementenpaaren der D, D_1 geschnitten werden, reciprok sind. Aber der unendlich entfernten Geraden von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ entspricht in doppeltem Sinne ein und derselbe Punkt, derjenige nämlich, welcher dem gem. Strahle ($\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$) der räumlichen Strahlbüschel angehört, und je zwei zug. Durchmesser von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sind mit je zwei Strahlen a, a_1; b, b_1.... oder a', a_1'; b', b_1'.... oder auch a, a'; b, b'.... parallel, bilden also eine Involution der rechten Winkel. Folglich sind die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ involutorisch, und die Linie, in welcher sie die Fläche F schneiden, ist ein Kreis. Auch sieht man, dass die Ebenen der Strahlbüschel B, B_1 zwei parallele Berührungsebenen dieser Fläche sind.

Zusatz. Haben die geg. Strahlbüschel D, D_1, involutorisch gelegt, nur eine einzige Brennebene, d. h. fällt die letztere mit einer Achsenebene zusammen, so stehen sämmtliche Kreise, in welchen die Fläche F geschnitten wird, auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte senkrecht; die Fläche F kann also durch Rotation eines Kegelschnittes um seine Achse erzeugt werden, und heisst in diesem Falle ein Konoid.

§. 5.

Konstruktion der Flächen des zweiten Grades mittels neun gegebener Punkte oder Berührungsebenen.

Sind D, D_1, $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{d}_0$, $\mathfrak{e}_0$, $\mathfrak{f}_0$, $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{h}_0$ zehn im Raume beliebig gegebene Punkte, und man verbindet irgend zwei dersel-

ben, z. B. D, D_1, mit den acht übrigen durch die Strahlen a, b, c, d, e, f, g, h und $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, h_1$, welche zwei beliebige, fest im Raume liegende Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ bezüglich in den Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1$ schneiden, so kann man durch eine analytische Betrachtung versucht werden, festzusetzen: die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen reciprok, und zwar die Polaren der Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ sollen durch die Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1$ gehen.

Denn sind für ein beliebiges Coordinatensystem x, y die Coordinaten eines beliebigen Punktes von $\mathfrak{E}$, und für ein anderes beliebiges Coordinatensystem x_1, y_1 die Coordinaten eines beliebigen Punktes von $\mathfrak{E}_1$, so ist

$$(ay+bx+c)y_1+(a'y+b'x+c')x_1+a''y+b''x+c''=0$$

die Gleichung einer Geraden in $\mathfrak{E}_1$, welche dem beliebigen Punkte (xy) von $\mathfrak{E}$ entspricht, und zugleich in der Form

$$(ay_1+a'x_1+a'')y+(by_1+b'x_1+b'')x+cy_1+c'x_1+c''=0$$

die Gleichung einer Geraden in $\mathfrak{E}$, welche dem beliebigen Punkte (x_1y_1) von $\mathfrak{E}_1$ entspricht, und es ist leicht zu zeigen, dass alle, den verschiedenen Punkten jener ersteren Geraden entsprechenden Geraden von $\mathfrak{E}$ durch einerlei Punkt, und umgekehrt, gehen, und dass jede solche Gerade und ihr entsprechender Strahlbüschel hinsichtlich ihrer entspr. Elementenpaare projektivisch sein müssen. Diese Gleichung, deren Constanten sich auf acht reduciren lassen, drückt also dieselbe Beziehung der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ auf einander aus, welche wir mit dem Namen der Reciprocität bezeichnet haben.

Setzt man in derselben nun an die Stelle von x, y und x_1, y_1 nach einander die Coordinaten der gegebenen acht Punktenpaare $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$, so erhält man acht Gleichungen mit den nämlichen acht Constanten, von denen eine jede, z. B. die erste, ausdrückt, dass die Polare des Punktes $\mathfrak{a}$ durch den Punkt $\mathfrak{a}_1$ gehe; und durch jene Gleichungen sind diese Constanten bestimmt.

Hat diess nun aber seine Richtigkeit, und man denkt sich D, D_1 als die Mittelpunkte zweier räumlichen Strahlbüschel, deren Strahlen und Ebenen bezüglich nach den entspr. Elementenpaaren von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ gerichtet sind, so sind auch diese Strahlbüschel reciprok, und zwar werden die Strahlen a, b, c, d, e, f, g, h von ihren Polaren in den Punkten $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0, \mathfrak{d}_0, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{f}_0, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0$ geschnitten, und folglich wird die durch D, D_1 erzeugte Fläche der zweiten Ordnung durch die gegebenen zehn beliebigen Punkte D, D_1, $\mathfrak{a}_0 \ldots$ gehen müssen — ein Resultat, welches jenem anderen analytischen Satze schnurstracks widerspricht, dass eine Fläche des zweiten Grades durch neun Punkte, sowie ihre Gleichung durch neun Constanten, bestimmt ist.

Dieses analytisch-geometrische Paradoxon ist für die rein-geometrische Betrachtung bereits durch Lehrsatz 33. hinweggeräumt. Die analytische Aufklärung desselben wird durch eine vergleichende Untersuchung der Constanten der Gleichung einer Fläche des zweiten Grades und derjenigen Gleichung, welche die Reciprocität zweier räumlichen Strahlbüschel darstellt, sich ergeben müssen.

Im Allgemeinen steht so viel fest, dass die Aufgabe, durch neun gegebene Punkte eine Fläche des zweiten Grades zu legen, auf die andere zurückkommt, um ein gegebenes n-Eck (wo n eine durch die Natur der Aufgabe selbst erst zu bestimmende Zahl bedeutet) ein anderes n-Eck zu beschreiben, welches mit einem zweiten gegebenen n-Eck reciprok sei. Diese Aufgabe aber lässt sich wieder auf folgende reduciren, welche nichts anderes als die Verallgemeinerung einer Klasse von Aufgaben ist, die seit langer Zeit die Aufmerksamkeit der Geometer beschäftigt haben, nämlich: Um oder in ein gegebenes n-Eck ein anderes zu beschreiben, welches einem zweiten gegebenen n-Eck collinear — und insbesondere affin, ähnlich, gleich, congruent — sei. Indem ich hiermit zur Auflösung dieser allgemeinen Aufgabe einlade, bemerke ich nur noch, dass dieselbe mittels des blossen Lineals sich muss ausführen lassen, während die der angedeuteten specielleren Aufgaben den Gebrauch eines festen Kreises erfordert; und dass die im sechsten Theile des Archivs S. 178. behandelte Aufgabe ein besonderer Fall derjenigen ist: In ein gegebenes Viereck ein anderes zu beschreiben, das einem zweiten gegebenen Viereck ähnlich sei.

Eine mehr direkte, wenn auch nicht durchaus symmetrische Auflösung des in der Ueberschrift dieses Paragraphen genannten Problems wird durch die folgendenden zwei Aufgaben vermittelt werden.

Aufgabe.

In einer Ebene $\mathfrak{E}$ sind zwei Gerade A, A'; auf der ersteren ein Punkt $\mathfrak{s}$, und ausserdem sind drei Punkte α, β, γ beliebig gegeben; und in einer zweiten Ebene $\mathfrak{E}_1$ sind zwei Punkte B_1, B_1'; eine durch den ersteren gehende Gerade s_1 und ausserdem drei Punkte α_1, β_1, γ_1 beliebig gegeben; man stellt sich vor, die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ seien reciprok, und zwar A, A' die Polaren von B_1, B_1'; $\mathfrak{s}$ der Pol von s_1, und die Polaren α_1, β_1, γ_1 gehen durch die Punkte α, β, γ. Man soll diese drei Polaren mit Hülfe des blossen Lineales zeichnen.

Analysis.

Es seien in Taf. V. Fig. 7. a, b, c die gesuchten drei Geraden; sie schneiden die A in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; die A' in den Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$; $\mathfrak{d}$ sei der Durchschnitt von A, A'. Man verbinde in der anderen Ebene den Punkt B_1 mit den Punkten α_1, β_1, γ_1, B_1' durch die Geraden a_1, b_1, c_1, d_1; und den Punkt B_1' mit α_1, β_1, γ_1 durch die Geraden a_1', b_1', c_1'. Da die Geraden A, A', a, b, c die Polaren von B_1, B_1', α_1, β_1, γ_1, und der Punkt $\mathfrak{s}$ der Pol von s_1 werden soll, so müssen folgende zwei Bedingungen erfüllt werden:

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{s}) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1, s_1)$$

und

$$A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}) = B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1).$$

Legen wir zu diesem Zwecke durch den Punkt $\mathfrak{s}$ eine beliebige Gerade A'' und denken uns auf derselben die Punkte $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ oder $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ so gewählt, dass dieselbe mit dem Strahlbüschel B_1 und folglich auch mit der Geraden A in Ansehung der Elemente $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$, $\mathfrak{s}$; a_1, b_1, c_1, d_1, s_1; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{s}$ projektivisch ist; so werden die Projektionsstrahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}''$ sich in einerlei Punkte i schneiden. Ferner lege man durch den Punkt $\mathfrak{d}$ irgend eine Gerade A''' und wähle auf derselben drei Punkte $\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'''$ oder $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ so, dass dieselbe mit dem Strahlbüschel B_1' und folglich auch mit der Geraden A' in Ansehung der Elemente $\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'''$, $\mathfrak{d}$; a_1', b_1', c_1', d_1'; $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}$ projektivisch ist; so werden auch die drei Projektionsstrahlen $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'''$ durch einerlei Punkt $\mathfrak{k}$ gehen müssen.

Denken wir uns nun die Gerade $\mathfrak{d}\mathfrak{d}''$, die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$; α, β, γ; $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ als fest und den Punkt i längs der ganzen Geraden $\mathfrak{d}\mathfrak{d}''$ fortbewegt, so werden die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ auf A und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ auf A' ihre Lage änderen, und es wird zwar in jedem Momente der Bewegung die erste der obigen Bedingungen, nicht aber die zweite erfüllt sein, indem die veränderlichen Geraden $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'''$ nicht immer durch einerlei Punkt $\mathfrak{k}$ gehen. Indessen bei dieser Bewegung erzeugen die veränderlichen Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}''$ drei perspektivische Strahlbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; je zwei Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$ zwei perspektivische Gerade A, A', und folglich auch je zwei Strahlen $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'''$; $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'''$; $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'''$ zwei projektivische Strahlbüschel $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$; $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{C}'$; $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$. Rückt der Punkt i in die Stelle des Punktes $\mathfrak{d}$, so rücken auch sämmtliche Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ nach $\mathfrak{d}$; und demnach sind in dem gemeinschaftlichen Strahle von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ oder $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$, d. h. längs der Geraden A''', entsprechende Strahlen vereinigt. Hieraus folgt, dass während jener Bewegung der Durchschnittspunkt der Geraden $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'''$ und $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'''$ eine gerade Linie M, und ebenso die der Geraden $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'''$ und $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'''$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'''$ und $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'''$ gerade Linien N, P beschreiben; hat man also zwei dieser Geraden gefunden, so ist ihr Durchschnittspunkt, welcher natürlich auch der dritten angehören muss, der Punkt $\mathfrak{k}$, durch welchen alles Uebrige sofort gegeben ist.

Konstruktion.

Man lege durch den gegebenen Punkt $\mathfrak{s}$ irgend eine Gerade A'' und bestimme auf derselben die Punkte $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ so, dass

$$A''(\mathfrak{a}'', \mathfrak{b}'', \mathfrak{c}'', \mathfrak{d}'', \mathfrak{s}) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1, s_1)$$

ist; lege ferner durch den Punkt $\mathfrak{d}$, den Durchschnitt von A, A', irgend eine Gerade A''' und bestimme auf derselben die Punkte $\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'''$ so, dass

$$A'''(\mathfrak{a}''', \mathfrak{b}''', \mathfrak{c}''', \mathfrak{d}) = B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1)$$

ist; ein Geschäft, dessen man in der Hauptaufgabe, um die es sich handelt, sich dadurch ganz überheben kann, dass man sich bereits vorhandener Punkte bedient. Sodann verbinde man den Punkt $\mathfrak{s}$ mit den Punkten α, β, γ durch drei Gerade, welche die

Gerade A' in den Punkten $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{b}_1'$, $\mathfrak{c}_1'$ schneiden, und diese letzteren Punkte mit den Punkten $\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'''$ durch drei Gerade, welche sich paarweise, nämlich $\mathfrak{a}_1'\mathfrak{a}'''$ und $\mathfrak{b}_1'\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{a}_1'\mathfrak{a}'''$ und $\mathfrak{c}_1'\mathfrak{c}'''$, in den Punkten $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{c}_0$ schneiden.

Jetzt verbinde man den Punkt $\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{d}''$ durch eine Gerade und einen beliebigen, aber weder mit $\mathfrak{d}$ noch mit $\mathfrak{d}''$ identischen Punkt $\mathfrak{i}_2$ dieser letzteren mit den Punkten $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$ durch drei Gerade, welche die Gerade A in den Punkten $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$ treffen, sofort diese Punkte wieder mit den Punkten α, β, γ durch drei Gerade, welche die A' in den Punkten $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{b}_2'$, $\mathfrak{c}_2'$ treffen; und wiederum diese drei Punkte mit den Punkten $\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'''$ durch drei Gerade, welche sich paarweise, nämlich die erste und die zweite, die erste und die dritte, in den Punkten $\mathfrak{b}^0$ und $\mathfrak{c}^0$ schneiden.

Jetzt verbinde man die Punkte $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{b}^0$ durch eine Gerade M, und die Punkte $\mathfrak{c}_0$ und $\mathfrak{c}^0$ durch eine Gerade N; sofort den Durchschnitt $\mathfrak{k}$ dieser Geraden M und N mit den Punkten $\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'''$ durch drei Gerade, welche die A' in den Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ treffen, und zuletzt diese drei Punkte mit α, β, γ durch drei Gerade a, b, c; so sind diese die drei verlangten Linien.

Beweis.

Denn geht man auf die Analysis zurück, so sind $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{b}_1'$, $\mathfrak{c}_1'$ diejenigen Punkte von A', welche man erhält, wenn der Punkt $\mathfrak{i}$ in die Stelle des Punktes $\mathfrak{d}''$ rückt, und folglich $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{b}^0$ zwei Punkte der dortigen Geraden M; $\mathfrak{c}_0$ und $\mathfrak{c}^0$ zwei Punkte der dortigen Geraden N. Da nun sowohl die Geraden $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'''$ sich in einem Punkte $\mathfrak{k}$, als auch die Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}''$ sich in einem Punkte $\mathfrak{i}$ schneiden müssen, so ist

$$A(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{s}) \equiv A''(\mathfrak{a}'',\mathfrak{b}'',\mathfrak{c}'',\mathfrak{d}'',\mathfrak{s}) = B_1(a_1,b_1,c_1,d_1,s_1)$$

und

$$A'(\mathfrak{a}',\mathfrak{b}',\mathfrak{c}',\mathfrak{d}) \equiv A'''(\mathfrak{a}''',\mathfrak{b}''',\mathfrak{c}''',\mathfrak{d}) = B_1'(a_1',b_1',c_1',d_1).$$

Also darf man festsetzen: die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen reciprok, und zwar die Geraden A, A' die Polaren der Punkte B_1, B_1', und die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ die Pole der Geraden a_1, b_1, c_1, d_1, s_1, a_1', b_1', c_1' sein. Dann aber sind nothwendig auch die Geraden a, b, c die Polaren der Punkte α_1, β_1, γ_1.

W. z. b. w.

Determination.

Gäbe es noch drei andere Gerade a, b, c, welche der Aufgabe genügten, so würden die Geraden, welche die neuen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ mit den früheren Punkten $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$ verbänden, ebenfalls auf der Geraden $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_{''}$ in einem Punkte $\mathfrak{i}$ convergiren müssen; es würden also die Geraden, welche die früheren Punkte $\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'''$ mit den neuen Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ verbänden, paarweise entsprechende Strahlen der Strahlbüschel $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ sein, also auf den Geraden M, N sich schneiden; der neue Punkt $\mathfrak{k}$ würde demnach mit dem früheren $\mathfrak{k}$ und die neuen Geraden a, b, c mit den früheren zu-

sammenfallen. **Folglich ist die vorstehende Aufgabe nur einer einzigen Auflösung fähig.**

Hülfssatz.

Haben eine Reihe von Kegelschnitten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... drei Punkte B, B', B'' gemein, und sind irgend zwei Gerade A, A', welche durch einen dieser Punkte, z. B. durch B, gehen, in Ansehung der übrigen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{s}$.... und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{s}'$...., in denen sie von den Kegelschnitten und der Verbindungslinie der beiden anderen Punkte B', B'' geschnitten werden, projektivisch, so haben sämmtliche Kegelschnitte noch einen vierten Punkt gemein, und eine jede durch B gehende Gerade ist mit A, A' in Ansehung der betreffenden Punkte projektivisch.

Beweis. Man denke sich die Ebene der Kegelschnitte mit einer anderen in höherem Grade geometrisch verwandt, so dass Punkt und Punkt sich entsprechen, und zwar B, B', B'' als die Hauptpunkte der ersten, und B_1, B_1', B_1'' als deren zugeordnete in der zweiten Ebene; so entsprechen den Kegelschnitten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... ebensoviele Gerade $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$....; sämmtlichen Geraden A, A', A''...., welche durch B gehen, wiederum Gerade A_1, A_1', A_1''...., welche durch B_1 gehen; und den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$....; $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$....; $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$.... von A, A', A''.... und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... entsprechen die Durchschnitte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$....; $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{b}_1'$, $\mathfrak{c}_1'$, $\mathfrak{d}_1'$....; $\mathfrak{a}_1''$, $\mathfrak{b}_1''$, $\mathfrak{c}_1''$, $\mathfrak{d}_1''$.... von A_1, A_1', A_1''.... mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$....; endlich allen Punkten $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$.... der Hauptlinie $B'B''$ lauter Punkte $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_1'$, $\mathfrak{s}_1''$...., welche mit dem Hauptpunkte B_1 sich vereinigen. Da nun nach Archiv. Theil VII. S. 118. einem jeden Strahlbüschel B' ein proj. Strahlbüschel B_1', und folglich auch einem jeden Strahle A des Hauptpunktes B ein projektivischer Strahl A_1 des zugeordneten B_1 entspricht, also

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{s}....) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{s}_1....);$$
$$A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}', \mathfrak{s}'....) = A_1'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1', \mathfrak{s}_1'....);$$
$$A''(\mathfrak{a}'', \mathfrak{b}'', \mathfrak{c}'', \mathfrak{d}'', \mathfrak{s}''....) = A_1''(\mathfrak{a}_1'', \mathfrak{b}_1'', \mathfrak{c}_1'', \mathfrak{d}_1'', \mathfrak{s}_1''....)$$

ist, und da angenommen ward, dass

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{s}....) = A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}', \mathfrak{s}'....)$$

sei, und die Punkte $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_1'$ sich vereinigen, so ist zunächst

$$A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{s}_1....) \equiv (A_1'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1', \mathfrak{s}_1'....);$$

d. h. die sämmtlichen Projektionsstrahlen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$.... von A_1, A_1' gehen durch einerlei Punkt; und diesem Punkte muss demnach ein vierter gemeinschaftlicher Punkt der Kegelschnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... entsprechen. Zugleich aber folgt, dass auch

$$A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{s}_1....) \equiv A_1''(\mathfrak{a}_1'', \mathfrak{b}_1'', \mathfrak{c}_1'', \mathfrak{d}_1'', \mathfrak{s}_1''....),$$

und hieraus wieder, dass

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{s} \ldots) = A''(\mathfrak{a}'', \mathfrak{b}'', \mathfrak{c}'', \mathfrak{d}'', \mathfrak{s}'' \ldots).$$

W. z. b. w.

Aufgabe.

Es sind in einer Ebene $\mathfrak{E}$ eine Gerade A und ein Punkt $\mathfrak{s}$ der letzteren, ausserdem fünf Punkte α, β, γ, δ, φ; in einer zweiten Ebene $\mathfrak{E}_1$ ein Punkt B_1 und ein Strahl s_1 desselben, ausserdem fünf Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1, φ_1 beliebig gegeben. Man stellt sich vor, die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ seien reciprok, und zwar die Gerade A die Polare des Punktes B_1, der Punkt $\mathfrak{s}$ der Pol der Geraden s_1, und die Polaren der Punkte $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varphi_1$ gehen durch die Punkte α, β, γ, δ, φ. Man soll diese fünf Polaren mit Hülfe des blossen Lineales zeichnen.

Konstruktion.

Man verbinde den Punkt B_1 mit den Punkten α_1, β_1, γ_1, δ_1, φ_1 durch die Geraden a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 und irgend einen der letzteren, z. B. δ_1, mit den übrigen α_1, β_1, γ_1, φ_1 durch die Geraden a_1', b_1', c_1', f_1'. Sodann lege man durch den Punkt $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{E}$ irgend eine Gerade A'' und wähle auf derselben die Punkte $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$, $\mathfrak{f}''$ oder $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}$ dergestalt, dass

$$A''(\mathfrak{a}'', \mathfrak{b}'', \mathfrak{c}'', \mathfrak{d}'', \mathfrak{f}'', \mathfrak{s}) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1, f_1, s_1)$$

sei, Punkte, welche man in der nächstfolgenden Hauptaufgabe bei geschickter Wahl der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sich sehr leicht verschaffen kann.

Jetzt lege man durch den Punkt δ irgend zwei Gerade d_1, d_2, welche die A in $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ schneiden, bezeichne zugleich eine jede von diesen zwei Geraden nach einander mit A', denke sich beidemale die Elemente A, A', $\mathfrak{s}$, α, β, γ und B_1, B_1' (d. h. δ_1), s_1, α_1, β_1, γ_1 im Sinne der gleichnamigen Elemente der vorhergehenden Aufgabe gegeben, und suche der dortigen Vorschrift gemäss die drei Geraden a, b, c, welche jetzt, in Bezug auf d_1 und d_2, a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 heissen mögen. Es seien $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{b}_1'$, $\mathfrak{c}_1'$ bezüglich die Durchschnitte von a_1, b_1, c_1 mit A und mit d_1; und ebenso $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{b}_2'$, $\mathfrak{c}_2'$ die Durchschnitte von a_2, b_2, c_2 mit A und mit d_2. Durch Ausführung der bezeichneten Konstruktionen sind bereits die Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ mit den Punkten $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ durch vier Gerade a_1^0, b_1^0, c_1^0, d_1^0, welche sich in einem Punkte $\mathfrak{i}_1$ schneiden; und die Punkte $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$ mit $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ durch vier Gerade a_2^0, b_2^0, c_2^0, d_2^0, welche sich in einem Punkte $\mathfrak{i}_2$ schneiden, verbunden. Man ziehe nun durch die Punkte $\mathfrak{i}_1$ und $\mathfrak{i}_2$ eine Gerade C.

Hiernach vertausche man einen der Punkte α, β, γ, z. B. γ, mit dem noch nicht berücksichtigten Punkte φ, und γ_1 mit φ_1, lege wieder durch δ irgend zwei Gerade, z. B. die vorigen d_1, d_2, betrachte wieder die Elemente A, A', $\mathfrak{s}$, α, β, φ und B_1, B_1',

s_1, α_1, β_1, φ_1 im Sinne der vorigen Aufgabe gegeben, konstruire mit Hülfe der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{f}''$, $\mathfrak{d}''$ zwei neue Punkte $\mathfrak{i}_1$ und $\mathfrak{i}_2$ und verbinde die letzteren durch eine Gerade F.

Es sei $\mathfrak{i}$ der Durchschnittspunkt der Geraden C und F; man verbinde $\mathfrak{i}$ mit den Punkten $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{f}''$, $\mathfrak{d}''$ durch die Geraden a^0, b^0, c^0, f^0, d^0, welche A in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{d}$ schneiden, und sofort diese Punkte bezüglich mit den Punkten α, β, γ, φ, δ durch die Geraden a, b, c, f, d; so sind letztere die fünf gesuchten Polaren von α_1, β_1, γ_1, φ_1, δ_1.

Beweis.

Es seien noch $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ die Durchschnitte von a, b, c mit d; man denke sich von jedem Punkte $\mathfrak{i}_3$.... der Geraden C, ausser den schon vorhandenen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$, nach den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... die Geraden $a_3{}^0$, $b_3{}^0$, $c_3{}^0$, $d_3{}^0$,.... gezogen, welche die A in $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{d}_3$,.... schneiden; diese Punkte wieder bezüglich mit α, β, γ, δ durch die Geraden a_3, b_3, c_3, d_3,.... verbunden, von denen die drei ersteren die letzte d_3 in den Punkten $\mathfrak{a}_3'$, $\mathfrak{b}_3'$, $\mathfrak{c}_3'$ schneiden, und bezeichne die um α, β, γ, δ gebildeten Strahlbüschel mit $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$. Diess vorausgesetzt, so hat man:

$$\mathfrak{D}'(d, d_1, d_2, d_3 \ldots) \equiv \mathfrak{D}(d^0, d_1{}^0, d_2{}^0, d_3{}^0 \ldots) \equiv \mathfrak{A}(a^0, a_1{}^0, a_2{}^0, a_3{}^0 \ldots)$$
$$\equiv \mathfrak{A}'(a, a_1, a_2, a_3 \ldots);$$

also

$$\mathfrak{D}'(d, d_1, d_2, d_3 \ldots) = \mathfrak{A}'(a, a_1, a_2, a_3 \ldots);$$

und ebenso

$$\mathfrak{D}'(d, d_1, d_2, d_3 \ldots) = \mathfrak{B}'(b, b_1, b_2, b_3 \ldots),$$
$$\mathfrak{D}'(d, d_1, d_2, d_3 \ldots) = \mathfrak{C}'(c, c_1, c_2, c_3 \ldots).$$

Folglich liegen sämmtliche Punkte δ, α, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_3'$.... in einem Kegelschnitte $\mathfrak{A}_0$; sämmtliche Punkte δ, β, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}_1'$, $\mathfrak{b}_2'$, $\mathfrak{b}_3'$.... in einem Kegelschnitte $\mathfrak{B}_0$; sämmtliche Punkte δ, γ, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}_1'$, $\mathfrak{c}_2'$, $\mathfrak{c}_3'$.... in einem Kegelschnitte $\mathfrak{C}_0$; und da demjenigen Strahle von $\mathfrak{D}$, welcher nach dem Durchschnitte der Geraden A'' und C geht, in den Strahlbüscheln $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ lauter Strahlen entsprechen, die nach dem Punkte $\mathfrak{s}$ gehen, und demjenigen Strahle von $\mathfrak{D}$, welcher nach dem Durchschnitte $\mathfrak{t}$ der Geraden A und C geht, in denselben vier Strahlbüscheln lauter Strahlen entsprechen, welche nach demselben Punkte $\mathfrak{t}$ gehen, so haben die Kegelschnitte $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{C}_0$ ausser dem Punkte δ noch zwei Punkte $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ gemein, welche der Geraden A angehören. Nun aber ist der Konstruktion gemäss

$$A'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1) = A'(\mathfrak{a}_2', \mathfrak{b}_2', \mathfrak{c}_2', \mathfrak{d}_2) = B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1);$$

also ist kraft des vorhergeschickten Hülfssatzes auch

$$A'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1) = A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}) = A'(\mathfrak{a}_3', \mathfrak{b}_3', \mathfrak{c}_3', \mathfrak{d}_3) \ldots$$
$$= B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1).$$

Auf dieselbe Weise wird mittels der Geraden F gezeigt, dass

$$A'(\mathfrak{a}',\mathfrak{b}',\mathfrak{f}',\mathfrak{d})=B_1'(a_1',b_1',f_1',d_1);$$

folglich, da zwei proj. Gebilde durch drei Paar entsprechende Elemente $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{d}$ und a_1', b_1', d_1 vollkommen bestimmt sind, so ist auch

$$A'(\mathfrak{a}',\mathfrak{b}',\mathfrak{c}',\mathfrak{f}',\mathfrak{d})=B_1'(a_1',b_1',c_1',f_1',d_1);$$

und da nach der Konstruktion auch

$$A(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f},\mathfrak{d},\mathfrak{s})\equiv A''(\mathfrak{a}'',\mathfrak{b}'',\mathfrak{c}'',\mathfrak{f}'',\mathfrak{d}'',\mathfrak{s})=B_1(a_1,b_1,c_1,f_1,d_1,s_1)$$

ist, so darf man festsetzen, die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen reciprok und zwar die Elemente A, d, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{f}'$ und B_1, δ_1, s_1, a_1, b_1, c_1, d_1, f_1, a_1', b_1', c_1', f_1' entsprechende sein (Archiv. Thl. VIII. S. 2.). Dann aber sind auch die Geraden a, b, c, f, welche die Punktenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$; $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ verbinden, und die Durchschnittspunkte α_1, β_1, γ_1, φ_1 der Strahlenpaare a_1, a_1'; b_1, b_1'; c_1, c_1'; f_1, f_1' entsprechende Elementenpaare.

W. z. b. w.

D e t e r m i n a t i o n.

Gäbe es noch fünf andere Gerade a, b, c, d, f, welche der Aufgabe genügten, so wären, wenn wieder d mit A' bezeichnet wird, für die neuen Punkte $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{d}$ wiederum die Beziehungen

$$A(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f},\mathfrak{d},\mathfrak{s})=B_1(a_1,b_1,c_1,f_1,d_1,s_1)=A''(\mathfrak{a}'',\mathfrak{b}'',\mathfrak{c}'',\mathfrak{f}'',\mathfrak{d}'',\mathfrak{s})$$

und

$$A'(\mathfrak{a}',\mathfrak{b}',\mathfrak{c}',\mathfrak{f}',\mathfrak{d})=B_1'(a_1',b_1',c_1',f_1',d_1)$$

vorhanden; denkt man sich nun den neuen Punkt $\mathfrak{d}$ mit dem früheren $\mathfrak{d}''$ durch eine Gerade verbunden, welche die Gerade C der Konstruktion in einem Punkte $\mathfrak{i}_3$ schneidet, und sofort diesen Punkt noch mit $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$ verbunden, wodurch man, wie im Beweise angegeben, die Punkte $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{c}_3$ und die Geraden a_3, b_3, c_3 erhalten würde, so müssten diese letzteren mit a, b, c zusammenfallen, weil nach der Determination der vorigen Aufgabe in den reciproken Ebenen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}$ nicht zu gleicher Zeit die Elemente B_1, δ_1, s_1, α_1, β_1, γ_1 den Elementen A, d, $\mathfrak{s}$, a, b, c und auch den Elementen A, d, $\mathfrak{s}$, a_3, b_3, c_3 entsprechen können, wenn sowohl a, b, c als auch a_3, b_3, c_3 durch die Punkte α, β, γ gehen. Denkt man sich also die neuen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ mit den früheren Punkten $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ durch Gerade verbunden, so müssen diese auf der Geraden C der Konstruktion convergiren; und denkt man sich die neuen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{f}''$, $\mathfrak{d}''$ durch Gerade verbunden, so müssen diese auf F, sämmtliche fünf Gerade also im Durchnitte $\mathfrak{i}$ von C und F convergiren. Folglich müssen auch die gedachten neuen Geraden a, b, c, d, f mit den

durch die Konstruktion erhaltenen zusammenfallen. **Also lässt auch diese Aufgabe nur eine einzige Auflösung zu.**

Aufgabe.

Wenn von einer Fläche der zweiten Ordnung neun Punkte beliebig gegeben sind, mittels des gewöhnlichen und eines Ebenen-Lineales allein beliebig viele andere Punkte dieser Fläche zu finden.

Konstruktion.

Es seien D, D_1, σ, π, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ die neun gegebenen Punkte. Man verbinde irgend zwei derselben, z. B. D, D_1, mit den sieben übrigen bezüglich durch die Geraden s, p, a, b, c, d, f und s_1, p_1, a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 und gebe zwei gesonderten oder auch vereinigten Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ irgend eine feste Lage im Raume (am Vortheilhaftesten ist es, eine der Ebenen zu wählen, welche drei der sieben Punkte verbindet). Es seien $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{p}$, α, β, γ, δ, φ die Punkte, in welchen die Ebene $\mathfrak{E}$ von den Geraden s, p, a, b, c, d, f — und $\mathfrak{s}_1$, B_1, α_1, β_1, γ_1, δ_1, φ_1 die Punkte, in welchen die Ebene $\mathfrak{E}_1$ von den Geraden s_1, p_1, a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 getroffen wird. Man verbinde zwei jener Punkte, z. B. $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{p}$, durch eine Gerade A, und demzufolge die Punkte $\mathfrak{s}_1$ und B_1 durch eine Gerade s_1, setze fest, die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen reciprok, und zwar die Gerade A die Polare des Punktes B_1, der Punkt $\mathfrak{s}$ der Pol der Geraden s_1 sein, und die Polaren der Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1, φ_1 sollen durch die Punkte α, β, γ, δ, φ gehen; und suche diese fünf Polaren nach der in der vorigen Aufgabe gegebenen Vorschrift. Hierdurch ist man in den Stand gesetzt, zu jedem Punkte der Ebene $\mathfrak{E}_1$ (oder $\mathfrak{E}$) seine Polare in der Ebene $\mathfrak{E}$ (oder $\mathfrak{E}_1$) zu finden. Ist nun m_1 irgend ein Strahl des Punktes D_1 (oder D), dessen zweiten Durchschnitt $\mathfrak{m}$ mit der Fläche der zweiten Ordnung man finden will, so suche man zu dem Punkte u_1, in welchem m_1 die Ebene $\mathfrak{E}_1$ trifft, seine Polare in $\mathfrak{E}$, und lege durch diese Polare und den Punkt D eine Ebene; so schneidet die letztere den Strahl m_1 in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{m}$.

Beweis.

Man denke sich den Punkt D_1 mit sämmtlichen Punkten und Geraden der Ebene $\mathfrak{E}_1$, und den Punkt D mit den Polaren und Polen derselben in $\mathfrak{E}$ durch Gerade und Ebenen verbunden, so erhält man zwei reciproke räumliche Strahlbüschel D, D_1, deren entsprechende Elementenpaare sich in den Punkten einer Fläche F der zweiten Ordnung schneiden müssen. Da nun der Konstruktion gemäss der Geraden A der Punkt B_1, also der Ebene $D\sigma\pi$ der Strahl p_1, welcher dieselbe im Punkte π schneidet, entspricht; da der Punkt $\mathfrak{s}$ der Pol von s_1, also der Strahl s die Polare der Ebene $D_1\pi\sigma$ ist, welche von jenem im Punkte σ getroffen wird; und da die Polaren der Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1, φ_1 durch die Punkte α, β, γ, δ, φ, also auch die Polaren der Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 durch die Strahlen a, b, c, d, f gehen und mit diesen zugleich von den ersteren in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ getroffen werden, so gehören ausser den Punkten D, D_1 auch die sieben

Punkte σ, π, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ der Fläche F an; ausserdem ab... muss auch der Punkt $\mathfrak{m}$ auf F liegen. Gäbe es nun eine zweite, vo... F verschiedene Fläche F' der zweiten Ordnung, welche die gegebene neun Punkte enthielte, so könnte man nach Lehrsatz 33. die Punkt... D, D_1 bezüglich mit σ und π durch zwei Gerade s und p_1 und mit den beiden Punkten σ, π durch zwei Ebenen ps oder π^0 und $p_1 s_1$ oder $\sigma_1{}^0$ verbinden und sodann festsetzen, die Punkte D, D_1 sollen die Mittelpunkte zweier reciproker räumlicher Strahlbüschel, welche die Fläche F' erzeugen, und die Ebenen π^0, $\sigma_1{}^0$ sollen die Polaren der Strahlen p_1, s sein. Dann aber würden die festen Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ auch in Ansehung der Elementenpaare, in denen sie von den entsprechenden Elementenpaaren dieser neuen Strahlbüschel D, D_1 geschnitten werden, reciprok sein; und da die Ebenen π^0, $\sigma_1{}^0$ die $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in den Geraden A, s_1; die Strahlen s, p_1 dieselben in den Punkten $\mathfrak{s}$, B_1 schneiden; da ferner die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ auch der neuen Fläche F' angehören, also die Strahlen $D_1\mathfrak{a}$, $D_1\mathfrak{b}$, $D_1\mathfrak{c}$, $D_1\mathfrak{d}$, $D_1\mathfrak{f}$ des neuen Strahlbüschels D_1 von ihren Polaren in diesen Punkten getroffen werden, folglich die Polaren der Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1, φ_1 auch jetzt durch die Punkte α, β, γ, δ, φ gehen müssen, so würden auch in den neuen reciproken Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, sowie in den vorigen, die Elementenpaare A und B_1, $\mathfrak{s}$ und s_1 sich entsprechen, und die Polaren der Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1, φ_1 durch die Punkte α, β, γ, δ, φ gehen. Dann aber müssen, der Determination der vorhergehenden Aufgabe zufolge, auch diese letzteren fünf Polaren mit den früheren zusammenfallen, und also auch die neuen Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, die neuen Strahlbüschel D, D_1 und somit die neue Fläche F' mit den früheren identisch sein. Demnach liegt auch der Punkt $\mathfrak{m}$ auf derjenigen Fläche der zweiten Ordnung, von welcher die Punkte D, D_1, σ, π, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ entnommen waren.

W. z. b. w.

Mit dieser letzten Aufgabe ist nun, kraft des Gesetzes der Dualität, zugleich auch die andere: „An neun beliebig gegebene Ebenen eine Fläche der zweiten Klasse zu legen“ gelöst; denn es fehlt hierzu nichts als das mechanische Geschäft, Konstruktion und Beweis derselben aus dem für die erstere gegebenen Wortlaute herauszulesen; und so dürfen wir denn als Resultat dieser ganzen rein-geometrischen Betrachtung aussprechen:

Lehrsatz 36.

Eine Fläche der zweiten Ordnung ist durch neun ihrer Punkte vollkommen bestimmt.	Eine Fläche der zweiten Klasse ist durch neun ihrer Berührungsebenen vollkommen bestimmt.

XVIII.

Ueber die näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrales.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

In dem netten Aufsatze über gewisse magnetische Wirkungen No. XX. Theil VII. ist Herr Dr. Dippe auf das bestimmte Integral

$$W=cr\int_0^{\varphi}\frac{(r-r'\cos\varphi)\partial\varphi}{[r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

geführt worden, dessen numerische Berechnung mit einigen Schwierigkeiten, oder richtiger, Weitläufigkeiten verknüpft scheint. Diess gab Veranlassung zu den nachfolgenden Betrachtungen, welche sich mit der Verwerthung des allgemeinen Integrales

$$U=\int_0^u\frac{(1-\varrho\cos u)\partial u}{(1-2\varrho\cos u+\varrho^2)^{\mu}} \qquad (1)$$

beschäftigen, das für $\mu=\frac{3}{2}$, $\varrho=\frac{r'}{r}$, $u=\varphi$ auf das obige zurückführt.

Zunächst ist zu bemerken, dass man wegen der Periodizität von $\cos u$ den Werth des Integrales nur von $u=0$ bis höchstens $u=\pi$ zu kennen braucht, um sogleich im Besitze der sonstigen Werthe des Integrales zu sein. Diese Eigenschaft kommt überhaupt allen unter der Form

$$\int_0^u F(\cos u)\partial u$$

stehenden Integralen zu. Ist nämlich $u=k\pi+v$, wo k eine ganze Zahl, v eine zwischen 0 und π fallende Grösse bedeutet, so hat man

$$\int_0^{k\pi+v} F(\cos u)\partial u = \int_0^{\pi} F(\cos u)\partial u + \int_{\pi}^{2\pi} F(\cos u)\partial u + \int_{2\pi}^{3\pi} F(\cos u)\partial u + \ldots$$
$$\ldots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} F(\cos u)\partial u + \int_{k\pi}^{k\pi+v} F(\cos u)\partial u.$$

Lässt man nun die folgenden Substitutionen eintreten:

im 1sten, 2ten, 3ten, 4ten ... Integrale
$u = u',\ 2\pi - u',\ 2\pi + u',\ 4\pi - u'$, u. s. w.,

so werden die ersten k Integrale einander gleich und

$$\int_0^{k\pi+v} F(\cos u)\partial u = k\int_0^{\pi} F(\cos u')\,\partial u' + \int_{k\pi}^{k\pi+v} F(\cos u)\partial u.$$

Im letzten Integrale setzt man $u = k\pi + u'$ oder $= (k+1)\pi - u'$, jenachdem k gerade oder ungerade ist, und hierdurch geht dasselbe entweder in

$$\int_0^{v} F(\cos u')\partial u'$$

oder in

$$\int_{\pi-v}^{\pi} F(\cos u')\,\partial u' = \int_0^{\pi} F(\cos u')\,\partial u' - \int_0^{\pi-v} F(\cos u')\partial u'$$

über, woraus zusammen hervorgeht, dass es blos darauf ankommt, den Werth von

$$\int_0^{u'} F(\cos u')\,\partial u'$$

für alle u' von $u' = 0$ bis $u' = \pi$ zu bestimmen, was auf die frühere Behauptung zurückkommt.

Könnte man nun den Ausdruck

$$\frac{1 - \varrho\cos u}{(1 - 2\varrho\cos u + \varrho^2)^{\mu}}$$

in eine Reihe von der Form

$$A_0 + A_1\cos u + A_2\cos 2u + A_3\cos 3u + \ldots$$

verwandeln, wobei wir uns ganz auf das Intervall 0 bis π für u beschränken können, so würde das Integral (1) sehr leicht zu finden sein, indem man

$$U = A_0 u + \frac{1}{1}A_1\sin u + \frac{1}{2}A_2\sin 2u + \frac{1}{3}A_3\sin 3u + \ldots \quad (2)$$

erhielte. Ferner erhellt auch leicht, dass es nur nöthig wäre, den Bruch

$$\frac{1}{(1 - 2\varrho\cos u + \varrho^2)^{\mu}}$$

eine Reihe von der Form

$$\frac{1}{2}C_0+C_1\cos u+C_2\cos 2u+C_3\cos 3u+\ldots$$

anzusetzen; denn es ergäbe sich dann durch Multiplikation mit $-\varrho\cos u$ und Zerlegung jedes Cosinusproduktes in eine Cosinussumme

$$\frac{1-\varrho\cos u}{(1-2\varrho\cos u+\varrho^2)^\mu}$$
$$=\frac{1}{2}C_0+C_1\cos u+C_2\cos 2u+C_3\cos 3u$$
$$-\frac{1}{2}\varrho C_0\cos u-\frac{1}{2}\varrho C_1(1+\cos 2u)$$
$$-\frac{1}{2}\varrho C_2(\cos u+\cos 3u)$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und folglich durch Vergleichung mit dem Vorigen

$$A_0=\frac{1}{2}(C_0-\varrho C_1) \qquad (3)$$

und sonst im Allgemeinen für ein ganzes positives $n>0$

$$A_n=C_n-\frac{1}{2}\varrho(C_{n-1}+C_{n+1}). \qquad (4)$$

Die oben angedeutete Aufgabe lässt sich nun mittelst des von Lagrange zuerst aufgestellten Satzes lösen, wonach jede Funktion $F(u)$ von u in eine Reihe von der Form

$$\frac{1}{2}C_0+C_1\cos u+C_2\cos 2u+C_3\cos 3u+\ldots.$$

verwandelt werden kann, wenn man sich auf das Intervall $u=0$ bis $u=\pi$ beschränkt; es ist nämlich dann

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(u)\cos nu\,\partial u.$$

In der Anwendung auf unseren Fall giebt diess

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\cos nu\,\partial u}{(1-2\varrho\cos u+\varrho^2)^\mu}, \qquad (5)$$

so dass jetzt unsere ganze Aufgabe sich auf die Entwickelung dieses Integrales reduzirt. Dieselbe lässt sich in folgender einfachen Weise bewerkstelligen.

Nach einem von C. G. J. Jacobi gefundenen höchst merkwürdigen Theoreme *) ist überhaupt

$$\int_0^\pi f(\cos u)\cos nu\partial u = \frac{1}{1.3.5....(2n-1)}\int_0^\pi f^{(n)}(\cos u)\sin^{2n}u\partial u, \quad (6)$$

wobei f eine ganz willkührliche Funktion bezeichnet. Setzen wir nun

$$f(z) = \frac{1}{(1-2\varrho z+\varrho^2)^\mu},$$

also

$$f^{(n)}(z) = \mu(\mu+1)....(\mu+n-1)\frac{(2\varrho)^n}{(1-2\varrho z+\varrho^2)^{\mu+n}},$$

so ergiebt sich auf der Stelle aus No. (6)

$$\int_0^\pi \frac{\cos nu\partial u}{(1-2\varrho\cos u+\varrho^2)^\mu}$$
$$=\frac{\mu(\mu+1)....(\mu+n-1)}{1.3.5....(2n-1)}(2\varrho)^n\int_0^\pi\frac{\sin^{2n}u\partial u}{(1-2\varrho\cos u+\varrho^2)^{\mu+n}},$$

oder nach Multiplikation mit $\frac{2}{\pi}$ nach No. (5)

$$C_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\mu(\mu+1)....(\mu+n-1)}{1.3.5....(2n-1)}(2\varrho)^n V, \quad (7)$$

worin zur Abkürzung

$$V = \int_0^\pi \frac{\sin^{2n}u\partial u}{(1-2\varrho\cos u+\varrho^2)^{\mu+n}} \quad (8)$$

gesetzt worden ist. Das vorliegende Integral lässt sich auf mehrere verschiedene Weisen in eine Reihe verwandeln, von denen ich nur eine hervorheben will. Man setze $u=2v$ und bemerke, dass

$$\sin 2v = 2\sin v\cos v,\quad \cos 2v = 2\cos^2 v - 1$$

ist; man erhält dann

$$V = 2^{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}v\cos^{2n}v\,\partial v}{[(1+\varrho)^2-4\varrho\cos^2 v]^{\mu+n}}. \quad (9)$$

Bezeichnen wir ferner die Coeffizienten

$$\frac{\mu+n}{1},\ \frac{(\mu+n)(\mu+n+1)}{1.2},\ \frac{(\mu+n)(\mu+n+1)(\mu+n+2)}{1.2.3},....$$

zur Abkürzung mit M_1, M_2, M_3, etc., so ist

*) Archiv. Theil IV. S. 109.

$$\frac{1}{[(1+\varrho)^2-4\varrho\cos^2 v]^{\mu+n}}=\frac{1}{(1+\varrho)^{2\mu+2n}}\cdot\frac{1}{\left\{1-\frac{4\varrho}{(1+\varrho)^2}\cos^2 v\right\}^{\mu+n}}$$

$$=\frac{1}{(1+\varrho)^{2\mu+2n}}\left\{1+M_1\frac{4\varrho}{(1+\varrho)^2}\cos^2 v+M_2\frac{4^2\varrho^2}{(1+\varrho)^4}\cos^4 v+\ldots\right\}.$$

Substituirt man diess in die Gleichung (9) und integrirt jedes einzelne Glied mittelst der Formel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}v\cos^{2q}v\partial v=\frac{1.3.5\ldots.(2p-1).1.3.5\ldots.(2q-1)}{2.4.6\ldots.(2p+2q)}\pi,$$

so ist es sehr leicht, für V eine Reihe zu erhalten, die nach Potenzen von

$$\frac{2\varrho}{(1+\varrho)^2}$$

fortschreitet, und ebendesswegen ziemlich gut convergirt. Um dann zu C_n zurückzugelangen, bedarf es blos gewöhnlicher Substitutionen und Hebungen.

XIX.

Ueber einige Reihen, deren Glieder die auf einander folgenden Binomial-coefficienten als Factoren in sich schliessen.

Von Herrn Oskar Werner,

Schüler des polytechnischen Institutes zu Dresden.

I.

Die Summe irgend einer Reihe wollen wir in dieser Abhandlung dadurch bezeichnen, dass wir ihrem allgemeinen Gliede das Symbol Σ vorsetzen. Ferner wollen wir den Quotienten

$$\frac{n(n+k)(n+2k)\ldots.[n+(p-1)k]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,p}$$

der Kürze wegen durch $\overset{k}{n}_p$, den $p$ten Binomialcoefficienten aber welcher hiernach eigentlich durch $\overset{-1}{n}_p$ bezeichnet werden sollte, ausnahmsweise durch n_p darstellen.

Indem wir nun voraussetzen, dass a, φ und ψ von r unabhängige Grössen sind und die Function $f(r)$ der Gleichung

$$1.\quad f(r)+f(r+\psi)=af(r+\varphi)$$

Genüge leistet, wollen wir uns zunächst die Summation der für das Folgende wichtigen Reihen

$$\Sigma a^{n-1}f[r+\psi+(n-1)\varphi]=f(r+\psi)+af(r+\psi+\varphi)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+a^{n-1}f[r+\psi+(n-1)\varphi],$$
$$\Sigma(-1)^{n-1}f[r+\varphi+(n-1)\psi]=f(r+\varphi)-f(r+\varphi+\psi)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots(-1)^{n-1}f[r+\varphi+(n-1)\psi]$$

zur Aufgabe machen, und setzen deswegen, was nach 1. offenbar gestattet ist, in der ersten dieser beiden Reihen

$$af(r+\varphi)-f(r) \text{ für } f(r+\psi),$$
$$af(r+2\varphi)-f(r+\varphi) \text{ für } f(r+\psi+\varphi),$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$af[r+n\varphi]-f[r+(n-1)\varphi] \text{ für } f[r+\psi+(n-1)\varphi]$$

und in der zweiten Reihe

$$\frac{1}{a}[f(r)+f(r+\psi)] \text{ für } f(r+\varphi),$$
$$\frac{1}{a}[f(r+\psi)+f(r+2\psi)] \text{ für } f(r+\varphi+\psi),$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\frac{1}{a}[f[r+(n-1)\varphi]+f[r+n\psi]] \text{ für } f[r+\varphi+(n-1)\psi];$$

wir erhalten dann, sobald wir nach gleichen Potenzen von a anordnen und aufheben, was sich aufheben lässt,

$$\Sigma a^{n-1}f[r+\psi+(n-1)\varphi]=a^n f(r+n\varphi)-f(r),$$
$$\Sigma(-1)^{n-1}f[r+\varphi+(n-1)\psi]=\frac{(-1)^{n-1}f(r+n\psi)+f(r)}{a}$$

und haben also

$$2.\quad a^n f(r+n\varphi)-f(r)=f(r+\psi)+af(r+\psi+\varphi)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+a^{n-1}f[r+\psi+(n-1)\varphi],$$
$$3.\quad \frac{(-1)^{n-1}f(r+n\varphi)+f(r)}{a}=f(r+\varphi)-f(r+\varphi+\psi)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots(-1)^{n-1}f[r+\varphi+(n-1)\psi]$$

Bilden wir nun aus den beiden $n$gliedrigen Reihen

$$f(r+\psi)+af(r+\psi+\varphi)+a^2f(r+\psi+2\varphi)+\dots$$
$$\dots+a^{n-1}f[r+\psi+(n-1)\psi],$$
$$-af(r+\varphi)+af(r+\varphi+\psi)-af(r+\varphi+2\psi)+\dots$$
$$\dots(-1)^n af[r+\varphi+(n-1)\psi]$$

durch Subtraction je zweier Nachbarglieder die successiven Differenzenreihen, so treten als Anfangsglieder der aus der ersten Reihe erhaltenen Differenzenreihen die Grössen

$$f(r+2\psi),\ f(r+3\psi),\ f(r+4\psi), \dots f(r+n\psi);$$

und als Anfangsglieder der aus der zweiten Reihe erhaltenen Differenzenreihen die Grössen

$$a^2f(r+2\varphi),\ -a^3f(r+3\varphi),\ a^4f(r+4\varphi),\ \dots(-1)^n a^n f(r+n\varphi)$$

auf; wir erhalten daher nach der Lehre von den höheren Differenzen und nach dem Obigen

$$4.\quad a^n f(r+n\varphi)=f(r)+n_1 f(r+\psi)+n_2 f(r+2\psi)+\dots+n_n f(r+n\psi)$$

und

$$5.\quad (-1)^n f(r+n\psi)=f(r)-n_1 af(r+\varphi)+n_2 a^2 f(r+2\varphi)-\dots$$
$$\dots(-1)^n n_n a^n f(r+n\varphi).$$

Die in Gleichung 1. ausgesprochene Bedingung, welcher die Function $f(r)$ unterworfen ist, wird von mehreren bekannten Functionen erfüllt. Einige derselben wollen wir jetzt näher in's Auge fassen.

II.

Weil bekanntlich

$$\sin r+\sin(r+2\varphi)=2\cos\varphi\sin(r+\varphi),$$
$$\cos r+\cos(r+2\varphi)=2\cos\varphi\cos(r+\varphi);$$

so genügen die Functionen $\sin r$ und $\cos r$ in der That der Gleichung 1. Für beide ist also $a=2\cos\varphi$ und $\psi=2\varphi$ zu setzen; daher gehen für $f(r)=\sin r$ und $f(r)=\cos r$ die Gleichungen 2., 3., 4., 5. über in die Gleichungen:

$$6.\quad \left\{\begin{aligned} &(2\cos\varphi)^n\sin(r+n\varphi)-\sin r=\sin(r+2\varphi)+(2\cos\varphi)\sin(r+3\varphi)+\dots\\ &\qquad\dots+(2\cos\varphi)^{n-1}\sin[r+(n+1)\varphi],\\ &(2\cos\varphi)^n\cos(r+n\varphi)-\cos r=\cos(r+2\varphi)+(2\cos\varphi)\cos(r+3\varphi)+\dots\\ &\qquad\dots+(2\cos\varphi)^{n-1}\cos[r+(n+1)\varphi]; \end{aligned}\right.$$

$$7.\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(-1)^{n-1}\sin(r+2n\varphi)+\sin r}{2\cos\varphi}=\sin(r+\varphi)-\sin(r+3\varphi)+\sin(r+5\varphi)-\dots\\ &\qquad\dots(-1)^{n-1}\sin[r+(2n-1)\varphi],\\ &\frac{(-1)^{n-1}\cos(r+2n\varphi)+\cos r}{2\cos\varphi}=\cos(r+\varphi)-\cos(r+3\varphi)+\cos(r+5\varphi)\\ &\qquad-\dots(-1)^{n-1}\cos[r+(2n-1)\varphi]. \end{aligned}\right.$$

$$8.\quad \begin{cases} (2\cos\varphi)^n \sin(r+n\varphi) = \sin r + n_1 \sin(r+2\varphi) + n_2 \sin(r+4\varphi) + \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + n_n \sin(r+2n\varphi), \\ (2\cos\varphi)^n \cos(r+n\varphi) = \cos r + n_1 \cos(r+2\varphi) + n_2 \cos(r+4\varphi) + \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + n_n \cos(r+2n\varphi); \end{cases}$$

und

$$9.\quad \begin{cases} (-1)^n \sin(r+2n\varphi) = \sin r - n_1 (2\cos\varphi)\sin(r+\varphi) \\ \quad + n_2 (2\cos\varphi)^2 \sin(r+2\varphi) - \ldots (-1)^n n_n (2\cos\varphi)^n \sin(r+n\varphi), \\ (-1)^n \cos(r+2n\varphi) = \cos r - n_1 (2\cos\varphi)\cos(r+\varphi) \\ \quad + n_2 (2\cos\varphi)^2 \cos(r+2\varphi) - \ldots (-1)^n n_n (2\cos\varphi)^n \cos(r+n\varphi). \end{cases}$$

Lassen wir in den Gleichungen 6., 7., 8. und 9. φ in $\varphi + \frac{\pi}{2}$ übergehen, und berücksichtigen wir, dass für gerade Werthe von m

$$\sin(m\tfrac{\pi}{2} + \varphi) = (-1)^{\frac{m}{2}} \sin\varphi,\quad \cos(m\tfrac{\pi}{2} + \varphi) = (-1)^{\frac{m}{2}} \cos\varphi;$$

und für ungerade Werthe von m

$$\sin(m\tfrac{\pi}{2} + \varphi) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos\varphi,\quad \cos(m\tfrac{\pi}{2} + \varphi) = (-1)^{\frac{m+1}{2}} \sin\varphi;$$

so erhalten wir für ein gerades n

$$10^a.\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}-1} (2\sin\varphi)^n \sin(r+n\varphi) + \sin r = \\ \sin(r+2\varphi) - (2\sin\varphi)\cos(r+3\varphi) - (2\sin\varphi)^2 \sin(r+4\varphi) + \ldots \\ \qquad \ldots (-1)^{\frac{n}{2}} (2\sin\varphi)^{n-1} \cos[r+(n+1)\varphi], \\ (-1)^{\frac{n}{2}-1} (2\sin\varphi)^n \cos(r+n\varphi) + \cos r = \\ \cos(r+2\varphi) + (2\sin\varphi)\sin(r+3\varphi) - (2\sin\varphi)^2 \cos(r+4\varphi) - \ldots \\ \qquad \ldots (-1)^{\frac{n}{2}-1} (2\sin\varphi)^{n-1} \sin[r+(n+1)\varphi]; \end{cases}$$

und für ein ungerades n

$$10^b.\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} (2\sin\varphi)^n \cos(r+n\varphi) + \sin r = \\ \sin(r+2\varphi) - (2\sin\varphi)\cos(r+3\varphi) - (2\sin\varphi)^2 \sin(r+4\varphi) + \ldots, \\ \qquad \ldots (-1)^{\frac{n-1}{2}} (2\sin\varphi)^{n-1} \sin[r+(n+1)\varphi], \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} (2\sin\varphi)^n \sin(r+n\varphi) + \cos r = \\ \cos(r+2\varphi) + (2\sin\varphi)\sin(r+3\varphi) - (2\sin\varphi)^2 \cos(r+4\varphi) + \ldots \\ \qquad \ldots (-1)^{\frac{n-1}{2}} (2\sin\varphi)^{n-1} \cos[r+(n+1)\varphi]; \end{cases}$$

wobei das Zeichen von Paar zu Paar wechselt.

Ferner erhalten wir nach 7.

$$11.\ \begin{cases} \dfrac{\cos(r+n\varphi)\sin n\varphi}{\sin\varphi}=\cos(r+\varphi)+\cos(r+3\varphi)+\cos(r+5\varphi)+\ldots \\ \qquad\qquad \ldots+\cos[r+(2n-1)\varphi], \\ \dfrac{\sin(r+n\varphi)\sin n\varphi}{\sin\varphi}=\sin(r+\varphi)+\sin(r+3\varphi)+\sin(r+5\varphi)+\ldots \\ \qquad\qquad \ldots+\sin[r+(2n-1)\varphi]; \end{cases}$$

und nach 8.

$$12.\ \begin{cases} (-1)^n(2\sin\varphi)^n\sin[r+n(\varphi+\frac{\pi}{2})]=\sin r-n_1\sin(r+2\varphi) \\ \qquad +n_2\sin(r+4\varphi)-\ldots(-1)^n n_n\sin(r+2n\varphi), \\ (-1)^n(2\sin\varphi)^n\cos[r+n(\varphi+\frac{\pi}{2})]=\cos r-n_1\cos(r+2\varphi) \\ \qquad +n_2\cos(r+4\varphi)-\ldots(-1)^n n_n\cos(r+2n\varphi); \end{cases}$$

und endlich nach 9. für ein gerades n

$$13^a.\ \begin{cases} \sin(r+2n\varphi)=\sin r+n_1(2\sin\varphi)\cos(r+\varphi)-n_2(2\sin\varphi)^2\sin(r+2\varphi)-\ldots \\ \qquad \ldots(-1)^{\frac{n}{2}}(2\sin\varphi)^n n_n\sin(r+n\varphi), \\ \cos(r+2n\varphi)=\cos r-n_1(2\sin\varphi)\sin(r+\varphi)-n_2(2\sin\varphi)^2\cos(r+2\varphi)+\ldots \\ \qquad \ldots(-1)^{\frac{n}{2}}(2\sin\varphi)^n n_n\cos(r+n\varphi); \end{cases}$$

für ein ungerades n dagegen

$$13^b.\ \begin{cases} \sin(r+2n\varphi)=\sin r+n_1(2\sin\varphi)\cos(r+\varphi) \\ -n_2(2\sin\varphi)^2\sin(r+2\varphi)-\ldots(-1)^{\frac{n+1}{2}}n_n(2\sin\varphi)^n\cos(r+n\varphi), \\ \cos(r+2n\varphi)=\cos r-n_1(2\sin\varphi)\sin(r+\varphi) \\ -n_2(2\sin\varphi)^2\cos(r+2\varphi)+\ldots(-1)^{\frac{n+1}{2}}n_n(2\sin\varphi)^n\sin(r+n\varphi); \end{cases}$$

wobei ein Zeichenwechsel von Paar zu Paar eintritt.

In der zweiten der durch 8. bezeichneten Gleichungen wollen wir jetzt $r+n\varphi=0$, also $r=-n\varphi$ setzen; wir erhalten dann

$$(2\cos\varphi)^n=\cos n\varphi+n_1\cos(n-2)\varphi+n_2\cos(n-4)\varphi+\ldots$$
$$\ldots+n_{n-1}\cos(n-2)\varphi+n_n\cos n\varphi,$$

und hieraus, wenn wir die Cosinus der Gleichvielfachen des Bogens φ vereinigen und die Relation $n_m=n_{n-m}$ beachten, für ein gerades n

$$14^a.\ 2^{n-1}\cos\varphi^n=\cos n\varphi+n_1\cos(n-2)\varphi+n_2\cos(n-4)\varphi+\ldots+\tfrac{1}{2}n_{\frac{1}{2}n},$$

sowie für ein ungerades n

$$14^b.\quad 2^{n-1}\cos\varphi^n = \cos n\varphi + n_1\cos(n-2)\varphi + n_2\cos(n-4)\varphi + \ldots\ldots + n_{\frac{1}{2}(n-1)}\cos\varphi.$$

Wenn wir ferner in der zweiten der durch 12. bezeichneten Gleichungen $r+n(\varphi+\frac{\pi}{2})=0$, also $r=-n(\varphi+\frac{\pi}{2})$ setzen, so erhalten wir durch ein ähnliches Verfahren, wie vorher, für ein gerades n

$$15^a.\quad (-1)^{\frac{n}{2}}2^{n-1}\sin\varphi^n = \cos n\varphi - n_1\cos(n-2)\varphi + n_2\cos(n-4)\varphi - \ldots \ldots(-1)^{\frac{n}{2}}\tfrac{1}{2}n_{\frac{1}{2}n},$$

für ein ungerades n gegentheils

$$15^b.\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}\sin\varphi^n = \sin n\varphi - n_1\sin(n-2)\varphi + n_2\sin(n-4)\varphi - \ldots \ldots(-1)^{\frac{n-1}{2}}n_{\frac{1}{2}(n-1)}\sin\varphi.$$

III.

Eine dritte Function, welche der Gleichung 1. entspricht, ist $f(r)=b^r$. Weil nun

$$b^r + b^{r+\psi} = (b^{\psi-\varphi}+b^{-\varphi}).b^{r+\varphi},$$

so ist hier $a=b^{\psi-\varphi}+b^{-\varphi}$ zu setzen, und wir erhalten nach 4.

$$[b^{\psi-\varphi}+b^{-\varphi}]^n b^{r+n\varphi} = b^r + n_1 b^{r+\psi} + n_2 b^{r+2\psi} + \ldots + n_n b^{r+n\psi},$$

oder, wenn wir $\varphi=r=0$ und $\psi=1$, $b=\frac{\beta}{\alpha}$ setzen, und die hieraus entstehende Gleichung mit α^n multipliciren,

$$16.\quad (\alpha+\beta)^n = \alpha^n + n_1\alpha^{n-1}\beta + n_2\alpha^{n-2}\beta^2 + \ldots + n_n\beta^n,$$

wodurch der binomische Lehrsatz für positive ganze Exponenten auf einfache Weise bewahrheitet worden ist.

IV.

Sogleich übersehen wir die Richtigkeit der Gleichung

$$\begin{smallmatrix}\sin\\\cos\end{smallmatrix}[r+(n-1)\varphi]\cos\varphi^{n-1} = \begin{smallmatrix}\sin\\\cos\end{smallmatrix}[r+n\varphi]\cos\varphi^n \mp \begin{smallmatrix}\cos\\\sin\end{smallmatrix}[r+n\varphi]\sin\varphi\cos\varphi^{n-1},$$

und erlangen aus ihr, wenn wir für n nach und nach $1, 2, 3, \ldots n$ setzen und die so entstandenen Gleichungen addiren,

$$\Sigma\begin{smallmatrix}\sin\\\cos\end{smallmatrix}[r+(n-1)\varphi]\cos\varphi^{n-1}$$
$$= \Sigma\begin{smallmatrix}\sin\\\cos\end{smallmatrix}[r+n\varphi]\cos\varphi^n \mp \sin\varphi\,\Sigma\begin{smallmatrix}\cos\\\sin\end{smallmatrix}[r+n\varphi]\cos\varphi^{n-1},$$

und hieraus:

$$\mp \sin\varphi \Sigma \frac{\cos}{\sin} [r+n\varphi] \cos\varphi^{n-1} = \frac{\sin}{\cos}(r) - \frac{\sin}{\cos}(r+n\varphi)\cos\varphi^n,$$

so dass wir haben

$$17. \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin(r+n\varphi)\cos\varphi^n - \sin r}{\sin\varphi} = \cos(r+\varphi) + \cos(r+2\varphi)\cos\varphi + \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots + \cos(r+n\varphi)\cos\varphi^{n-1} \\ &\frac{-\cos(r+n\varphi)\cos\varphi^n + \cos r}{\sin\varphi} = \sin(r+\varphi) + \sin(r+2\varphi)\cos\varphi + \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots + \sin(r+n\varphi)\cos\varphi^{n-1}. \end{aligned}\right.$$

Die Anfangsglieder der aus der Reihe $\mp \Sigma \frac{\cos}{\sin}[r+n\varphi]\cos\varphi^{n-1}\sin\varphi$ sich ergebenden Differenzenreihen sind der Ordnung nach

$$\frac{\sin}{\cos}(r+2\varphi)\sin\varphi^2,\ \pm\frac{\cos}{\sin}(r+3\varphi)\sin\varphi^3,\ -\frac{\sin}{\cos}(r+4\varphi)\sin\varphi^4,\ \mp \ldots$$
$$\ldots,\ -\frac{\sin}{\cos}\left[r+n\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin\varphi^n;$$

daher haben wir nach der Lehre von den höheren Differenzen die Gleichung

$$\mp \Sigma \frac{\cos}{\sin}(r+n\varphi)\cos\varphi^{n-1}\sin\varphi =$$

$$\mp n_1 \frac{\cos}{\sin}(r+\varphi)\sin\varphi + n_2 \frac{\sin}{\cos}(r+2\varphi)\sin\varphi^2 \pm \ldots - n_n \frac{\sin}{\cos}\left[r+n\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin\varphi^n,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung, welche den durch 17. bezeichneten vorangeht,

$$18. \left\{\begin{aligned} &\sin(r+n\varphi)\cos\varphi^n = \sin r + n_1\cos(r+\varphi)\sin\varphi - n_2\sin(r+2\varphi)\sin\varphi^2 - \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots + n_n \sin\left[r+n\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin\varphi^n, \\ &\cos(r+n\varphi)\cos\varphi^n = \cos r - n_1\sin(r+\varphi)\sin\varphi - n_2\cos(r+2\varphi)\sin\varphi^2 + \\ &\qquad\qquad \ldots + n_n\cos\left[r+n\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin\varphi^n. \end{aligned}\right.$$

Setzen wir nun in 17. und 18. $\varphi+\frac{\pi}{2}$ für φ, so erhalten wir für ein gerades n

$$19^a. \left\{\begin{aligned} &\frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}\sin(r+n\varphi)\sin\varphi^n + \sin r}{\cos\varphi} = \sin(r+\varphi) - \cos(r+2\varphi)\sin\varphi \\ &\qquad\qquad - \ldots (-1)^{\frac{n}{2}}\cos(r+n\varphi)\sin\varphi^{n-1}, \\ &\frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}\cos(r+n\varphi)\sin\varphi^n + \cos r}{\cos\varphi} = \cos(r+\varphi) + \sin(r+2\varphi)\sin\varphi \\ &\qquad\qquad - \ldots (-1)^{\frac{n}{2}-1}\sin(r+n\varphi)\sin\varphi^{n-1}; \end{aligned}\right.$$

dagegen für ein ungerades n

$$19^b.\ \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos(r+n\varphi)\sin\varphi^n+\sin r}{\cos\varphi}=\sin(r+\varphi)-\cos(r+2\varphi)\sin\varphi \\ \qquad -\ldots(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin(r+n\varphi)\sin\varphi^{n-1}, \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin(r+n\varphi)\sin\varphi^n+\cos r}{\cos\varphi}=\cos(r+\varphi)+\sin(r+2\varphi)\sin\varphi \\ \qquad -\ldots(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos(r+n\varphi)\sin\varphi^{n-1}; \end{cases}$$

und endlich

$$20.\ \begin{cases} (-1)^n\sin[r+n(\varphi+\frac{\pi}{2})]\sin\varphi^n=\sin r-n_1\sin(r+\varphi)\cos\varphi+\ldots \\ \qquad \ldots(-1)^n n_n\sin(r+n\varphi)\cos\varphi^n, \\ (-1)^n\cos[r+n(\varphi+\frac{\pi}{2})]\sin\varphi^n=\cos r-n_1\cos(r+\varphi)\cos\varphi+\ldots \\ \qquad \ldots(-1)^n n_n\cos(r+n\varphi)\cos\varphi^n. \end{cases}$$

V.

Vermittels einfacher Rechnung überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{\beta+nk}{\beta-\alpha+k}\cdot\frac{\overset{k}{\beta}_n}{\overset{k}{\alpha}_n}-\frac{\beta+(n-1)k}{\beta-\alpha+k}\cdot\frac{\overset{k}{\beta}_{n-1}}{\overset{k}{\alpha}_{n-1}}=\frac{\overset{k}{\beta}_n}{\overset{k}{\alpha}_n},$$

aus welcher sich, wenn wir für n nach und nach $1, 2, 3, \ldots n$ substituiren und die so erhaltenen Gleichungen addiren,

$$\Sigma\frac{\beta+nk}{\beta-\alpha+k}\cdot\frac{\overset{k}{\beta}_n}{\overset{k}{\alpha}_n}-\Sigma\frac{\beta+(n-1)k}{\beta-\alpha+k}\cdot\frac{\overset{k}{\beta}_{n-1}}{\overset{k}{\alpha}_{n-1}}=\Sigma\frac{\overset{k}{\beta}_n}{\overset{k}{\alpha}_n},$$

oder

$$\frac{\beta+nk}{\beta-\alpha+k}\cdot\frac{\overset{k}{\beta}_n}{\overset{k}{\alpha}_n}-\frac{\beta}{\beta-\alpha+k}=\Sigma\frac{\overset{k}{\beta}_n}{\overset{k}{\alpha}_n},$$

folglich

$$21.\ \frac{1}{\beta-\alpha+k}\Big[(\beta+nk)\frac{\overset{k}{\beta}_n}{\overset{k}{\alpha}_n}-\beta\Big]=\frac{\overset{k}{\beta}_1}{\overset{k}{\alpha}_1}+\frac{\overset{k}{\beta}_2}{\overset{k}{\alpha}_2}+\frac{\overset{k}{\beta}_3}{\overset{k}{\alpha}_3}+\ldots+\frac{\overset{k}{\beta}_n}{\overset{k}{\alpha}_n}$$

ergiebt.

Indem wir aus dieser Reihe nach und nach die höheren Differenzenreihen entwickeln, so erhalten wir als erste Glieder derselben

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}\cdot\frac{\overset{-k}{(\beta-\alpha)}_1}{\overset{k}{(\alpha+k)}_1},\quad \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\overset{-k}{(\beta-\alpha)}_2}{\overset{k}{(\alpha+k)}_2},\quad \ldots\ldots\ldots\quad \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\overset{-k}{(\beta-\alpha)}_{n-1}}{\overset{k}{(\alpha+k)}_{n-1}};$$

daher nach der Theorie der höheren Differenzen und nach 21.

$$\frac{1}{\beta-\alpha+k}\left[(\beta+nk)\frac{\beta_n^{k}}{\alpha_n^{k}}-\beta\right]=n_1\frac{\beta}{\alpha}+n_2\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{(\beta-\alpha)_1^{-k}}{(\alpha+k)_1^{k}}+n_3\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{(\beta-\alpha)_2^{-k}}{(\alpha+k)_2^{k}}+\ldots.$$

$$\ldots.+n_n\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{(\beta-\alpha)_{n-1}^{-k}}{(\alpha+k)_{n-1}^{k}}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $\alpha+\beta-k$ für β, so erhalten wir durch einfache Umwandlung die bemerkenswerthe Relation

$$22.\quad \frac{\alpha+\beta+(n-1)k}{\alpha+\beta-k}\cdot\frac{(\alpha+\beta-k)_n^{k}}{\alpha_n^{k}}=1+n_1\frac{\beta_1^{-k}}{\alpha_1^{k}}+n_2\frac{\beta_2^{-k}}{\alpha_2^{k}}+\ldots.+n_n\frac{\beta_n^{-k}}{\alpha_n^{k}},$$

woraus für $k=0$

$$\frac{(\alpha+\beta)^n}{\alpha^n}=1+n_1\frac{\beta}{\alpha}+n_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\ldots+n_n\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n,$$

oder

$$23.\quad (\alpha+\beta)^n=\alpha^n+n_1\alpha^{n-1}\beta+n_2\alpha^{n-2}\beta^2+\ldots.+n_{n-1}\alpha\beta^{n-1}+n_n\beta^n$$

erhalten wird, so dass das Binomialtheorem für positive ganze Exponenten als ein specieller Fall aus der allgemeineren Gleichung 22. hervorgegangen ist.

VI.

Es ist offenbar

$$\frac{\beta}{[\alpha+(n-1)\beta][\alpha+n\beta]}=\frac{1}{\alpha+(n-1)\beta}-\frac{1}{\alpha+n\beta},$$

folglich, wenn wir für n nach und nach 1, 2, 3,.... n einsetzen und die auf diese Weise sich herausstellenden Gleichungen addiren,

$$\beta\Sigma\frac{1}{[\alpha+(n-1)\beta][\alpha+n\beta]}=\Sigma\frac{1}{\alpha+(n-1)\beta}-\Sigma\frac{1}{\alpha+n\beta}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+n\beta},$$

oder

$$\Sigma\frac{1}{[\alpha+(n-1)\beta][\alpha+n\beta]}=\frac{n}{\alpha(\alpha+n\beta)},$$

so dass wir jetzt folgende Gleichung haben:

$$24.\quad \frac{n}{\alpha(\alpha+n\beta)}=\frac{1}{\alpha(\alpha+\beta)}+\frac{1}{(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)}+\ldots+\frac{1}{[\alpha+(n-1)\beta][\alpha+n\beta]}.$$

Dieser Reihe können wir $n-1$ Differenzenreihen abgewinnen und wir erhalten als Anfangsglieder derselben

$$-\frac{1.2.\beta}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)}, +\frac{1.2.3.\beta^2}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)}, -\ldots$$
$$\ldots, (-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots.n.\beta^{n-1}}{\alpha(\alpha+\beta)\ldots.(\alpha+n\beta)};$$

folglich nach der Lehre von den höheren Differenzen

$$\frac{n}{\alpha(\alpha+n\beta)}=\frac{n_1}{\alpha(\alpha+\beta)}-\frac{1.2.n_2\beta}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)}+\frac{1.2.3.n_3\beta^2}{\alpha(\alpha+\beta)\ldots.(\alpha+3\beta)}-\ldots$$
$$\ldots(-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots.n.n_n\beta^{n-1}}{\alpha(\alpha+\beta)\ldots.(\alpha+n\beta)},$$

oder, wenn wir mit $\alpha\beta$ multipliciren und dann $\alpha-\beta$ für α setzen;

$$\frac{n\beta}{\alpha+(n-1)\beta}=\frac{n_1\beta}{\alpha}-\frac{n_2\beta^2}{\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{1.2}}+\frac{n_3\beta^3}{\frac{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)}{1.2.3}}-\ldots.$$
$$\ldots(-1)^{n-1}\frac{n_n\beta^n}{\frac{\alpha(\alpha+\beta)\ldots.[\alpha+(n-1)\beta]}{1.2\ldots.n}},$$

d. i.

$$25.\quad \frac{n\beta}{\alpha+(n-1)\beta}=\frac{n_1}{\overset{\beta}{\alpha_1}}\beta-\frac{n_2}{\overset{\beta}{\alpha_2}}\beta^2+\frac{n_3}{\overset{\beta}{\alpha_3}}\beta^3-\ldots.(-1)^{n-1}\frac{n_n}{\overset{\beta}{\alpha_n}}\beta^n$$

Setzen wir hierin $\alpha=2$, $\beta=1$ und addiren wir, nachdem die Vorzeichen aller Glieder in die entgegengesetzten verwandelt worden sind, auf beiden Seiten die Einheit, so ergiebt sich die bereits bekannte Gleichung

$$26.\quad \frac{1}{1+n}=1-\frac{1}{2}n_1+\frac{1}{3}n_2-\frac{1}{5}n_3+\ldots.(-1)^n\frac{1}{n+1}n_n.$$

Die ersten Glieder der aus der Reihe 25. gebildeten Differenzenreihen sind

$$-\frac{n\beta}{\alpha}\cdot\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)_1}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta_1)}, +\frac{n\beta}{\alpha}\cdot\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)_2}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta)_2}, -\ldots, (-1)^{n-1}\frac{n\beta}{\alpha}\cdot\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)^{n-1}}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta)^{n-1}};$$

daher nach der Lehe von den höheren Differenzen

$$\frac{n\beta}{\alpha+(n-1)\beta}=n_1\frac{n\beta}{\alpha}-n_2\frac{n\beta}{\alpha}\cdot\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)_1}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta)_1}+n_3\frac{n\beta}{\alpha}\cdot\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)_2}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta)_2}-\ldots.$$
$$\ldots(-1)^n n_n\frac{n\beta}{\alpha}\cdot\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)_{n-1}}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta)_{n-1}}$$

oder

$$27.\ \frac{\alpha}{\alpha+(n-1)\beta}=n_1-n_2\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)_1}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta)_1}+n_3\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)_2}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta)_2}-\ldots$$

$$\ldots(-1)^n n_n\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)_{n-1}}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta)_{n-1}}.$$

XX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

I.

Schneidet man auf den Seiten AB und BC (die Figur wird sich ein Jeder leicht selbst zeichnen können) des Dreiecks ABC von A und C aus die Stücke $AD=\frac{1}{\alpha}AB$ und $CE=\frac{1}{\beta}BC$ ab, bezeichnet zur Abkürzung den Flächeninhalt des Dreiecks ABC durch Δ, und zieht durch die Spitze B desselben und den Durchschnittspunkt O der Linien AE und CD die, die Seite AC in F schneidende Linie BOF; so ist:

das Dreieck $OCE=\frac{\alpha-1}{\beta(\alpha+\beta-1)}\Delta$, und für $\alpha=\beta:=\frac{\alpha-1}{\alpha(2\alpha-1)}\Delta$;

$BOE=\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\beta(\alpha+\beta-1)}\Delta$, „ „ „ $:=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha(2\alpha-1)}\Delta$;

$BOD=\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\alpha(\alpha+\beta-1)}\Delta$, „ „ „ $:=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha(2\alpha-1)}\Delta$;

$AOD=\frac{\beta-1}{\alpha(\alpha+\beta-1)}\Delta$, „ „ „ $:=\frac{(\alpha-1}{\alpha(2\alpha-1)}\Delta$;

$OAF=\frac{\beta-1}{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}\Delta$, „ „ „ $:=\frac{1}{2(2\alpha-1)}\Delta$;

$OFC=\frac{\alpha-1}{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}\Delta$, „ „ „ $:=\frac{1}{2(2\alpha-1)}\Delta$.

Ferner hat man:

$$OC:OD = \alpha:\beta-1, \text{ und für } \alpha=\beta := \alpha:\alpha-1;$$
$$AO:OE = \beta:\alpha-1, \quad " \quad " \quad " \quad := \alpha:\alpha-1;$$
$$AF:FC = \beta-1:\alpha-1, \quad " \quad " \quad " \quad := 1:1;$$
$$OB:OF = \alpha+\beta-2:1, \quad " \quad " \quad " \quad := 2(\alpha-1):1.$$

Setzt man in letzterm, besondern Falle $\alpha=2$, so findet man:

$$OEC = BOE = BOD = AOD = AOF = FOC = \tfrac{1}{6}\Delta,$$
$$AF = FC,\ OC = 2OD,\ AO = 2OE,\ OB = OF;$$

wie bekannt.

II.

Zieht man vom Mittelpunkte des Hyperboloids mit einem Fache, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

sei, an den Punkt x', y', z' desselben einen Radiusvector r'; legt durch den Punkt x', y', z' eine Tangentialebene an das Hyperboloid und durch den Mittelpunkt eine Ebene parallel mit dieser; errichtet sodann auf der neuen Ebene im Mittelpunkte eine Senkrechte, so machen die Senkrechte und der Radiusvector r' mit einander einen stumpfen Winkel, dessen Cosinus

$$=\frac{-1}{r'\sqrt{\frac{z'^2}{c^4}+\frac{y'^2}{b^4}+\frac{x'^2}{a^4}}}$$

ist. Ist das Hyperboloid dagegen eines mit zwei Fächern:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

so ist der erwähnte Winkel spitz und sein Cosinus

$$=\frac{+1}{r'\sqrt{\frac{z'^2}{c^4}+\frac{y'^2}{b^4}+\frac{x'^2}{a^4}}}.$$

Setzt man endlich den Asymptotenkegel:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

so ist der erwähnte Winkel ein rechter.

(Man sehe: Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes par Lamé et Clapeyron in Crelle's Journal Bd. 7. §. 31.)

XXI.

Miscellen.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Ueber einen Satz aus der analytischen Geometrie.

Herr Professor Lobatto stellt im Journal von Liouville. Juin 1846. folgenden Satz auf:

Seien α, β, γ die Winkel, welche eine gegebene Gerade mit ihren drei Projektionen auf den Ebenen der xy, xz, yz macht; seien ferner δ, δ_1, δ_2 die Entfernungen des Anfangspunktes der Koordinaten von dieser Projektion, $\varDelta$ die Entfernung dieses Punktes von der Geraden selbst; so ist:

$$\varDelta^2 = \delta^2 \cos^2\alpha + \delta_1{}^2 \cos^2\beta + \delta_2{}^2 \cos^2\gamma,$$

welchen Satz nun Herr Lobatto direkt beweist.

Dieser Satz ist aber eine unmittelbare Folge des bekannten Satzes, dass, wenn man einen Flächenraum P auf drei senkrecht auf einander stehende Ebenen projizirt, und p, p_1, p_2 diese Projektionen sind, man hat:

$$P^2 = p^2 + p_1{}^2 + p_2{}^2.$$

(Einen einfachen Beweis dieses Satzes findet man u. A. in Boucharlat populäre Mechanik, deutsch von Kissling. 4ter Theil. S. 133. ff.)

Man ziehe nämlich durch den Anfangspunkt der Koordinaten mit der gegebenen Geraden eine Parallele und bilde zwischen diesen beiden Linien ein Parallelogramm, dessen eine Spitze im Anfangspunkte der Koordinaten sei, so wird der Flächeninhalt desselben $\mathfrak{L}\varDelta$ sein, wenn $\mathfrak{L}$ die Länge der Seite des Parallelogramms ist, die auf der gegebenen Linie selbst genommen ist. Projizirt man dieses Parallelogramm auf die drei Koordinatenebenen, so sind die Projektionen ebenfalls Parallelogramme, deren Flächeninhalte offenbar $\mathfrak{L}\cos\alpha.\delta$, $\mathfrak{L}\cos\beta.\delta_1$, $\mathfrak{L}\cos\gamma.\delta_2$ sind, und also ist

$$\mathfrak{L}^2\Delta^2 = \mathfrak{L}^2\cos^2\alpha.\delta^2 + \mathfrak{L}^2\cos^2\beta.\delta_1^2 + \mathfrak{L}^2\cos^2\gamma.\delta_2^2$$

oder

$$\Delta^2 = \delta^2\cos^2\alpha + \delta_1^2\cos^2\beta + \delta_2^2\cos^2\gamma,$$

welches der erwähnte Satz ist.

Denkt man sich durch die gegebene Gerade und den Anfangspunkt der Koordinaten eine Ebene gelegt, so ist der Kosinus des Winkels, den diese Ebene (die Ebene des vorhin erwähnten Parallelogramms) mit der Ebene der xy macht, also gleich $\frac{\mathfrak{L}\cos\alpha.\delta}{\mathfrak{L}.\Delta} = \frac{\delta\cos\alpha}{\Delta}$; desgleichen sind die Kosinus der Winkel dieser Ebene mit den Ebenen der xz, yz gleich $\frac{\delta_1\cos\beta}{\Delta}$, $\frac{\delta_2\cos\gamma}{\Delta}$; demnach ist die Gleichung der fraglichen Ebene

$$\delta_2\cos\gamma.x + \delta_1\cos\beta.y + \delta\cos\alpha.z = 0,$$

wie Herr Lobatto ebenfalls findet.

Heissen x', y', z' die Koordinaten des einen Eckpunktes des mehrerwähnten Parallelogramms in der gegebenen Linie selbst, und sind α', β', γ' die Winkel, welche die gegebene Gerade mit den Axen der x, y, z macht, so findet man für den Flächeninhalt der Projektion des Parallelogramms auf der Ebene der xy:

$$\pm\mathfrak{L}(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta');$$

demnach ist

$$\mathfrak{L}\delta\cos\alpha = \pm\mathfrak{L}(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta'),\ \delta\cos\alpha = \pm(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta').$$

Ganz eben so:

$$\delta_1\cos\beta = \pm(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha'),\ \delta_2\cos\gamma = \pm(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma').$$

Von diesen Sätzen ausgehend beweist Herr Professor Lobatto nun die allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts eines Systems von Kräften.

Ist nämlich P die Intensität einer wirkenden Kraft, und sind a, b, c die Winkel, welche ihre Richtung mit den Axen der x, y, z macht, so kann man diese Kraft parallel mit sich selbst in den Anfangspunkt versetzen und ein Paar von der Intensität $P\Delta$ beifügen, ohne dass das Gleichgewicht geändert wird. Die erste Kraft zerlegt sich in $P\cos a$, $P\cos b$, $P\cos c$, während das Paar sich zerlegt in $P\cos\alpha.\delta$, $P\cos\beta.\delta_1$, $P\cos\gamma.\delta_2$, und man erhält als Gleichungen des Gleichgewichts:

$$\Sigma P\cos a = 0,\ \Sigma P\cos b = 0,\ \Sigma P\cos c = 0;$$
$$\Sigma P\cos\alpha.\delta = 0,\ \Sigma P\cos\beta.\delta_1 = 0,\ \Sigma P\cos\gamma.\delta_2 = 0.$$

Die letzten drei Gleichungen sind auch nach dem Obigen:

$$\Sigma P(y\cos a - x\cos b) = 0,\ \Sigma P(x\cos c - z\cos a) = 0,$$
$$\Sigma P(z\cos b - y\cos c) = 0;$$

da die Doppelzeichen nicht zu beachten sind, wenn man die Kräftenpaare, die nach entgegengesetzten Seiten zu drehen suchen, auch als entgegengesetzt betrachtet.

XXII.

Theorematis in T. VII. pag. 266. *) propositi demonstratio.

Auctore **Dr. E. G. Björling,**
ad Acad. Upsal. Docens Mathes.

Celeb. Prof. Schlömilch Commentatione suâ „*Ueber die höheren Differenzialquotienten des Ausdrucks* $(x^2+ax+b)^{-(\mu+1)}$“, in T. VIII. praeced. pag. 357. exposita, admonitum me fecit quodammodo promisso demum satisfacere, in notula sub pag. 266. T. VII. relato, oblaturum me fore aliquando Theorematis loco cit. propositi demonstrationem in hoc „Archivo“ condendam. Quod nempe Theorema (ut apparet) formulam exhibet generalem, juxta quam breviter — [et quidem numero terminorum, ex ordine, 1, 2, 3, 4, ... $(m+1)$] — exprimi liceat valorem expressionum cujusque harum [n denot. numerum integrum]:

$$n_0-(n-1)_1+(n-2)_2-(n-3)_3+\&c.$$

(usque ad primum term. evanescentem),

$$1.\ (n+1)_1-2n_2+3(n-1)_3-4(n-2)_4+\&c.,$$
$$1.\ (n+2)_2-3(n+1)_3+6n_4-10(n-1)_5+\&c.,$$
$$1.\ (n+3)_3-4(n+2)_4+10(n+1)_5-20n_6+\&c.$$
$$\vdots$$

---

*) Quae ibi deprehensa sunt menda nonnulla typographica jam corrigi liceat haecce:

In pag. 266, lin. 10, loco $+4.(n-2)_4$ legas $-4.(n-2)_4$
„ 267, „ 15, „ $-10(n+1)_5+$ „ $+10(n+1)_5-$
„ 267, „ 16, „ $2(n\ \ 2)_2$ „ $2(n+2)_2$
„ 268, „ 11, „ $+4(p-3)_4$ „ $-4(p-3)_4$.

$$(\alpha) \ldots\ldots \overset{m}{F}_0 . (n+m)_m - \overset{m}{F}_1 . (n+m-1)_{m+1} + \overset{m}{F}_2 (n+m-2)_{m+2} - \overset{m}{F}_3 . (n+m-3)_{m+3} + \&c.$$

denotantibus [m numero integro aut 0]

$$\overset{m}{F}_0, \overset{m}{F}_1, \overset{m}{F}_2, \overset{m}{F}_3, \&c.$$

breviter „numeros $m$ti ordinis figuratos"

$$(\beta) \ldots\ldots m_0, (m+1)_1, (m+2)_2, (m+3)_3, \&c.$$

Conaturo me jam id quod promisi exsolvere, pauca haec fere praemisisse juvabit.

Quemadmodum figurati illi numeri (β) Coëfficientes ipsas conficiunt dignitatum ipsius x earum, quae in evolutâ functione

$$(1-x)^{-(m+1)}$$

occurrunt, sic quantitas illa (α) Coëfficientem ipsius x^n in evolutâ

$$(\gamma) \ldots\ldots [1-x(1-x)]^{-(m+1)} \text{seu} (1-x+x^2)^{-(m+1)} \text{ *)}.$$

Quae quidem res ut primum fuit perspecta, habitâque insuper ratione identitatis expressionum illarum

$$1-x+x^2 \text{ atque } (1+\alpha x)(1+\beta x),$$

[α et β breviter ambas illas radices cubicas ex $+1$ imaginarias, $\cos\frac{2\pi}{3} \pm \sqrt{-1} \sin\frac{2\pi}{3}$, denotantibus]; ea fere in aprico posita est

---

*) Scilicet ex eo quod, dum y numerice <1 est,

$$(1-y)^{-(m+1)} = 1 + (m+1)_1 y + (m+2)_2 y^2 + (m+3)_3 y^3 + \text{etc.}$$

sic quoque, dum $x(1-x)$ numerice <1 est, habetur

$$[1-x(1-x)]^{-(m+1)} = 1 + (m+1)_1 x(1-x) + (m+2)_2 x^2(1-x)^2 + \ldots$$
$$\ldots + (m+n-1)_{n-1} x^{n-1}(1-x)^{n-1} + (m+n)_n x^n (1-x)^n + \text{etc.}$$

nec ullâ hoc tempore opus est curâ probandi licere (certe dum x numerice <1 est) posterioris hujus membri loco substitui istam:

$$1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{etc.}$$

scilicet

$$A_n = n_0 (m+n)_n - (n-1)_1 (m+n-1)_{n-1} + (n-2)_2 (m+n-2)_{n-2} - \text{etc.}$$

usque ad primum term. evanescentem, cujus de reductione in formam (α), si placet, videri licet in nota I. sub finem hujusce Commentationis.

via *), quam recte insequendo Theorema, de quo quaeritur, demonstratum sistere liceat. Etenim utrâque seorsim evolutâ functionum

$$(\delta) \ldots\ldots (1+\alpha x)^{-(m+1)} \text{ et } (1+\beta x)^{-(m+1)},$$

si deinceps eximatur coëfficiens ipsius x^n in „producto" serierum hoc modo comparatarum **), reverâ continget, ut coëfficientem hancce in $m+1$ terminos redigi liceat. Quae si tandem formula ex $m+1$ terminis confecta ipsi (α) aequatur, demonstratum erit theorema.

His jam praemissis rem ipsam adgredimur.

---

1. Uti supra est monitum, id solum agitur ut evincatur duplex illud membrum posterius aequationis (I) in Theoremate, de quo quaeritur, Coëfficientem conficere ipsius x^n in „producto" serierum ex evolutis seorsim ambabus (δ) comparatarum. Id quod in tali re solito hoc more perfici licebit.

1⁰)

Ex hisce

$$\left\{ \text{et} \begin{array}{l} (1+\alpha x)^{-1} = 1 - \alpha x + \alpha^2 x^2 - \ldots + (-1)^n \alpha^n x^n + \&c. \\ (1+\beta x)^{-1} = 1 - \beta x + \beta^2 x^2 - \ldots + (-1)^n \beta^n x^n + \&c. \end{array} \right.$$

consequitur

$$(1+\alpha x)^{-1}(1+\beta x)^{-1} = 1 - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}x + \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}x^2 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n . \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} x^n + \&c.$$

ideoque esse coëfficientem ipsius x^n in „producto" serierum ex evolutis $(1+\alpha x)^{-1}$ et $(1+\beta x)^{-1}$ comparatarum isthanc

$$(\text{I}) \ldots\ldots (-1)^n . \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} = \overset{-1}{C_n} \text{ (breviter).}$$

2⁰)

Ex hisce

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+\alpha x)^{-1}(1+\beta x)^{-1} = \overset{i=\infty}{\underset{i=0}{S}} \overset{-1}{C_i} x^i \\ \text{et} \\ (1+\alpha x)^{-1}(1+\beta x)^{-1} = \overset{i=\infty}{\underset{i=0}{S}} \overset{-1}{C_i} x^i \end{array} \right.$$

---

*) Conf. tamen ea, quae, in nota I. sub finem opusculi hujus relata, de hac re admonendi ansam nobis dedit Commentatio, cujus supra mentionem fecimus, Celeb. Schlömilch.

**) Nos quid hac phrasi „producto serierum" intellectum volumus, id nullâ sane hoc tempore opus habet explicatione. Nec omnino locus

16*

consequitur *) esse coëfficientem ipsius x^n in „producto" serierum ex evolutis $(1+\alpha x)^{-2}$ et $(1+\beta x)^{-2}$ comparatarum isthanc

$$\overset{-2}{C_n} = \sum_{i=0}^{i=n} \overset{-1}{C}_{n-i} \overset{-1}{C_i},$$

ideoque, secundum (I),

$$(1) \ldots (-1)^n (\alpha-\beta)^2 . \overset{-2}{C_n} = \sum_{i=0}^{i=n} (\alpha^{n+1-i} - \beta^{n+1-i})(\alpha^{i+1} - \beta^{i+1}).$$

Jam, quoniam $\alpha\beta = 1$ est, membrum hoc posterius abit in

$$\alpha^{n+1} . \sum_{i=0}^{i=n} (\alpha - \beta^{2i+1}) - \beta^{n+1} . \sum_{i=0}^{i=n} (\alpha^{2i+1} - \beta)$$

seu

$$(2) \ldots (n+1)(\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}) - [\alpha^n . \sum_{i=0}^{i=n} \beta^{2i} + \beta^n . \sum_{i=0}^{i=n} \alpha^{2i}].$$

At habetur

$$\sum_{i=0}^{i=n} \alpha^{2i} = \frac{\alpha^{2n+2}-1}{\alpha^2-1},$$

ideoque quantitas illa intra uncos [ ] in (2), vi relationum illarum

$$(3) \quad \ldots \ldots \quad \frac{\alpha}{\alpha^2-1} = \frac{1}{\alpha-\beta} = -\frac{\beta}{\beta^2-1},$$

conficit

$$2 . \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha-\beta},$$

atque aequatio illa (I) abit in

---

est dubitandi, quin seriei illi, quae hoc ipsum conficit „productum", summa sit isthaec $(1+\alpha x)^{-(m+1)}(1+\beta x)^{-(m+1)}$ seu $(1-x+x^2)^{-(m+1)}$, dum x numerice <1 est, — quippe quoniam tunc serierum utraque earum, quas evolutae seorsim ambae illae (δ), convergentes remanerent, etiamsi in iis terminorum loco substituerentur ipsi moduli.

*) In hoc ipso, ut patet, cardo ipse artificii vertitur: esse (inquam) coëfficientem ipsius x^n in producto serierum, ex evolutis seorsim ambabus

$$(1+\alpha x)^{-m}(1+\beta x)^{-m} \text{ et } (1+\alpha x)^{-1}(1+\beta x)^{-1}$$

comparatarum, eodem usque valore ac coëffic. ipsius x^n in producto serierum ex evolutis seorsim ambabus illis

$$(1+\alpha x)^{-(m+1)} \text{ et } (1+\beta x)^{-(m+1)}$$

comparatarum, — quippe quoniam ambobus his „serierum productis" summa cedit communis (γ), x quâlibet numerice <1.

$$(\text{II})\ldots\ldots (-1)^n(\alpha-\beta)^2.\overset{-2}{C_n}=(n+1)(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})-2.\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

3°)

Tum ex hisce

$$\left\{\begin{array}{l}(1+\alpha x)^{-2}(1+\beta x)^{-2}=\overset{i=\infty}{\underset{i=0}{S}}\overset{-2}{C_i}x^i\\ \text{et}\\ (1+\alpha x)^{-1}(1+\beta x)^{-1}=\overset{i=\infty}{\underset{i=0}{S}}\overset{-1}{C_i}x^i\end{array}\right.$$

consequitur esse coëfficientem ipsius x^n in „producto" serierum ex evolutis $(1+\alpha x)^{-3}$ et $(1+\beta x)^{-3}$ comparatarum isthanc

$$\overset{-3}{C_n}=\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}\overset{-1}{C_{n-i}}\overset{-2}{C_i},$$

ideoque, secundum (II),

$$(4)\quad \ldots\ldots\ldots\ (-1)^n(\alpha-\beta)^3.\overset{-3}{C_n}$$
$$=\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(\alpha^{n+1-i}-\beta^{n+1-i})\left[(i+1)_1(\alpha^{i+2}+\beta^{i+2})-2.\frac{\alpha^{i+1}-\beta^{i+1}}{\alpha-\beta}\right]$$
$$=\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+1)_1(\alpha^{n+1-i}-\beta^{n+1-i})(\alpha^{i+2}+\beta^{i+2})$$
$$-\frac{2}{\alpha-\beta}\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(\alpha^{n+1-i}-\beta^{n+1-i})(\alpha^{i+1}-\beta^{i+1}),$$

seu breviter

$$(4')\quad \ldots\ldots\ldots = S_2-\frac{2}{\alpha-\beta}S_1,$$

scilicet posito (brevitatis ergo), p denotante numerum integrum aut 0,

$$S_{p+1}=\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p)_p(\alpha^{n+1-i}-\beta^{n+1-i})(\alpha^{i+p+1}+(-1)^{p+1}.\beta^{i+p+1}).$$

At, vi naturae ipsarum α et β, habetur relatio ista (dum p numerus est integer):

$$(\text{A})\ldots\ S_{p+1}=(n+p+1)_{p+1}(\alpha^{n+p+2}+(-1)^{p+2}.\beta^{n+p+2})-\frac{S_p}{\alpha-\beta}\ {}^{*)},$$

cujus ope formula (4') reducitur in

*) Vid. Notam II. sub finem hujusce Commentationis.

consequitur *) esse coëfficientem ipsius x^n in „producto" serierum ex evolutis $(1+\alpha x)^{-2}$ et $(1+\beta x)^{-2}$ comparatarum istbanc

$$\overset{-2}{C_n} = \mathop{S}_{i=0}^{i=n-1} \overset{-1}{C}_{n-i}\, \overset{-1}{C_i},$$

ideoque, secundum (1),

$$(1)\ldots(-1)^n(\alpha-\beta)^2.\overset{-2}{C_n} = \mathop{S}_{i=0}^{i=n} (\alpha^{n+1-i}-\beta^{n+1-i})(\alpha^{i+1}-\beta^{i+1}).$$

Jam, quoniam $\alpha\beta=1$ est, membrum hoc posterius abit in

$$\alpha^{n+1}.\mathop{S}_{i=0}^{i=n}(\alpha-\beta^{2i+1})-\beta^{n+1}.\mathop{S}_{i=0}^{i=n}(\alpha^{2i+1}-\beta)$$

seu

$$(2)\ldots\ldots(n+1)(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})-[\alpha^n.\mathop{S}_{i=0}^{i=n}\beta^{2i}+\beta^n.\mathop{S}_{i=0}^{i=n}\alpha^{2i}].$$

At habetur

$$\mathop{S}_{i=0}^{i=n}\alpha^{2i}=\frac{\alpha^{2n+2}-1}{\alpha^2-1},$$

ideoque quantitas illa intra uncos [ ] in (2), vi relationum illarum

$$(3)\quad \ldots\ldots \frac{\alpha}{\alpha^2-1}=\frac{1}{\alpha-\beta}=-\frac{\beta}{\beta^2-1},$$

conficit

$$2.\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta},$$

atque aequatio illa (1) abit in

---

est dubitandi, quin seriei illi, quae hoc ipsum conficit „productum", summa sit isthaec $(1+\alpha x)^{-(m+1)}(1+\beta x)^{-(m+1)}$ seu $(1-x+x^2)^{-(m+1)}$, dum x numerice <1 est, — quippe quoniam tunc serierum utraque earum, quas evolutae seorsim ambae illae (δ), convergentes remanerent, etiamsi in iis terminorum loco substituerentur ipsi moduli.

*) In hoc ipso, ut patet, cardo ipse artificii vertitur: esse (inquam) coëfficientem ipsius x^n in producto serierum, ex evolutis seorsim ambabus

$$(1+\alpha x)^{-m}(1+\beta x)^{-m} \text{ et } (1+\alpha x)^{-1}(1+\beta x)^{-1}$$

comparatarum, eodem usque valore ac coëffic. ipsius x^n in producto serierum ex evolutis seorsim ambabus illis

$$(1+\alpha x)^{-(m+1)} \text{ et } (1+\beta x)^{-(m+1)}$$

comparatarum, — quippe quoniam ambobus his „serierum productis" summa cedit communis (γ), x quâlibet numerice <1.

$$(IV)\ldots(-1)^n(\alpha-\beta)^4.\overset{-4}{C_n}=(n+3)_3(\alpha^{n+4}+\beta^{n+4})-4(n+2)_2\frac{\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}}{\alpha-\beta}$$
$$+10(n+1)_1\frac{\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}}{(\alpha-\beta)^2}-20.\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)^3}.$$

5^0)

Ulterius ex hisce

$$\left\{\begin{array}{l}(1+\alpha x)^{-4}(1+\beta x)^{-4}=\overset{i=\infty}{\underset{i=0}{S}}\overset{-4}{C_i}x^i\\ \text{et}\\ (1+\alpha x)^{-1}(1+\beta x)^{-1}=\overset{i=\infty}{\underset{i=0}{S}}\overset{-1}{C_i}x^i\end{array}\right.$$

eàdem usque ratione ac in praecedentibus concludi licebit, ita esse comparatam coëfficientem $\overset{-5}{C_n}$ ipsius x^n in „producto" serierum ex evolutis $(1+\alpha x)^{-5}$ et $(1+\beta x)^{-5}$ coortarum, ut sit

$$(V)\ldots(-1)^n(\alpha-\beta)^5.\overset{-5}{C_n}=(n+4)_4(\alpha^{n+5}-\beta^{n+5})-5(n+3)_3\frac{\alpha^{n+4}+\beta^{n+4}}{\alpha-\beta}$$
$$+15(n+2)_2\frac{\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}}{(\alpha-\beta)^2}-35(n+1)_1\frac{\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}}{(\alpha-\beta)^3}$$
$$+70\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)^4}.$$

2. Jamque per inductionem conjici licet esse (dum m denotat numerum integrum aut 0) ita comparatam coëfficientem $\overset{-(m+1)}{C_n}$ ipsius x^n in „producto" serierum ex evolutis $(1+\alpha x)^{-(m+1)}$ et $(1+\beta x)^{-(m+1)}$ coortarum, ut sit

$$(VI)\ldots(-1)^n(\alpha-\beta)^{m+1}.\overset{-(m+1)}{C_n}=(n+m)_m(\alpha^{n+m+1}+(-1)^{m+1}.\beta^{n+m+1})$$
$$-\overset{m}{F_1}(n+m-1)_{m-1}\frac{\alpha^{n+m}+(-1)^m.\beta^{n+m}}{\alpha-\beta}$$
$$+\overset{m}{F_2}(n+m-2)_{m-2}\frac{\alpha^{n+m-1}+(-1)^{m-1}.\beta^{n+m-1}}{(\alpha-\beta)^2}\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots+(-1)^m.\overset{m}{F_m}.\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)^m},$$

(VI')

$$=\overset{k=m}{\underset{k=0}{S}}(-1)^k(m+k)_k(n+m-k)_{m-k}\frac{\alpha^{n+m+1-k}+(-1)^{m+1-k}\beta^{n+m+1-k}}{(\alpha-\beta)^k}.$$

Valere hanc legem pro $m=0$, 1, 2, 3, 4, jam supra erat expertum. Concesso, valere eam usque ad m quemdam (inclusive), probabitur jam vera esse pro sequenti $m+1$.

Reverâ habetur, ut solitum,

$$\overset{-(m+2)}{C_n}=\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}\overset{-1}{C_{n-i}}\overset{-(m+1)}{C_i},$$

ideoque, secundum (VI'),

$$(6)\ldots\; (-1)^n(\alpha-\beta)^{m+2}\,.\,\overset{-(m+2)}{C_n} = \sum_{i=0}^{i=n}\Big[(\alpha^{n+1-i}-\beta^{n+1-i})\sum_{k=0}^{k=m}(-1)^k(m+k)_k(n+m-k)_{m-k}\frac{\alpha^{n+m+1-k}+(-1)^{m+1-k}\beta^{n+m+1-k}}{(\alpha-\beta)^k}\Big],$$

i. e. (posito success. $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots m$)

$$(6')\ldots = S_{m+1}-\frac{(m+1)_1}{\alpha-\beta}S_m+\frac{(m+2)_2}{(\alpha-\beta)^2}S_{m-1}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{(2m-1)_{m-1}}{(\alpha-\beta)^{m-1}}S_2+(-1)^m\frac{(2m)_m}{(\alpha-\beta)^m}S_1.$$

At ope aequationis illius (A) adhibitisque insuper relationibus illis

$$\left\{\begin{array}{c}(m+2)_1+(m+2)_2=(m+3)_2,\\ (m+3)_2+(m+3)_3=(m+4)_3,\\ \text{etc. in genere}\\ (m+p)_{p-1}+(m+p)_p=(m+p+1)_p,\end{array}\right.$$

reducuntur in (6') — [ponendo success. $p=m,\ m-1,\ \ldots 3,\ 2,\ 1$] — successive termini

primi ambo in

$$(n+m+1)_{m+1}(\alpha^{n+m+2}+(-1)^{m+2}\beta^{n+m+2})-\frac{(m+2)_1}{\alpha-\beta}S_m,$$

primi tres in

$$\sum_{k=0}^{k=1}(-1)^k(m+1+k)_k(n+m+1-k)_{m+1-k}\frac{\alpha^{n+m+2-k}+(-1)^{m+2-k}\beta^{n+m+2-k}}{(\alpha-\beta)^k}+\frac{(m+3)_2}{(\alpha-\beta)^2}S_{m-1},$$

primi quatuor in

$$\sum_{k=0}^{k=2}(-1)^k(m+1+k)_k(n+m+1-k)_{m+1-k}\frac{\alpha^{n+m+2-k}+(-1)^{m+2-k}\beta^{n+m+2-k}}{(\alpha-\beta)^k}-\frac{(m+4)_3}{(\alpha-\beta)^3}S_{m-2},$$

et sic porro: adeo ut primi m termini (h. e. omnes ultimo excepto) reducantur in

$$\mathop{S}_{k=0}^{k=m-2}(-1)^k(m+1+k)_k(n+m+1-k)_{m+1-k}\frac{\alpha^{n+m+2-k}+(-1)^{m+2-k}\beta^{n+m+2-k}}{(\alpha-\beta)^k}$$
$$+(-1)^{m-1}\frac{(2m)_{m-1}}{(\alpha-\beta)^{m-1}}S_2,$$

ideoque tota quantitas (6′) in

$$\mathop{S}_{k=0}^{k=m-1}(-1)^k(m+1+k)_k(n+m+1-k)_{m+1-k}\frac{\alpha^{n+m+2-k}+(-1)^{m+2-k}\beta^{n+m+2-k}}{(\alpha-\beta)^k}$$
$$+(-1)^m\frac{(2m+1)_m}{(\alpha-\beta)^m}S_1;$$

cujus quum terminus novissimus secundum aequat. (A′), ope relationis

$$(2m+1)_m\,.\,2=(2m+2)_{m+1},$$

abit in

$$(-1)^m(2m+1)_m\,(n+1)_1\frac{\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}}{(\alpha-\beta)^m}+(-1)^{m+1}(2m+2)_{m+1}\,.\,\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)^{m+1}},$$

jam omni absque dubio patet reduci (6′) in ipsum membrum posterius aequat. (VI′) mutato ibi m in $(m+1)$.

Q. E. D.

3. Quae cum ita sint, habetur ex aequat. (VI′)

$$(-1)^n\,.\,\overset{-(m+1)}{C_n}=$$

dum m par est aut 0:

$$\mathop{S}_{k=0}^{k=m}(-1)^k(m+k)_k(n+m-k)_{m-k}\frac{\alpha^{n+m+1-k}-(-1)^k\beta^{n+m+1-k}}{(\alpha-\beta)^{m+1+k}},$$

dum vero impar:

$$\mathop{S}_{k=0}^{k=m}(-1)^k(m+k)_k(n+m-k)_{m-k}\frac{\alpha^{n+m+1-k}+(-1)^k\beta^{n+m+1-k}}{(\alpha-\beta)^{m+1+k}};$$

seu, quod idem valet,

dum m par est aut 0:

$$(\mathrm{VI}'')\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(-1)^n\,.\,\overset{-(m+1)}{C_n}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\mathop{S}_{i=0}^{i=\frac{m}{2}}(m+2i)_{2i}(n+m-2i)_{m-2i}\frac{\alpha^{n+m+1-2i}-\beta^{n+m+1-2i}}{(\alpha-\beta)^{m+1+2i}}\\ \displaystyle-\mathop{S}_{i=0}^{i=\frac{m}{2}-1}(m+2i+1)_{2i+1}(n+m-2i-1)_{m-2i-1}\frac{\alpha^{n+m-2i}+\beta^{n+m-2i}}{(\alpha-\beta)^{m+2+2i}},\end{array}\right.$$

dum vero impar:

$$(\mathrm{VI}'') \ldots\ldots\ldots (-1)^n . \overset{-(m+1)}{C_n}$$

$$=\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} (m+2i)_{2i}(n+m-2i)_{m-2i}\frac{\alpha^{n+m+1-2i}+\beta^{n+m+1-2i}}{(\alpha-\beta)^{m+1+2i}} \\ \displaystyle -\sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} (m+2i+1)_{2i+1}(n+m-2i-1)_{m-2i-1}\frac{\alpha^{n+m-2i}-\beta^{n+m-2i}}{(\alpha-\beta)^{m+2+2i}}; \end{cases}$$

quae quidem aequationes, debitâ ratione habitâ relationum

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}=\cos\frac{2\pi}{3}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}{}^{*)}=-(\cos\frac{\pi}{3}\mp\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}),$$

$$2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},\ 2\cos\frac{\pi}{3}=1,$$

perfectisque nonnullis reductionibus **) tandemque loco ipsius $\overset{-(m+1)}{C_n}$ substitutâ expressione illâ (α) [in prooemio], in aequationem ipsam (I) theorematis nostri abeunt: cui praeterea novam hanc immutatam aliquantulum magisque concinnam reddere juvat formam:

Theorema.

Denotantibus $\overset{m}{F}_0(=1)$, $\overset{m}{F}_1$, $\overset{m}{F}_2$, $\overset{m}{F}_3$, etc. **Numeros** m**ti ordinis Figuratos, nempe**

$$m_0,\ (m+1)_1,\ (m+2)_2,\ (m+3)_3,\ \text{etc.}$$

atque n **numerum integrum quemlibet, habetur**

dum m **par est aut 0:**

$$\text{"(I)"}\ldots 1.(n+m)_m-\overset{m}{F}_1.(n+m-1)_{m+1}+\overset{m}{F}_2.(n+m-2)_{m+2}$$
$$-\overset{m}{F}_3.(n+m-3)_{m+3}+\text{etc.}$$

---

*) Scilicet (ut patet) aequationibus praecedentibus nil refert, cuinam potissimum ipsarum $\cos\frac{2\pi}{3}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$ nomen α aut β referatur.

**) Quibus in perficiendis probe erit tenendum, p et r numeros integros aut 0 denotantibus, haberi

$$\begin{cases} \alpha-\beta=\pm 2\sin\frac{\pi}{3}.\sqrt{-1}=\pm\sqrt{3}.\sqrt{-1}, \\ (\alpha-\beta)^{2r}=(-3)^r, \\ \dfrac{\alpha^p+\beta^p}{(\alpha-\beta)^{2r}}=(-1)^{p+r}.\dfrac{2\cos p\frac{\pi}{3}}{(\sqrt{3})^{2r}}=(-1)^p(-\tfrac{1}{3})^r\dfrac{\cos p\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}, \\ \dfrac{\alpha^p-\beta^p}{(\alpha-\beta)^{2r+1}}=(-1)^{p+1+r}.\dfrac{2\sin p\frac{\pi}{3}}{(\sqrt{3})^{2r+1}}=(-1)^{p+1}(-\tfrac{1}{3})^r\dfrac{\sin p\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}, \end{cases}$$

(usque ad primum terminum evanescentem)

$$= \mathop{S}_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i} \frac{\sin(n+m-2i+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} (n+m-2i)_{m-2i}$$

$$- \mathop{S}_{i=0}^{i=\frac{m-2}{2}} (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+2}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i+1} \frac{\cos(n+m-2i)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} (n+m-2i-1)_{m-2i-1},$$

dum vero m impar:

$$= \mathop{S}_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i} \frac{\cos(n+m-2i+1)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} (n+m-2i)_{m-2i}$$

$$- \mathop{S}_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i+1} \frac{\sin(n+m-2i)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} (n+m-2i-1)_{m-2i-1}.$$

Ex. gr. Posito success. $m=0, 1, 2, 3$ habentur *):

$$(a) \ldots\ldots 1-(n-1)_1+(n-2)_2-(n-3)_3+\text{etc.} = \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}};$$

$$(b) \ldots\ldots 1.(n+1)_1-2n_2+3(n-1)_3-4(n-2)_4+\text{etc.}$$

$$= -\tfrac{1}{3}.\left[\frac{\cos(n+2)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}(n+1)_1 - 2.\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right];$$

$$(c) \ldots\ldots 1.(n+2)_2-3(n+1)_3+6n_4-10(n-1)_5+\text{etc.}$$

$$= -\tfrac{1}{3}.\left[\frac{\sin(n+3)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}(n+2)_2 + \frac{\cos(n+2)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}(n+1)_1 - 2.\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right];$$

$$(d) \ldots\ldots 1.(n+3)_3-4(n+2)_4+10(n+1)_5-20n_6+\text{etc.}$$

$$= \tfrac{1}{9}.\left[\frac{\cos(n+4)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}(n+3)_3 - 4.\frac{\sin(n+3)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}(n+2)_2 \right.$$

$$\left. - \tfrac{10}{3}.\frac{\cos(n+2)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}(n+1)_1 + \tfrac{20}{3}.\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right].$$

4. Quo ex theoremate rectâ consequitur hocce

---

arum ope relationum nova, quam heic exposuimus, Theorematis forma facili negotio prodibit.

*) Conf. loc. supra cit. T. VII. pag. 266 et 267.

Corollarium.

Denotante p numerum integrum $> m$, habetur dum m par est aut 0:

$$\text{"(II)"} \ldots p_m - \overset{m}{F}_1 . (p-1)_{m+1} + \overset{m}{F}_2 . (p-2)_{m+2} - \overset{m}{F}_3 . (p-3)_{m+3} + \text{etc.}$$

(usque ad primum term. evanesc.)

$$= \overset{i=\frac{m}{2}}{\underset{i=0}{S}} (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i} \frac{\sin (p-2i+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} (p-2i)_{m-2i}$$

$$- \overset{i=\frac{m-2}{2}}{\underset{i=0}{S}} (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+2}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i+1} \frac{\cos (p-2i)\frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} (p-2i-1)_{m-2i-1},$$

dum vero m impar:

$$= \overset{i=\frac{m-1}{2}}{\underset{i=0}{S}} (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i} \frac{\cos (p-2i+1)\frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} (p-2i)_{m-2i}$$

$$- \overset{i=\frac{m-1}{2}}{\underset{i=0}{S}} (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i+1} \frac{\sin (p-2i)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} (p-2i-1)_{m-2i-1}.$$

Nec id solum; vera est haecce aequatio, etiamsi p numerus est integer $= m$. Quod ut probetur, sufficit ut ostendatur constare sibi Theorema ipsum, etiamsi $n=0$ sit, certe nisi simul $m=0$ fuerit: id quod paucis his expediri licebit. — Prius aequationis "(I)" membrum in hoc casu ($=1$) coëfficiens est ipsius x^0 in evolutâ functione

$$[1-x(1-x)]^{-(m+1)};$$

posterius autem, ut ex ipsa demonstratione supra expositâ patet *), coëfficiens est ipsius x^0 in „producto" serierum ex evolutis

---

*) Scilicet in eo res vertitur, ut aequatio illa (VI) aut (VI') valere probetur, etiamsi $n=0$ fuerit. Valere eam (in hoc quoque casu) pro $m=1$ et 2, ex eo patet quod posito $n=0$ aequationes illae (II) et (III) identicae evadunt. Concesso igitur valere eam usque ad m quemdam (inclusive), reliquum est ut probetur vera esse pro sequenti $m+1$. Eodem usque modo ac in art. 2 praecedenti aquatio illa (6') vera esse probatur, etiamsi $n=0$ fuerit, extensâ quidem ad hunc quoque casum ($n=0$) definitione illâ signi S_{p+1}, i. e. posito tunc

$$S_{p+1} = (\alpha - \beta)(\alpha^{p+1} + (-1)^{p+1} \beta^{p+1}).$$

Tum nullo negotio patet, aequationes illas (A) et (A') in hoc quoque casu valere. Caetera verbotenus ut in art. 2. sequuntur.

$$(1+\alpha x)^{-(m+1)} \text{ et } (1+\beta x)^{-(m+1)}$$

comparatarum.

Quae cum ita sint, jam constat verum esse, quod loco cit. (T. VII. p. 268.) expositum est Corollarium, cujus praeterea aequationi (II) immutatam aliquantulum magisque concinnam heic dedimus formam "(II)". — Ideoque nec gutta quidem superest dubii, quin rata sit Numerorum Figuratorum relatio ea, quam ibid. (p. 269.) exposuimus: cui praeterea, posito $p=m$ in aequat. "(II)", potiorem hanc reddere juvat formam:

"(III)"

1°) dum m numer. est integer par (aut 0):

$$1=\mathop{S}_{i=0}^{i=\frac{m}{2}}(-\tfrac{1}{3})^{\frac{m}{2}+i}.\overset{m}{F}_{2i}\frac{\sin(m-2i+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$-\mathop{S}_{i=0}^{i=\frac{m-2}{2}}(-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+2}{2}+i}.\overset{m}{F}_{2i+1}\frac{\cos(m-2i)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}};$$

2°) dum m impar est:

$$1=\mathop{S}_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}}(-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}+i}.\overset{m}{F}_{2i}\frac{\cos(m-2i+1)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$-\mathop{S}_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}}(-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}+i}.\overset{m}{F}_{2i+1}\frac{\sin(m-2i)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}.$$

Nota I.

(Vid. pag. 234.)

Specie forsan haec via ea ipsa esse videatur, quâ postquam coëfficiens ipsius x^n in „evolutione" functionis $(1-x+x^2)^{-(m+1)}$, formâ illâ $(1+\alpha x)^{-(m+1)}(1+\beta x)^{-(m+1)}$ indutae, exhibita fuerit ope cognitae illius legis, quam in commentatione suâ numero (1) insignivit Cel. Schlömilch, deinceps ponatur coëfficiens haecce expressioni illi (α) aqualis. — Quod si ita foret; revera res gesta foret talis, cui jure quodam epitheton illud cedat „wissenschaftlich höchst unbedeutend" (vid. Comment. Cel. Schlömilch, sub finem), quippe quâ non nisi duae, quâ formam diversae aliquatenus, expressiones ipsius $\frac{F^{(n)}(0)}{1.2....n}$ [$F(x)$ breviter denotante ipsam $(1-x+x^2)^{-(m+1)}$] in medium prolatae fuissent: et quidem tali in re multo melius Analysi fuisset consultum, si — ut praeterea rem gessit Cel. Schlömilch — generalis uno ictu petita fuisset expres-

sio ipsius $F^{(n)}(x)$ i. e. Coëffic. Different. n^{ti} ordinis functionis $(1-x+x^2)^{-(m+1)}$ vel potius functionis hujus universae

$$(x^2+ax+b)^{-(\mu+1)}, \ [\mu \text{ reali quâlibet}].$$

Namque — [ut heic caetera omittam cognitae demum functionis $F^{(n)}(x)$ emolumenta] — uti primum forte contigit duas quâ formam diversas hujusce $F^{(n)}(x)$ expressiones inveniri; aequatis sibi invicem hisce, generalis jam conciliata erit relatio talis, cujus in speciebus innumeris non nisi unam conficiat, quam supra commemoravimus, identitas illa ambarum ipsius $F^{(n)}(0)$ expressionum.

At vero „species nonnumquam fallit": recta non haec erat via. Hanc quisquis fuerit insecutus, ulterius in tali re provehi non poterit, quam donec relationem demum talem, qualem in Commentatione suâ numero (9) insignivit Cel. Schlömilch, assequi bene contigerit. Quae quidem relatio quamvis praeterea notatu sit vere condigna, celari non potest temere aliquatenus latam esse sententiam Cel. Auctoris (pag. 364.) istam: „Für $\varphi=\frac{\pi}{3}$ ergiebt sich aus der Gleichung (9) eine Relation, aus welcher sich sämmtliche von Herrn Dr. Björling im VII. Theile S. 266. mitgetheilte Formeln ableiten lassen, wenn man sich auf die Unterscheidung von geraden und ungeraden n" (?) „einlässt und einige Transformationen vornimmt." Verum quidem est, si ponatur $\mu=m$ (num. int. aut 0), abire posterius hujusce aequationis membrum in

$$\begin{aligned} n_0(m+n)_n(2\cos\varphi)^n &- (n-1)_1(m+n-1)_{n-1}(2\cos\varphi)^{n-2} \\ &+ (n-2)_2(m+n-2)_{n-2}(2\cos\varphi)^{n-4} - \\ &\text{etc. (usque ad primum term. evanesc.)} \\ = n_0(n+m)_m(2\cos\varphi)^n &- (n-1)_1(n+m-1)_m(2\cos\varphi)^{n-2} \\ &+ (n-2)_2(n+m-2)_m(2\cos\varphi)^{n-4} - \\ &\text{etc.} \\ = 1.(n+m)_m(2\cos\varphi)^n &- (m+1)_1(n+m-1)_{m+1}(2\cos\varphi)^{n-2} \\ &+ (m+2)_2(n+m-2)_{m+2}(2\cos\varphi)^{n-4} - \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

quae quidem reverâ, dum $\varphi=\frac{\pi}{3}$ ponitur, prius ipsum aequationis nostrae "(I)" membrum conficit. Verumtamen fore ut prius aequationis hujus (9) membrum in formulam reduci liceret talem, quae, dum $\varphi=\frac{\pi}{3}$ ponitur, in membrum aequationis nostrae 2^{um} aut 3^{um} (ideoque in formulam ex $m+1$ terminis confectam), prout n par est aut impar, abeat, — id quonam jure contendi liceat, nescio. Etenim quis est qui ne videat ab n minime pendere hanc reductionem, utpote quam e contrario perfici non omnino liceat, nisi forte μ numerus integer aut 0 (et quidem $=m$) fuerit? quo in casu singulari reapse, pro $\varphi=\frac{\pi}{3}$, una prodibit vel altera forma, prout m

par est (0 inclusive) aut impar. Qua tamen de re id insuper est admonendum, fieri non posse — [certe quod nos quidem sciamus] — ut prius illud membrum aequat. (9) in $m+1$ terminos reducendi negotium eo modo, quem vulgo „einige Transformationen" *) vocant, perfici liceat; sed ejusdem omnino generis impedimentis obnoxia est (uti nobis videtur) ista reductio, ac si posterius ipsum aequationis membrum in formam, cujus heic mentio est, reducendi consilium iniveras.

Quae cum ita sint, his fere (ut nobis videtur) loco citato potissimum uti verbis decuisset Cel. Auctorem: Dum $\mu=m$ (num. int. aut 0) est, valorem utriusque membrorum aequationis (9) formulâ quâdam ex $m+1$ terminis confectâ exprimi licebit tali, quae casu illo $\varphi=\frac{\pi}{3}$ singulari in 2um aut 3um membrum aequationis (I) in pag. 267. T. VI. expositae abeat. Quae si quando inventa fuerit $m+1$ terminorum formula vehementer optanda, novum eâ demum constitutum erit Theorema nostro tanto latius patens, quanto φ ipsa universa singularem illam $\frac{\pi}{3}$ generalitate superet. Ipsam autem hujusce formulae indagationem — fiatne ista ratione illi analogâ, quam nos quidem in casu $\frac{\pi}{3}$ singulari secuti fuimus, nec ne — velit propense Celeb. Prof. Schlömilch occasione datâ suscipere formulamque demum inventam promulgare, est quod vehementer optamus atque speramus. Nostra interea profecto haud parvi interfuit hoc ipsum Theorema pro $\varphi=\frac{\pi}{3}$ eo, quem supra exposuimus, modo probare: praesertim quum nobis videatur expositio ista haud modici futura esse emolumenti conaturo, quicumque erit, generalem quam diximus formulam edere inventam.

Nota II.

In demonstrationem aequationis (A).

[p numerum integr. denotat.].

Ex definitione habetur

$$(1)\ldots\; S_{p+1}=\mathop{S}_{i=0}^{i=n}(i+p)_p(\alpha^{n+1-i}-\beta^{n+1-i})(\alpha^{i+p+1}+(-1)^{p+1}.\beta^{i+p+1}),$$

seu, quoniam $\alpha\beta=1$ est,

$$=(\alpha^{n+p+2}+(-1)^{p+2}\beta^{n+p+2})\mathop{S}_{i=0}^{i=n}(i+p)_p$$
$$-[\beta^{n-p}\mathop{S}_{i=0}^{i=n}(i+p)_p\alpha^{2i}+(-1)^p\alpha^{n-p}\mathop{S}_{i=0}^{i=n}(i+p)_p\beta^{2i}];$$

*) Sic verba habent Cel. Schlömilch pag. 364 l. cit.

i. e.

$$(2) \ldots\ldots = (n+p+1)_{p+1}(\alpha^{n+p+2} + (-1)^{p+2}\beta^{n+p+2}) \\ -[\beta^{n-p}\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p)_p\alpha^{2i} + (-1)^p\alpha^{n-p}\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p)_p\beta^{2i}],$$

quoniam vi naturae Numerorum Figuratorum habetur formula

$$(3) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p)_p = (n+p+1)_{p+1} \;{}^{*)}.$$

Praeterea, quod

$$\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p)_p\alpha^{2i} = (n+p)_p\alpha^{2n} + \overset{i=n}{\underset{i=0}{\Sigma}}(i+p)_p\alpha^{2i}$$

$$= (n+p)_p\alpha^{2n} + \frac{(n+p)_p\alpha^{2n} - 1 - \alpha^2\overset{i=n}{\underset{i=0}{\Sigma}}(i+p)_{p-1}\alpha^{2i}}{\alpha^2 - 1} \;{}^{**)}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2-1}\{(n+p)_p\alpha^{2n+2} - (1 + \alpha^2\overset{i=n}{\underset{i=0}{\Sigma}}(i+p)_{p-1}\alpha^{2i})\}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2-1}\{(n+p)_p\alpha^{2n+2} - (1 + \alpha^2\overset{i=n-1}{\underset{i=0}{S}}(i+p)_{p-1}\alpha^{2i})\}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2-1}\{(n+p)_p\alpha^{2n+2} - \overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p-1)_{p-1}\alpha^{2i}\},$$

---

*) Vid. ex gr. Cauchy, Anal. Alg. Note VI. Théor. 1er. — Praeterea rem paucis, si placet, sic licet expediri. Signo $\overset{i}{\underset{i=0}{\Sigma}}\varphi i$ denotante functionem ipsius i eam, cujus differentia [dum $\Delta i = 1$] sit φi, deminutam valore suo pro $i=0$, habetur

$$\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p)_p = (n+p)_p + \overset{i=n}{\underset{i=0}{\Sigma}}(i+p)_p,$$

vi cujus, ratione insuper habitâ formularum

$$\overset{i}{\underset{i=0}{\Sigma}}(i+p)_p = (i+p)_{p+1}, \quad (n+p)_p + (n+p)_{p+1} = (n+p+1)_{p+1},$$

rectâ provenit formula (3).

**) Scilicet ex eo, quod $\alpha^{2i} = e^{2i.\log\alpha}$ est, consequitur, posito $r = 2\log\alpha$ atque i loco ipsius x in formula illa cognita

$$\Sigma(e^{rx}\varphi x) = \frac{e^{rx}\varphi x}{e^r - 1} - \frac{e^r}{e^r-1}.\Sigma(e^{rx}.\Delta\varphi x), \text{ scil. } \Delta x = 1,$$

legitimam esse quam supra descripsimus aequationem. [Si cui forte offenderit usurpasse nos hoc loco signum illud „$\log\alpha$“, quamvis α heic quantitas sit parte reali negativâ instructa; solum id admonuisse sufficiet, nos heic quidem signo „$\log\alpha$“ e logarithmorum quantitatis α quemlibet cumque voluisse intellectum. Videlicet Exponente $2i$ numerum integrum conficiente, ut facili patet negotio, nil adest periculi quin juste statuatur aequatio $\alpha^{2i} = e^{2i\cdot\log\alpha}$, quivis fuerit „$\log\alpha$“ logarithmorum ipsius α].

rea quantitas intra uncos [·] in (2), vi relationum illarum

$$\frac{\alpha}{\alpha^2-1}=\frac{1}{\alpha-\beta}=-\frac{\beta}{\beta^2-1},$$

i potest in

$$\frac{(n+p)_p(\alpha^{n+p+1}+(-1)^{p+1}\beta^{n+p+1})-[\beta^{n-p+1}\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p-1)_{p-1}\alpha^{2i}+(-1)^{p-1}.\alpha^{n-p+1}\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p-1)_{p-1}\beta^{2i}]}{\alpha-\beta};$$

cujus quum numerator ipsum conficit membrum posterius aequationis (2), mutato ibi p in $p-1$, jam patet aequationem hancce (2) in ipsam (A) abire.

Q. E. D.

XXIII.

Das geradlinige Dreieck in Beziehung auf die Quadrate der Perpendikel, welche man von einem Punkte seiner Ebene auf seine Seiten fällen kann, betrachtet.

Von dem

Herrn Doctor E. W. Grebe,

Gymnasiallehrer zu Cassel.

I.

Von einem Punkte in der Ebene eines geradlinigen Dreiecks seien Perpendikel auf die Seiten desselben herabgelassen, man verlangt, dass die Summe der Quadrate dieser Perpendikel ein Minimum werde.

Die Auflösung der Aufgabe

$$x^2+y^2+z^2=M$$

unter der Bedingung

$$ax+by+cz=2\varDelta$$

bietet keine Schwierigkeit dar, und führt zu den Resultaten

$$[1]\quad \begin{cases} x=\dfrac{2\varDelta a}{a^2+b^2+c^2}, \\ y=\dfrac{2\varDelta b}{a^2+b^2+c^2}, \\ z=\dfrac{2\varDelta c}{a^2+b^2+c^2}; \end{cases}$$

welche man auch ausdrücken kann:

$$[2]\quad \begin{cases} x=\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2}, \\ y=\dfrac{b\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2}, \\ z=\dfrac{c\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2}. \end{cases}$$

Da hiernach die Perpendikel von dem Punkte innerhalb des Dreiecks, welchen wir für den Augenblick den Minimumpunkt nennen wollen, den Dreiecksseiten, auf welchen sie stehen, proportional sind, so ergibt sich hieraus folgende Construction des Minimumpunktes. Man verzeichne über den drei Seiten des Dreiecks ABC (Taf. VI. Fig. 1.) Quadrate, verlängere die den Dreiecksseiten parallelen Seiten der letzteren bis zur Erzeugung des dem ursprünglichen ähnlichen Dreiecks $A'B'C'$ und ziehe dann $A'A$, $B'B$, $C'C$, so werden sich diese Linien in M als dem Minimumpunkte sowohl für ABC als für $A'B'C'$ schneiden. Es ist übrigens nicht nöthig, dass man die Quadrate wie in Taf. VI. Fig. 1. nach Aussen zeichnet; man kann dieselben auch wie in Taf. VI. Fig. 2. nach Innen construiren. Zu einer andern Construction des Minimumpunktes gelangt man, wenn man in Taf. VI. Fig. 3., wo S den Schwerpunkt des Dreiecks ABC und K den Mittelpunkt des in dasselbe beschriebenen Kreises vorstellt, berücksichtigt, dass z. B. CS den W. ACB so theilt, dass

$$\sin ACS : \sin BCS = a : b.$$

Soll nun CM bewirken, dass

$$\sin BCM : \sin ACM = a : b,$$

so muss W. $ACM=$ W. BCS, und also W. $MCK=$ W. SCK, auf dieselbe Weise auch W. $MBK=$ W. SBK, W. $MAK=$ W. SAK sein.

Als kleinste Summe der Perpendikelquadrate ergibt sich

$$[3]\quad M=\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2},$$

$$[4]\quad M=\frac{a^2\sin\beta^2\sin\gamma^2}{\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2}=\frac{b^2\sin\alpha^2\sin\gamma^2}{\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2}$$
$$=\frac{c^2\sin\alpha^2\sin\beta^2}{\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2};$$

nd, weil allgemein $a^2+b^2+c^2=4\Delta(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)$:

$$[5]\quad M=\frac{\Delta}{\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma}.$$

Die Perpendikel vom Minimumpunkte aus theilen jede Dreiecksseite in zwei Abschnitte. Für diese Abschnitte (Taf. VI. Fig. 4.) erhält man die Werthe

$$[6]\quad\begin{cases} CX=\dfrac{a(b^2+ab\cos\gamma)}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{a(\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}b^2-\frac{1}{2}c^2)}{a^2+b^2+c^2}, \\ BX=\dfrac{a(c^2+ac\cos\beta)}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{a(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b^2+\frac{3}{2}c^2)}{a^2+b^2+c^2}, \\ CY=\dfrac{b(a^2+ab\cos\gamma)}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{b(\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}c^2)}{a^2+b^2+c^2}, \\ AY=\dfrac{b(c^2+bc\cos\alpha)}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{b(-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{3}{2}c^2)}{a^2+b^2+c^2}, \\ BZ=\dfrac{c(a^2+ac\cos\beta)}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{c(\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2)}{a^2+b^2+c^2}, \\ AZ=\dfrac{c(b^2+bc\cos\alpha)}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{c(-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2)}{a^2+b^2+c^2}. \end{cases}$$

Die Abstände des Minimumpunktes von den Eckpunkten de Dreiecks (Taf. VI. Fig. 3.) lassen sich so ausdrücken:

$$[7]\quad\begin{cases} MA=\dfrac{bc\sqrt{(-a^2+2b^2+2c^2)}}{a^2+b^2+c^2}, \\ MB=\dfrac{ac\sqrt{(2a^2-b^2+2c^2)}}{a^2+b^2+c^2}, \\ MC=\dfrac{ab\sqrt{(2a^2+2b^2-c^2)}}{a^2+b^2+c^2}; \end{cases}$$

und bezeichnet man die, die Seiten a, b, c halbirenden Transver salen bezüglich mit t_a, t_b, t_c, so ist:

$$[8]\quad\begin{cases} MA=\dfrac{2bct_a}{a^2+b^2+c^2}, \\ MB=\dfrac{2act_b}{a^2+b^2+c^2}, \\ MC=\dfrac{2abt_c}{a^2+b^2+c^2}. \end{cases}$$

Für die Verbindungslinien YZ, XZ, XY (Taf. VI. Fig. 4.) finde man:

$$[9]\quad\begin{cases} YZ=\dfrac{2\varDelta\sqrt{(-a^2+2b^2+2c^2)}}{a^2+b^2+c^2}, \\ XZ=\dfrac{2\varDelta\sqrt{(2a^2-b^2+2c^2)}}{a^2+b^2+c^2}, \\ XY=\dfrac{2\varDelta\sqrt{(2a^2+2b^2-c^2)}}{a^2+b^2+c^2}; \end{cases}$$

$$[10]\quad \begin{cases} YZ = \dfrac{4\Delta t_a}{a^2+b^2+c^2}, \\ XZ = \dfrac{4\Delta t_b}{a^2+b^2+c^2}, \\ XY = \dfrac{4\Delta t_c}{a^2+b^2+c^2}; \end{cases}$$

$$[11]\qquad YZ = \frac{Mt_a}{\Delta},\ XZ = \frac{Mt_b}{\Delta},\ XY = \frac{Mt_c}{\Delta}.$$

Sucht man nun ferner die Werthe für die Transversalen, welche die Seiten des Dreiecks XYZ halbiren, und multiplicirt dieselben mit $\frac{2}{3}$, so erhält man die oben [1] angegebenen Ausdrücke für MX, MY und MZ. Es folgt hieraus, dass der Minimumpunkt des Dreiecks ABC zugleich der Schwerpunkt des Dreiecks XYZ ist. Bekanntlich hat auch der Schwerpunkt eines Dreiecks die Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den Winkelpunkten des Dreiecks ein Kleinstes ist.

II.

Denkt man sich alle Punkte in der Ebene eines geradlinigen Dreiecks, für welche die Quadrate der Perpendikel auf die drei Seiten eine gleichgrosse Summe geben, durch Curven verbunden, so ist die Natur und Lage dieser Curven näher zu untersuchen.

Nehmen wir vorläufig B (Taf. VI. Fig. 5.) zum Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, und setzen $BQ=x$, $QP=y$, so muss sein

$$PQ^2+PR^2+PS^2 = M+G,$$
$$PQ^2+(QT-QV)^2+(QU-QW)^2 = M+G,$$
$$y^2+((c-x)\sin\alpha - y\cos\alpha)^2+(x\sin\beta - y\cos\beta)^2 = M+G.$$

Bringen wir diese Gleichung auf die Form

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=G,$$

so ist

$$[12]\quad \begin{cases} A = 1+\cos\alpha^2+\cos\beta^2, \\ B = 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin\beta\cos\beta, \\ C = \sin\alpha^2+\sin\beta^2, \\ D = -2c\sin\alpha\cos\alpha, \\ E = -c\sin\alpha^2, \\ F = c^2\sin\alpha^2 - M. \end{cases}$$

Nebenbei wollen wir bemerken, dass, wenn wir in dieser Gleichung G zum Minimum machen, sich die Werthe von x und y übereinstimmend mit [1] und [6] ergeben, wodurch ein etwaiger

Zweifel daran, dass die Formeln [1] auf einen und denselben Punkt zu beziehen seien, niedergeschlagen wird.

Gehen wir nun zu einem mit dem vorigen parallelen Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Minimumpunkt ist, über, so verschwinden die Glieder mit D, E und F, und die Gleichung unserer Curve ist

[13] $$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = G.$$

Das mittlere Glied auf der linken Seite fällt von selbst weg, wenn entweder $\alpha = \beta$ oder $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Wir wollen hier dem rechtwinkeligen und dem gleichschenkeligen Dreieck besondere Betrachtungen widmen.

Für ein bei γ rechtwinkeliges Dreieck geht die Gleichung [13] in

[14] $$2y^2 + x^2 = G$$

über. Die in Frage stehenden Curven sind ähnliche Ellipsen um den Minimumpunkt, für welche das Verhältniss der Axen $\sqrt{2}:1$ stattfindet. Die specielle Gestalt des rechtwinkeligen Dreiecks äussert also auf die Gestalt dieser Ellipsen durchaus keinen Einfluss. Die grosse Axe ist mit der Hypotenuse parallel. Da ferner, wenn man in [6] $c^2 = a^2 + b^2$ setzt, $BZ = \frac{a^2}{c}$ und $AZ = \frac{b^2}{c}$ wird, so liegt der Minimumpunkt in der auf der Hypotenuse stehenden Höhe. Setzt man diese $= h$, also $2\Delta = hc$, so ergibt sich aus [1] $z = \frac{1}{2}h$, und eine Ellipse, welche, wie in Taf. VI. Fig. 6. durch den Scheitel des rechten Winkels geht, berührt zugleich die Hypotenuse. Aus [3] ergibt sich für unsern Fall $M = \frac{1}{2}h^2$ und aus [11]

$$YZ = \frac{ht_a}{c},\ XZ = \frac{ht_b}{c},\ XY = \frac{ht_c}{c}.$$

Ist unser Dreieck in Beziehung auf c als Grundlinie gleichschenkelig, so erhalten wir aus [13]

$$(1 + 2\cos\alpha^2)y^2 + 2\sin\alpha^2 x^2 = G,$$

oder, wenn wir alles auf den Winkel γ beziehen,

[15] $$(2 - \cos\gamma)y^2 + (1 + \cos\gamma)x^2 = G.$$

Nun ist aber $2 - \cos\gamma \gtreqless 1 + \cos\gamma$, jenachdem $\gamma \gtreqless \frac{\pi}{3}$ oder $c \gtreqless a$. Für das gleichseitige Dreieck liefert mithin die Gleichung [15] Kreise, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt mit den übrigen Mittelpunkten des gleichseitigen Dreiecks übereinstimmt, und M wird gemäss der Formeln [4] $= \frac{a^2}{4}$. Bei den übrigen gleichschenkeligen Dreiecken erhalten wir wieder Ellipsen, deren grosse Axe mit der Grundlinie des Dreiecks parallel ist, wenn letztere, wie in Taf. VI. Fig. 7. grösser, und auf derselben senkrecht steht, wenn sie, wie in Taf. VI. Fig. 8. kleiner ist, als eine der übrigen Dreiecksseiten.

Ist nun aber das Dreieck weder rechtwinkelig noch gleichschenkelig, so muss die durch die Gleichung [13] dargestellte Curve auf ein um den Winkel φ gedrehtes Coordinatensystem bezogen werden, so dass

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{B}{C-A}.$$

Alsdann wird die Gleichung der Curve

[16] $$Py^2 + Qx^2 = G,$$

und die Werthe von P und Q sind gleichzeitig in dem Ausdrucke

$$\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{9}{4} - (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2))}$$

enthalten. Man kann

[17] $$\begin{cases} P = \tfrac{3}{2} + \sqrt{(\tfrac{9}{4} - (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2))}, \\ Q = \tfrac{3}{2} - \sqrt{(\tfrac{9}{4} - (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2))} \end{cases}$$

setzen, und erhält so den Vortheil, x immer auf die grosse und y immer auf die kleine Axe der durch [16] dargestellten Ellipse beziehen zu dürfen, muss jedoch auf Anwendung der Relation $2\varphi < \pi$ verzichten, vielmehr die Lage der grossen Axe in besonderen Fällen durch Zurückgehen auf die Gleichung [13] zu bestimmen suchen. Es zeigt sich dann, dass die Lage der grossen Axe immer mit der Lage der grössten Dreiecksseite möglichst conform ist. Beispiele ungleichseitiger Dreiecke gewähren Taf. VI. Fig. 9. und Taf. VI. Fig. 10. Davon übrigens, dass die Gleichung [16] unter allen Umständen einer Ellipse, die nur in dem einzigen oben bereits erwähnten Falle in einen Kreis übergeht, angehöre, überzeugt man sich bald, wenn man den Formeln [17] einige Aufmerksamkeit schenkt. Der Ausdruck $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2$ kann niemals den Werth $\tfrac{9}{4}$, welchen er für $\alpha = \beta = \gamma$ erreicht, überschreiten; daher können P und Q nicht imaginär werden. Der genannte Ausdruck ist ferner stets positiv, und desshalb hat auch Q diese Eigenschaft, die sich bei P ohnehin von selbst versteht.

In Beziehung auf das mit jedem Dreieck nach dem Bisherigen in Verbindung stehende System von Ellipsen könnte man noch die Fragen aufwerfen: wie gross muss G sein, damit die Ellipse eine Seite, z. B. c, berühre? oder: wie gross mus G sein, damit die Ellipse durch einen Winkelpunkt des Dreiecks, z. B. C, gehe? Die Antworten auf diese Fragen zeichnen sich durch Einfachheit aus, und mögen desshalb hier Platz finden. Bei der ersten ist

[18] $$G = \frac{4\Delta^2}{a^2 + b^2},$$

bei der zweiten

[19] $$G = \frac{4\Delta^2}{c^2}.$$

Nach dem Obigen war ferner

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{B}{C-A}$$

oder

[20] $$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta}.$$

Setzt man nun auch

[21] $$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} 2\chi &= \frac{\sin 2\gamma - \sin 2\beta}{1 + \cos 2\beta + \cos 2\gamma}, \\ \operatorname{tang} 2\psi &= \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\gamma}{1 + \cos 2\gamma + \cos 2\alpha}; \end{aligned} \right.$$

so folgt daraus

[22] $$\left\{ \begin{aligned} \cos 2\varphi &= \frac{\frac{3}{2} - (\sin \alpha^2 + \sin \beta^2)}{\pm \sqrt{(\frac{9}{4} - (\sin \alpha^2 + \sin \beta^2 + \sin \gamma^2))}}, \\ \cos 2\chi &= \frac{\frac{3}{2} - (\sin \beta^2 + \sin \gamma^2)}{\pm \sqrt{(\frac{9}{4} - (\sin \alpha^2 + \sin \beta^2 + \sin \gamma^2))}}, \\ \cos 2\psi &= \frac{\frac{3}{2} - (\sin \gamma^2 + \sin \alpha^2)}{\pm \sqrt{(\frac{9}{4} - (\sin \alpha^2 + \sin \beta^2 + \sin \gamma^2))}}. \end{aligned} \right.$$

Sind die Winkel φ, χ und ψ in Beziehung auf die drei Dreiecksseiten in einerlei Sinn genommen, so müssen in diesen Formeln, welche durch blosses Fortrücken der Bezeichnung in einander übergehen, entweder nur die obern oder nur die untern Zeichen gelten, und man hat folglich

[23] $$\tfrac{1}{2}\cos \varphi + \tfrac{1}{2}\cos \chi + \tfrac{1}{2}\cos \psi = \pm \sqrt{(\tfrac{9}{4} - (\sin \alpha^2 + \sin \beta^2 + \sin \gamma^2))},$$

[24] $$\cos \varphi^2 + \cos \chi^2 + \cos \psi^2 = \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{9}{4} - (\sin \alpha^2 + \sin \beta^2 + \sin \gamma^2))},$$

[25] $$\sin \varphi^2 + \sin \chi^2 + \sin \psi^2 = \tfrac{3}{2} \mp \sqrt{(\tfrac{9}{4} - (\sin \alpha^2 + \sin \beta^2 + \sin \gamma^2))}.$$

Daher ist endlich auch nach [17]

[26] $$\left. \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \cos \varphi^2 + \cos \chi^2 + \cos \psi^2, \\ \sin \varphi^2 + \sin \chi^2 + \sin \psi^2. \end{matrix} \right.$$

III.

Bisher wurden die Quadrate der Perpendikel, welche man von einem Punkte in der Ebene eines geradlinigen Dreiecks auf die Seiten desselben fällen kann, immer zu einer Summe vereinigt. Künftighin soll der Unterschied zwischen der Summe von zwei solchen Quadraten und dem dritten die Stelle jener vertreten.

Stellen wir daher jetzt zuvörderst wieder die Aufgabe, $x^2 + y^2 - z^2$ unter der Bedingung $ax + by + cz = 2\varDelta$ zum Minimum zu machen, so erhalten wir die Auflösung:

$$[27] \quad \begin{cases} x = \dfrac{2\Delta a}{a^2+b^2-c^2}, \\ y = \dfrac{2\Delta b}{a^2+b^2-c^2}, \\ z = \dfrac{-2\Delta c}{a^2+b^2-c^2}; \end{cases}$$

oder

$$[28] \quad \begin{cases} x = \dfrac{a \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2}, \\ y = \dfrac{a \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2}, \\ z = \dfrac{-a \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2}; \end{cases}$$

oder auch

$$[29] \quad \begin{cases} x = \tfrac{1}{2} a \operatorname{tang}\gamma, \\ y = \tfrac{1}{2} b \operatorname{tang}\gamma, \\ z = -\tfrac{1}{2} c \operatorname{tang}\gamma. \end{cases}$$

Ganz dieselben Resultate können wir erhalten, wenn wir nach Anleitung von Taf. VI. Fig. 5., wie oben $x^2+y^2+z^2$, so jetzt $x^2+y^2-z^2$ ausdrücken, den erhaltenen Werth

$$-y^2 + ((c-x)\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 + (x\sin\beta - y\cos\beta)^2 = H,$$

in welchem nunmehr x und y Coordinaten sind, zu einem Minimum machen, und die Abstände des Punktes, für welchen das Minimum stattfindet, von den drei Dreiecksseiten berechnen. Die letzte Gleichung gilt dann wieder für die Curven, welche die Punkte von einerlei H verbinden. Verlegen wir auch hier, zu einem mit dem vorigen parallelen System von Coordinaten übergehend, den Anfangspunkt der letzteren nach dem durch die Formeln [27] bezeichneten Punkte, so erhalten wir wieder die Gleichung [13], nur mit dem Unterschiede, dass jetzt

$$[30] \qquad A = -1 + \cos\alpha^2 + \cos\beta^2.$$

Die dermalige Gleichung [13] gehört jedoch, wie die nachherige Discussion derselben lehren wird, nur dann einer Ellipse (oder einem Kreise) an, wenn das Dreieck ABC bei C stumpfwinkelig ist, und in der That zeigt auch die Betrachtung des zweiten Differenzials, dass die Function $x^2+y^2-z^2$ mit der Bedingungsgleichung $ax+by+cz=2\Delta$ nur dann ein Minimum hat, wenn $c^2 > a^2+b^2$. Unsere dermalige Aufgabe verdient wohl als ein besonders instructives Beispiel für die Lehrbücher der Differenzialrechnung empfohlen zu werden. Im Vorbeigehen sei bemerkt, dass das sonst so vortreffliche neue Lehrbuch von Schlömilch (Greifswald. 1847.) sich auf Seite 168. einer Ungenauigkeit schuldig gemacht hat. Aus dem dort Gesagten würde folgen, dass

auch bei unserer Aufgabe immer ein Minimum vorhanden sei. Findet nun zwar ein wirkliches Minimum nur dann statt, wenn γ stumpf ist, so lässt sich doch wohl erwarten, dass auch, wenn γ spitz ist, der Punkt, auf welchen die Formeln [27], [28] und [29] hinweisen, eine gewisse geometrische Merkwürdigkeit haben werde. Ist γ ein rechter Winkel, so kann von diesem Punkte, dem wir für alle Fälle wenigstens den Titel Minimumpunkt belassen wollen, nicht mehr die Rede sein, weil er alsdann, wie am Deutlichsten aus [29] erhellt, ins Unendliche hinausgeschoben wird.

Der Werth von H im Minimumpunkte ist

[31] $$M=\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2-c^2},$$

[32] $$M=\frac{a^2\sin\beta^2\sin\gamma^2}{\sin\alpha^2+\sin\beta^2-\sin\gamma^2}=\frac{b^2\sin\alpha^2\sin\gamma^2}{\sin\alpha^2+\sin\beta^2-\sin\gamma^2}$$
$$=\frac{c^2\sin\alpha^2\sin\beta^2}{\sin\alpha^2+\sin\beta^2-\sin\gamma^2},$$

[33] $$M=\Delta\tang\gamma.$$

Das G der Gleichung [13] ist $H-M$, so dass, was auch oben der Fall war, G in dem Minimumpunkte immer $=0$ ist.

Der dermalige Minimumpunkt kann durch Verzeichnen von Quadraten auf den Dreiecksseiten u. s. w. auf ähnliche Weise wie oben gefunden werden. Es findet hier nur der Unterschied statt, dass das Quadrat der Seite c nach Innen beschrieben werden muss, wenn die Quadrate der beiden andern Seiten nach Aussen beschrieben sind, und umgekehrt. In Taf. VI. Fig. 11. ist beides gleichzeitig dargestellt. Der gefundene Punkt M ist auch hier nicht bloss für das Dreieck ABC, sondern auch für $A'B'C'$ und für $A''B''C''$ der Minimumpunkt.

Dreht man auch in unserem Fall die Coordinatenaxen um den Winkel φ, damit das Glied Bxy in [13] verschwinde, so erhält man wieder die Gleichung [16], jedoch mit den Werthen

[34] $$\left.\begin{matrix}P\\Q\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}+\sin\alpha^2+\sin\beta^2-\sin\gamma^2)}.$$

Ist der Winkel γ spitz, so ist

$$\sin\alpha^2+\sin\beta^2>\sin\gamma^2,$$

die Wurzelgrösse daher $>\frac{1}{2}$, und folglich einer der Werthe P und Q negativ. Die Curven, welche die Gleichung [16] und somit auch [13] darstellt, sind alsdann Hyperbeln, welche nur, wenn $G=0$ ist, in zwei sich in dem Minimumpunkte durchschneidende gerade Linien übergehen. Taf. VI. Fig. 12. versinnlicht dieses; die spitzwinkeligen Hyperbeln gehören dort zu negativen, die stumpfwinkeligen zu positiven Werthen von G.

Ist aber γ stumpf, so ist

$$\sin\alpha^2+\sin\beta^2<\sin\gamma^2.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen erreicht alsdann seinen kleinsten Werth, welcher $=0$ ist, wenn $\alpha=\beta=\frac{1}{4}\pi$, $\gamma=\frac{2}{3}\pi$. Die Werthe von P und Q bleiben immer reell, und in dem eben angeführten Falle werden die Curven Kreise, in allen übrigen Fällen sind sie Ellipsen. Ist das Dreieck noch obendrein gleichschenkelig, so läuft die grosse Axe der Ellipse mit c parallel, wenn $\gamma>\frac{2}{3}\pi$ (Taf. VI. Fig. 13.), steht dagegen auf c senkrecht (Taf. VI. Fig. 14.), wenn $\gamma<\frac{2}{3}\pi$.

XXIV.

Ueber einen Satz des Herrn Professor J. Steiner.

Von dem

Herrn Observator Thomas Clausen

zu Dorpat.

Im zwei und dreissigsten Bande von Crelle's Journal für Mathematik stellt Steiner S. 300. folgenden Satz auf: „Durch jeden Punkt D einer Ellipse gehen drei Krümmungskreise der letztern, welche sie in irgend drei andern Punkten A, B, C osculiren; und jedesmal liegen die vier Punkte A, B, C, D in einem Kreise."

Um diesen schönen Satz zu beweisen, will ich der grössern Allgemeinheit wegen untersuchen, wie viele Krümmungskreise eines gegebenen Kegelschnitts durch einen gegebenen Punkt desselben gehen.

Ich nehme an, die Figur F, die aus dem gegebenen Kegelschnitte und den durch den Punkt D gehenden Krümmungskreisen besteht, sei die stereographische Projection einer Figur F' auf einer Kugelfläche; und D die Projection des Pols derselben. Es ist klar, dass die Krümmungskreise Projectionen von Kreisen auf der Kugel sind, die alle durch den Pol gehen, und zugleich die sphärischen Krümmungskreise der dem Kegelschnitte entsprechenden Figur sind. Projicirt man nun wieder diese Figur F' stereographisch, indem man zum Pol den Augenpunkt in der ersten Projection nimmt, und umgekehrt; so werden alle durch den vorigen Pol gehenden Kreise in gerade Linien projicirt, die ebenfalls die dem Kegelschnitte entsprechende Figur osculiren. Die dem Kegelschnitte entsprechende Figur muss also eben so viele Wendungspunkte haben, als der Kegelschnitt Krümmungskreise hat, die durch den Punkt D gehen; und umgekehrt.

Die unmittelbare Ableitung der Gleichung für die dem Kegelschnitte entsprechende letztgenannte Figur aus der Gleichung für den Kegelschnitt geschieht durch Substitution der Gleichungen:

$$x=\frac{\xi}{\varrho^2},\quad y=\frac{v}{\varrho^2},\quad \varrho^2=\xi^2+v^2$$

in die Gleichung für den Kegelschnitt. x und y bedeuten die rechtwinkligen Coordinaten des Kegelschnitts; ξ und v die der abgeleiteten Figur.

In der durch diese Substitution abgeleiteten Figur werden die geraden Linien in Kreise verwandelt; die Kreise in Kreise oder gerade Linien; überdies bleiben die Winkel der Tangenten an den respectiven Durchschnitten der Curven in beiden Figuren dieselben, oder die respectiven kleinsten Theile beider Figuren sind sich ähnlich, welches bekanntlich allgemeine Eigenschaften der stereographischen Projection sind. Uebrigens bemerke ich, dass die eben erwähnte Uebertragung von Figuren schon von Plücker analytisch angegeben, aber nicht so sehr in Anwendung gekommen ist, als sie zu verdienen scheint.

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte ist, wenn man einen Punkt derselben als Anfangspunkt der Coordinaten annimmt, und die Tangente an demselben Punkte als Axe der x:

$$y=axx+2bxy+cyy. \quad \ldots \quad (1)$$

Die Gleichung der aus dieser abgeleiteten Figur ist:

$$v(\xi\xi+vv)=a\xi\xi+2b\xi v+cvv. \quad \ldots \quad (2)$$

Diese Gleichung entspricht einer Curve des dritten Grades. Man soll nun die Wendungspunkte derselben bestimmen. Um diese bequemer bestimmen zu können, nehme ich eine perspectivische Projection derselben, die bekanntlich in den entsprechenden Punkten ebenfalls Wendungspunkte hat; und zwar nur in diesen, folglich genau dieselbe Anzahl derselben. Eine solche Projection erhält man durch die Substitution: $\xi=\frac{\xi'}{v'}$, $v=\frac{1}{v'}$; wodurch man die Gleichung derselben erhält:

$$v'=\frac{1+\xi'\xi'}{a\xi'\xi'+2b\xi'+c}. \quad \ldots \quad (3)$$

In den Wendungspunkten der Curve ist $\frac{\partial^2 v'}{\partial \xi'^2}=0$, folglich:

$$0=\xi'^3+\tfrac{3}{2}\cdot\frac{c-a}{b}\,\xi'^2-3\xi'+\frac{ac-cc-4b^2}{2ab}=u. \quad \ldots \quad (4)$$

Als besondere Fälle dieser Gleichung sind zu bemerken: wenn $b=0$, oder wenn der Punkt D in einer Hauptaxe liegt. In diesem Falle wird die Gleichung (4)

$$3(c-a)\xi'^2=(c-a)\frac{c}{a}.$$

Schliesst man nun den Fall $a=c$ oder den Kreis aus, so wird $\xi'^2=\frac{c}{3a}$. In der Ellipse, wo a und c gleiche Zeichen haben, finden zwei Werthe von ξ' Statt; in der Hyperbel kein Werth; in der Parabel, wo $c=0$, wird $\xi'=0$.

Schliessen wir nun den Fall $b=0$ aus; so hat die Gleichung (4) bekanntlich entweder eine oder drei reelle Wurzeln. Die Gleichung hat ein Maximum oder Minimum, wenn

$$\xi'^2+\frac{c-a}{b}\xi'-1=0, \text{ oder } \xi'=\frac{a-c\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2b}.$$

Die diesen beiden Werthen von ξ' entsprechenden Werthe der Gleichung (4) sind:

$$u=-\frac{(a-c)^2+4b^2}{2b^2}\left\{\frac{a-c+\frac{2b^2}{a}\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2b}\right\} \ldots\ldots (5)$$

Soll die cubische Gleichung (4) reelle Wurzeln haben, so müssen 1) die beiden Werthe von (5) entgegengesetzte Zeichen haben, oder der eine positiv, der andere negativ sein. Dieses findet nur Statt, wenn $a^2((a-c)^2+4b^2)>(a(a-c)+2b^2)^2$ oder $ac>b^2$, oder wenn der Kegelschnitt eine Ellipse ist. Ueberdies muss 2) der Werth von u für den kleinsten der Werthe von ξ', bei dem u ein Maximum oder Minimum, positiv sein. Dieses findet wirklich Statt, da man für ein negatives b das obere Zeichen vor der Quadratwurzel nehmen muss, wodurch u einen positiven Werth bekömmt; eben so für ein positives b, wo man das untere Zeichen nehmen muss.

Ist $ac=bb$, oder der Kegelschnitt eine Parabel, so sind zwei Wurzeln sich gleich, da u und $\frac{\partial u}{\partial \xi'}$ gleichzeitig $=0$.

In der Hyperbel ist $ac<bb$; folglich in diesem Falle nur eine Wurzel der Gleichung (4).

Da der Krümmungskreis, der im Punkte D selbst osculirt, nicht in der Formel enthalten, oder nicht mitgerechnet worden ist; da für diesen Punkt $x=0$, $y=0$; $\xi=\infty$, $v=a$; $\xi'=\infty$; so giebt es ausser diesem Kreise, wenn der Punkt D nicht in einer Hauptaxe liegt: in der Ellipse drei, in der Parabel zwei und in der Hyperbel nur einen Krümmungskreis, der durch den Punkt D geht.

Durch die Durchschnitte der Hauptaxen mit dem Kegelschnitte gehen in der Ellipse zwei; in der Parabel einer, und zwar unendlich grosser; in der Hyperbel keiner der Krümmungskreise: den im Punkte D selbst osculirenden in allen drei Fällen ausgenommen.

Den zweiten Theil des Satzes betreffend; so liegen die drei Wendungspunkte der Curve (2), wie an einem andern Orte erwie-

sen ist, wenn sie vorhanden sind, in einer geraden Linie. Es sei die Gleichung derselben

$$A\xi + Bv + C = 0.$$

Die dieser Geraden entsprechende Curve in der Figur des Kegelschnittes wird gefunden durch die Substitution $\xi = \frac{x}{r^2}$, $v = \frac{y}{r^2}$, $r^2 = x^2 + y^2$. Dies giebt

$$Ax + By + C(x^2 + y^2) = 0,$$

welches die Gleichung eines durch den Punkt D gehenden Kreises ist.

W. z. b. w.

XXV.

Ueber eine Beziehung zwischen den Flächeninhalten zweier Dreiecke, von denen das eine dem andern und zugleich dem, diesem zugehörigen äusseren Kreise umschrieben ist. — Verallgemeinerung dieser Beziehung.

Von dem
Herrn Doctor A. R. Luchterhandt
zu Berlin.

Ist

$$x^2 + y^2 = r^2$$

die Gleichung eines Kreises und sind x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 die Coordinaten dreier auf demselben gelegener Punkte, so hat man bekanntlich für die letzteren entsprechenden Tangenten die Gleichungen

$$xx_1 + yy_1 = r^2, \tag{1}$$

$$xx_2 + yy_2 = r^2, \tag{2}$$

$$xx_3 + yy_3 = r^2. \tag{3}$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Linien (1) und (2), (1) und (3), (2) und (3) mit ξ_3, η_3; ξ_2, η_2; ξ_1, η_1: so erhält man

$$\xi_3=\frac{r^2(y_1-y_2)}{x_2y_1-x_1y_2},\quad \eta_3=\frac{r^2(x_2-x_1)}{x_2y_1-x_1y_2};$$

$$\xi_2=\frac{r^2(y_1-y_3)}{x_3y_1-x_1y_3},\quad \eta_2=\frac{r^2(x_3-x_1)}{x_3y_1-x_1y_3};$$

$$\xi_1=\frac{r^2(y_2-y_3)}{x_3y_2-x_2y_3},\quad \eta_1=\frac{r^2(x_3-x_2)}{x_3y_2-x_2y_3}.$$

Nun ist, wenn wir den Inhalt des eingeschriebenen Dreiecks mit $\varDelta$, so wie den des umgeschriebenen mit D bezeichnen, abgesehen von dem Vorzeichen:

$$2\varDelta=x_2y_1-x_1y_2+x_3y_2-x_2y_3+x_1y_3-x_3y_1,$$

$$2D=\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2+\xi_3\eta_2-\xi_2\eta_3+\xi_1\eta_3-\xi_3\eta_1$$

$$=r^4\{x_2y_1-x_1y_2+x_3y_2-x_2y_3+x_1y_3-x_3y_1\}\left\{\frac{1}{(x_3y_2-x_2y_3)(x_1y_3-x_3y_1)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(x_1y_3-x_3y_1)(x_2y_1-x_1y_2)}+\frac{1}{(x_3y_2-x_2y_3)(x_2y_1-x_1y_2)}\right\}$$

$$=\frac{r^4\{x_2y_1-x_1y_2+x_3y_2-x_2y_3+x_1y_3-x_3y_1\}^2}{(x_3y_2-x_2y_3)(x_1y_3-x_3y_1)(x_2y_1-x_1y_2)}$$

$$=\frac{4r^4\varDelta^2}{(x_3y_2-x_2y_3)(x_1y_3-x_3y_1)(x_2y_1-x_1y_2)}.$$

Es bedeuten nun aber die drei Factoren im Nenner dieses Ausdrucks nichts anderes, als den doppelten Inhalt je eines der drei Dreiecke, welche zwei der ursprünglichen Punkte und jedesmal den Mittelpunkt des Kreises (den Anfangspunkt der Coordinaten) zu Eckpunkten haben. Bezeichnet man die Inhalte dieser Dreiecke mit $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$, so spricht sich die zu erweisende Relation in der Gleichung

$$D=\frac{r^4\varDelta^2}{4\varDelta_1\,\varDelta_2\,.\,\varDelta_3}\tag{A}$$

aus.

Nun hat man aber auch, wenn man x_1, y_1 u. s. w. durch ξ_1, η_1 u. s. w. ausdrückt:

$$x_1=\frac{r^2(\eta_2-\eta_3)}{\xi_3\eta_2-\xi_2\eta_3},\quad y_1=\frac{r^2(\xi_3-\xi_2)}{\xi_3\eta_2-\xi_2\eta_3};$$

$$x_2=\frac{r^2(\eta_1-\eta_3)}{\xi_3\eta_1-\xi_1\eta_3},\quad y_2=\frac{r^2(\xi_3-\xi_1)}{\xi_3\eta_1-\xi_1\eta_3};$$

$$x_3=\frac{r^2(\eta_1-\eta_2)}{\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2},\quad y_3=\frac{r^2(\xi_2-\xi_1)}{\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2};$$

und deshalb auch die Relation

$$\Delta = \frac{r^4 D^2}{4 D_1 . D_2 . D_3} \tag{B}$$

wo D_1, D_2, D_3 die Inhalte der Dreiecke bezeichnen, welche je zwei der Ecken des umschriebenen Dreiecks und jedesmal den Mittelpunkt des Kreises zu Eckpunkten haben.

Aus den Ausdrücken (A) und (B) ergeben sich noch zwischen allen acht in Rede stehenden Dreiecken die Beziehungen, welche durch die Gleichungen

$$\frac{\Delta^3}{\Delta_1 . \Delta_2 . \Delta_3} = \frac{D^3}{D_1 . D_2 . D_3} \tag{C}$$

und

$$r^8 \Delta . D = 16 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 D_1 D_2 D_3 \tag{D}$$

ausgedrückt sind.

Da man auch

$$\begin{aligned}&(\xi_3\eta_2 - \xi_2\eta_3)(\xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1)(\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2)\\ &= \frac{r^{12}\{x_2y_1 - x_1y_2 + x_3y_2 - x_2y_3 + x_1y_3 - x_3y_1\}^3}{(x_3y_2 - x_2y_3)^2(x_2y_1 - x_1y_2)^2(x_1y_3 - x_3y_1)^2}\end{aligned}$$

hat, so ist

$$r^{12}\Delta^3 = 64 \Delta_1{}^2 \Delta_2{}^2 \Delta_3{}^2 . D_1 D_2 D_3 \tag{E}$$

und ebenso

$$r^{12} D^3 = 64 D_1{}^2 D_2{}^2 D_3{}^2 . \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \tag{F}$$

aus welchen beiden Ausdrücken wieder die Relationen (C) und (D) folgen.

Man kann diese Ergebnisse noch allgemeiner fassen, wobei zugleich der eigentliche Grund für die entsprechenden Relationen deutlich hervortritt. Die Gleichungen (1), (2) und (3) sind nichts anderes als die Polargleichungen der Punkte x_1, y_1 u. s. w., wenn man den Kreis als Directrix betrachtet. Da es nun für den Verlauf der Rechnung ganz gleichgültig ist, ob diese Punkte auf dem Kreise liegen oder nicht, so gelten die angegebenen Relationen überhaupt für solche zwei Dreiecke, von denen die Seiten des einen die Ecken des anderen zu Polen haben. Betrachtet man nicht einen Kreis, sondern eine Ellipse oder Hyperbel mit den Halbaxen a und b, so ändert sich die in (C) ausgesprochene Relation nicht; die übrigen gehen aber in folgende über:

$$D = \frac{a^2 b^2 \Delta^2}{4 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}, \tag{A'}$$

$$\Delta = \frac{a^2 b^2 D^2}{4 D_1 D_2 D_3}, \tag{B'}$$

$$a^4 b^4 \Delta D = 16 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 D_1 D_2 D_3, \tag{D'}$$

$$a^6 b^6 \Delta^3 = 64 \Delta_1{}^2 \Delta_2{}^2 \Delta_2{}^2 D_1 D_2 D_3, \tag{E'}$$

$$a^6 b^6 D^3 = 64 D_1{}^2 D_2{}^2 D_3{}^2 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3. \tag{F'}$$

Für die Parabel lassen sich sehr leicht die entsprechende Ausdrücke finden. Bezeichnet man mit λ (l) die Summe oder Differenz der Abstände zweier Punkte von der Axe der Parabel, jenachdem dieselben auf verschiedenen oder auf derselben Seite der Axe liegen, so hat man, unter p den Parameter der Parabel verstanden:

$$D=\frac{p\varDelta^2}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}; \tag{A''}$$

$$\varDelta=\frac{pD^2}{l_1 l_2 l_3}; \tag{B''}$$

$$\frac{\varDelta^3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}=\frac{D^3}{l_1 l_2 l_3}; \tag{C''}$$

$$p^2\varDelta D=\lambda_1\lambda_2\lambda_3 l_1 l_2 l_3; \tag{D''}$$

$$p^3\varDelta^3=\lambda_1{}^2\lambda_2{}^2\lambda_3{}^2 l_1 l_2 l_3; \tag{E''}$$

$$p^3D^3=l_1{}^2 l_2{}^2 l_3{}^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \tag{F''}$$

XXVI.

Ueber die Bewegung in den Krümmungen der Eisenbahnen.

Von dem

Herrn Doctor T. Wittstein zu Hannover.

Herr Major Glünder hat in seiner so eben erschienenen interessanten kleinen Schrift: „Abhandlung über die Bewegungshindernisse in den Krümmungen der Eisenbahnen" (Hannover bei Hahn) die bei diesem Gegenstande eintretenden Beziehungen mit einer Klarheit und Umsicht entwickelt, dass dieselbe mit Recht allen betreffenden Technikern zur Kenntnissnahme empfohlen werden kann. Wenn wir nun dessen ungeachtet den genannten Gegenstand hier noch einmal einer Betrachtung unterwerfen, so haben wir dabei mehr einen rein mathematischen Zweck. Der Verfasser jener Schrift hat sich nämlich sogleich von vorn herein bei seiner mathematischen Grundlegung mehrfache Abweichungen von der mathematischen Strenge gestattet, welche, wenn sie auch vielleicht für die Ausübung ohne Belang sein mögen, dennoch bei dem Leser das Gefühl einer Unsicherheit

hervorbringen, für welche keinerlei Art von Massstab gegeben wird. Es scheint uns aber vielmehr, es müsse jede derartige, ein Problem der Praxis behandelnde Theorie, so lange sie sich auf rein mathematischem Boden hält, überall mit vollkommener Strenge zu Werke gehen und ihre Endresultate als völlig scharf, oder wenigstens mit Angabe der Fehlergränzen, der Praxis überliefern. Dieser mag es sodann überlassen bleiben, sich in ihren Ausführungen mehr oder weniger, so weit sie es für gut findet, von dem Ergebnisse der Theorie zu entfernen.

Wir werden deshalb, den Entwickelungsgang der genannten Schrift verlassend, den Gegenstand hier unter eine neue Auffassung zu bringen versuchen, von welcher wir hoffen, dass sie eben so wenig an Einfachheit, als an Strenge, zu wünschen übrig lasse.

§. 1.

Unsere Betrachtung wird sich auf die Bewegung eines einzigen Räderpaares beschränken, welches fest auf seiner Achse sitzt. Wir nehmen ferner an, die Räder seien konisch gestaltet, so dass die Erweiterungen der rollenden Oberflächen beider Räder einen Doppelkegel $MPNQ$ (Taf. VII. Fig. 1.) bilden, welchen man sich durch Umdrehung des gleichschenkligen Dreiecks MQN um seine Basis MN als Achse entstanden denken kann. Endlich setzen wir die Schienen als Cylinder voraus, welche von dem rollenden Doppelkegel in A und B berührt werden, da in der Praxis wenigstens derjenige Theil der gebräuchlichen Ω-Schienen, welcher mit den Rädern in Berührung kommt, cylindrisch abgerundet zu sein pflegt.

Wir stellen dieser Auffassung sogleich noch eine andere zur Seite, welche sich durch die Rechnung bequemer handhaben lässt. Statt des gleichschenkligen Dreiecks MQN (Taf. VII. Fig. 1.) denken wir uns einen Kreisbogen MQN (Taf. VII. Fig. 2.), dessen Mittelpunkt in D liegt, um seine Sehne MN als Achse gedreht, und den also entstandenen Körper als rollend auf cylindrischen Schienen, die er in A und B berührt. Wir stellen hier mithin an die Praxis die Forderung, dass die Radkränze nicht rein konisch, sondern auch im Sinne der Achse gekrümmt seien, d. h. dass man sich dieselben nicht sowohl durch Rotation einer geraden Linie um eine andere, als vielmehr durch Rotation eines Kreisbogens um seine Sehne entstanden zu denken habe.

Wie wenig übrigens dieser letzte Unterschied, bei der üblichen geringen Breite der Radkränze, für die Praxis von Belang ist: davon kann man sich durch eine leichte Rechnung überzeugen. Es sei der Abstand $AB=58$ Zoll Engl. (s. die Glündersche Abhandlung) und die Tangente der Neigung der konischen Radkränze, welche man sich als berührend in A und B zu denken hat, gegen die Radachse betrage $1/7$, so entspricht dieser berührenden Linie ein Kreisbogen MQN, dessen Halbmesser $AD=BD=205,06$ Zoll hält. Die Abweichung dieses Kreisbogens von seiner Tangente aber, in der Richtung des Halbmessers gemessen, beträgt für 1 Zoll Entfernung vom Berührungspunkte nicht völlig 0,03 Linien, eine Grösse, deren Vorhandensein bei der Art, wie die Räder angefertigt werden, schwerlich noch wird verbürgt werden

können. Diese Abweichung wird aber noch kleiner dadurch, dass man den Rädern in der Regel nur einen geringern Spielraum als 1 Zoll zu beiden Seiten der Mitte verstattet; sie nimmt nämlich im quadratischen Verhältnisse dieses Spielraums ab. Dazu kommt, dass die Abnutzung der Räder nach einer kurzen Zeit ihres Gebrauchs schon viel beträchtlicher ist, wovon man sich sofort durch den blossen Augenschein überzeugen kann; und es wird mithin für die Bedürfnisse der Praxis zuverlässig keinen Unterschied machen, ob wir von vorn herein rein konische Räder voraussetzen, oder Räder, deren rollende Oberflächen auch im Sinne der Achse eine Krümmung von der angegebenen Stärke besitzen.

§. 2.

Es ist jetzt ohne Mühe zu übersehen, dass wenn man den Körper $MPNQ$ (Taf. VII. Fig. 1. und 2.) so in A und B auf die Schienen legt, dass seine Achse MN eine Neigung gegen den Horizont besitzt, ein Gleichgewicht im Allgemeinen nicht eintreten könne. Denn es sei C der Schwerpunkt, in welchem das Gewicht des Körpers $CG = g$ (die Masse $= 1$ gesetzt) vertikal abwärts wirkt, so erzeugen sich durch den Druck auf die Unterlagen in A und B zwei Normal-Widerstände in den Richtungen AD und BD, welche, wie auch ihre Grösse sein mag, sich zu einer Resultante vereinigen lassen, die durch den Punkt D geht. Soll nun Gleichgewicht bestehen, so muss diese Resultante dem Gewichte CG das Gleichgewicht halten, welches nur möglich ist, wenn der Punkt D in der durch den Schwerpunkt C gezogenen Vertikallinie liegt; in jedem andern Falle wird sich statt des gesuchten Gleichgewichts ein Kräftepaar ergeben, welches den Körper durch Drehung um eine auf der Ebene ABD normale Achse in die Gleichgewichtslage zu bringen strebt.

Von der Reibung auf den Schienen in A und B, welche den ruhenden Körper in einer andern als der angegebenen Gleichgewichtslage festzuhalten im Stande sein würde, kann hier völlig abgesehen werden. Denn da der Körper dazu bestimmt ist, fortzurollen, so wird er, von jener Reibung nicht gehindert, rollend jederzeit von selbst die genannte Gleichgewichtslage annehmen.

Nun liegt allerdings der Schwerpunkt eines Eisenbahnfuhrwerkes niemals in der Mitte C der Radachse, sondern oberhalb derselben in irgend einem andern Punkte der Linie PQ, und es könnte sich demnach treffen, dass dieser Schwerpunkt genau mit dem Punkte D (Taf. VII. Fig. 2.) zusammenfiele. In diesem Falle würde Gleichgewicht bestehen, welche Neigung man auch der Achse MN geben wollte. Es könnte ferner der Schwerpunkt **über** D fallen, wo sodann eine vorhandene Neigung der Radachse das Bestreben haben würde, sich noch zu vergrössern. Beide Fälle aber will man in der Praxis, wo ein stabiles Gleichgewicht gefordert wird, nicht haben, folglich ergiebt sich die Regel:

> **die Neigung der Radkränze stets so gering zu wählen, dass der Mittelpunkt D des Bogens MQN merklich höher liegt, als der Schwerpunkt des Fuhrwerks.**

So hat man in dem oben §. 1. gegebenen Beispiele $DH =$ 203 Zoll $=$ 16 Fuss 11 Zoll, welche Grösse sicher in allen Fällen die Höhe des Schwerpunkts in einem Eisenbahnfuhrwerke um ein beträchtliches übertrifft, so dass mithin die Praxis, so wie sie von de Pambour ausgeht, schon unwillkührlich durch den ihr eigenen sicheren Takt das Richtige getroffen hat.

Allgemein sei die grösste Höhe, welche der Schwerpunkt eines Eisenbahnfuhrwerks annehmen kann, von der unveränderlichen Horizontalen AB (Taf. VII. Fig. 2.) aus gerechnet $= h$, und die halbe Breite der Bahn $AH = BH = e$, so muss die Tangente der Neigung der Radkränze gegen die Radachse immer geringer sein als der Bruch $\frac{e}{h}$; oder wenn man diesen Neigungswinkel, welcher mit dem Winkel $ADE = BDE$ übereinstimmt, mit ε, und den Halbmesser $AD = BD$ mit r bezeichnet, so kann man die obige Regel auf die beiden Bedingungen reduciren:

$$\operatorname{tg} \varepsilon < \frac{e}{h}, \; r > \sqrt{e^2 + h^2} \qquad (1)$$

wo die Grössen ε und r durch die Gleichung $r \sin \varepsilon = e$ an einander gebunden sind.

In Taf. VII. Fig. 1. sind die genannten Beziehungen nicht mit der nämlichen Evidenz zu erkennen, weil hier der Punkt D seinen Ort verändert; indessen nimmt man ohne Mühe wahr, dass die aufgestellte Regel auch hier das Gleichgewicht stets zu einem stabilen machen wird, während eine Ueberschreitung dieser Regel dem Eintreten des nicht stabilen Gleichgewichts wenigstens schon sehr nahe führt.

§. 3.

Aus den bisherigen Andeutungen geht sofort hervor, dass eine geneigte Lage der Achse MN (Taf. VII. Fig. 1. u. 2.) stets nur dadurch dauernd hergestellt werden kann, dass zu den vorhandenen Kräften noch eine neue in geeigneter Weise hinzutritt. Es sei diese Kraft die horizontal wirkende und im Schwerpunkte C angebrachte $CF = f$, so wird jetzt Gleichgewicht vorhanden sein, sobald die Resultante aus f und g in ihrer Verlängerung den Punkt D trifft, d. h. sobald man hat

$$\frac{f}{g} = \operatorname{tg} CDE \qquad (2)$$

wobei jedoch die Beschränkung zu machen ist, dass Winkel CDE $<$ W. ADE bleiben muss, wenn nicht der Körper aus seiner Bahn gehoben werden soll. — Die Frage aber, woher diese Kraft? und wozu überhaupt eine Neigung der Achse gegen den Horizont? führt uns nun zu dem eigentlichen Gegenstande unserer Untersuchung.

Wenn bei geneigter Lage der Achse MN der Körper $MPNQ$ durch die Kraft der Locomotive auf den Schienen vorwärts getrie-

ben wird, so kommen nur Punkte zweier Kreisperipherien fortwährend mit den Schienen in Berührung, deren Durchmesser AA' und BB' sind. Man kann zur Erleichterung der Auffassung diese beiden Kreisperipherien als angehörig einem rollenden Kegel ansehen, dessen Spitze in T liegt *).

Ist nun die Bahn geradlinig, so wird allen Punkten der Achse MN die nämliche Linear-Geschwindigkeit ertheilt; folglich muss, wenn der grössere Kreis AA' eine rein wälzende Bewegung annimmt, der kleinere Kreis BB' einen Theil seines Weges gleitend oder schleifend zurücklegen; oder umgekehrt, wenn etwa der kleinere Kreis BB' eine rein wälzende Bewegung besitzt, so wird der grössere Kreis eine rückwärts gleitende Bewegung annehmen müssen. Indessen, da in diesem Falle, wenn man von zufälligen Einwirkungen absieht, das Gleichgewicht eine horizontale Stellung der Achse erfordert, so wird der fortrollende Körper sehr bald von selbst diese Lage annehmen, mithin ein Gleiten des einen oder des andern Rades und folglich auch das daraus entstehende Bewegungshinderniss nicht weiter stattfinden.

Anders dagegen verhält sich die Sache in Bahnkrümmungen. Hier darf nicht mehr jeder Punkt der Achse MN die nämliche Linear-Geschwindigkeit besitzen, sondern die Geschwindigkeiten verschiedener Punkte derselben müssen sich verhalten wie ihre horizontalen Abstände vom Krümmungsmittelpunkte der Bahn, und es wird nicht nur bei horizontaler Lage der Achse, sondern im Allgemeinen auch bei einer willkührlichen Neigung derselben, das eine oder das andere Rad einen Theil seines Weges entweder vorwärts oder rückwärts gleitend zurücklegen müssen, folglich ein Bewegungshinderniss eintreten. Nur Eine bestimmte Neigung der Achse giebt es, bei welcher beide Räder eine rein wälzende Bewegung annehmen. Soll dieser Fall nämlich eintreten, so müssen die Geschwindigkeiten der Mittelpunkte der Kreisperipherien

---

*) Dieser rollende Kegel hat einen Recensenten der Glünderschen Abhandlung in der Eisenbahn-Zeitung (Stuttgart. 1846. 12. Juli) zu so seltsamen Missdeutungen geführt, dass wir uns nicht enthalten können, die Leser des Archivs auf dieses Curiosum aufmerksam zu machen. Daraus nämlich, dass (wie sich sogleich zeigen wird) bei Neigung der Achse MN Schwere und Centrifugalkraft einander aufheben sollen, schliesst der gelehrte Recensent weiter, dass „der ganze Kegel (ATA') zufolge der Schwerkraft ein Bestreben haben muss, sich nach der Richtung seiner Achse fortzubewegen, welches Bestreben dann auch in wirkliches Fortschieben auf horizontaler Ebene übergehen muss, sobald die Drehung des Kegels, mithin die Centrifugalkraft, wegfällt. Also muss hiernach jeder Kegel, wenn seine Achse nur die erforderliche Neigung hat, zufolge der Schwerkraft sofort zu rutschen beginnen, sobald man ihn mit der Seite auf eine horizontale Ebene legt! Dieser frappante Satz würde wahrlich ein Perpetuum mobile der einfachsten Natur möglich machen, was sich ganz besonders zum Ziehen von Lasten auf horizontalen Wegen eignen dürfte."

Dass sich der geistreiche Recensent (der wohlweislich seinen Namen verschweigt) noch über manches andere wundert, was die Glündersche Schrift enthält, wird man nach dieser Probe leicht erklärlich finden. Eine Kritik erscheint uns, einem so groben Unverstande gegenüber, als völlig überflüssig.

AA' und BB' sich verhalten wie diese Kreisperipherien selbst, letztere aber verhalten sich wieder wie ihre Abstände von der Spitze T des schon gedachten Kegels; folglich muss die Kegelspitze T in einerlei Vertikallinie mit dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn liegen, oder mit andern Worten, es muss die Sache so angesehen werden können, als ob der Kegel ATA' eine rein wälzende Bewegung annimmt, bei welcher seine Spitze T unverrückt liegen bleibt.

Zur Herstellung der für diese Verhältnisse erforderlichen Neigung der Achse MN bietet sich nun die Centrifugalkraft dar. Es sei demnach jetzt $CF=f$ die Centrifugalkraft des Punktes C, seine Geschwindigkeit in der Bahn $=v$, und sein Krümmungshalbmesser $TU=\varrho$, so hat man bekanntlich (die Masse des Körpers $MPNQ$ wie oben $=1$ setzend)

$$f=\frac{v^2}{\varrho},$$

wodurch sich die obige Gleichgewichtsbedingung (2) umwandelt in

$$\left.\begin{aligned} \frac{v^2}{g\varrho} &= \operatorname{tg} CDE \\ v &= \sqrt{g\varrho \operatorname{tg} CDE} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Da in dieser Gleichung die Grössen ϱ und CDE nicht unabhängig von einander sind, indem mit dem Wachsen der einen die andere abnimmt, so giebt es mithin

> bei jeder gegebenen Krümmung der Bahn nur Eine bestimmte Geschwindigkeit, bei welcher beide Räder eine rein wälzende Bewegung annehmen.

Jede andere Geschwindigkeit, sie sei kleiner oder grösser als die genannte, bringt mithin dasjenige Bewegungshinderniss hervor, welches aus einem theilweisen Schleifen des einen oder des andern Rades entsteht; und zwar übersieht man ohne Mühe, dass dieses Bewegungshinderniss desto grösser ausfallen wird, je mehr man sich nach der einen oder andern Seite hin von jener Geschwindigkeit entfernt.

§. 4.

Für die Praxis ist es von Wichtigkeit, die so eben näher bezeichnete Geschwindigkeit, welche wir zur Abkürzung die Normal-Geschwindigkeit nennen wollen, für eine gegebene Bahnkrümmung ermitteln zu können. Wir gelangen dazu durch folgende Rechnungen, bei deren Herleitung wir uns auf Taf. VII. Fig. 2. beschränken.

Es sei die Neigung der Achse MN gegen den Horizont oder der Winkel $MTA=\varphi$, so hat man in Taf. VII. Fig. 2. auch $CDE=\varphi$, folglich aus (3)

$$v=\sqrt{g\varrho \operatorname{tg}\varphi} \quad (4)$$

oder, da $\varrho \operatorname{tg} \varphi = CU$ ist:

$$v = \sqrt{g . CU}. \tag{5}$$

Hieraus aber erhalten wir leicht eine angenäherte Bestimmung von v, welche für alle Verhältnisse, die die Praxis bietet, vollkommen zureichend sein wird. Der Winkel φ nämlich muss nach dem Obigen stets merklich kleiner bleiben als $ADE = \varepsilon$, wenn das Fuhrwerk nicht in Gefahr gerathen soll, über den Berührungspunkt A hinweg aus der Bahn geschleudert zu werden; und da man diesen Winkel ε nach §. 2. schon möglichst klein zu wählen hat, so wird um so mehr der Winkel φ klein bleiben und kaum jemals die Grösse von 1 oder 2 Graden übersteigen dürfen. Unter der Voraussetzung also, dass man mit einer hinreichend geringen Anzahl von Decimalstellen rechnet, machen wir jetzt die Annahme, der Winkel φ sei so klein, dass man ohne bemerkbaren Einfluss

$$\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \varphi \text{ und } \cos \varphi = 1$$

setzen dürfe. In den Anwendungen hat man alsdann, sobald der Winkel φ gefunden ist, jedesmal sofort ein Mittel in Händen, um über den Grad der Genauigkeit der gefundenen Resultate zu urtheilen.

Es sei nun c der **mittlere Halbmesser** der Räder, d. h. diejenige Grösse, in welche die Halbmesser der Kreise AA' und BB' bei Horizontalstellung der Achse MN übergehen; und es sei ferner die Länge $CD = p$, so hat man

$$DH = p \cos \varphi + CU = p + c,$$

folglich, wegen $\cos \varphi = 1$:

$$CU = c,$$

und aus (5)

$$v = \sqrt{gc}. \tag{6}$$

Diese Gleichung schliesst den beachtenswerthen Satz in sich:

> **dass für die in der Praxis vorkommenden Gränzen die Normal-Geschwindigkeit, bei welcher beide Ränder eine rein wälzende Bewegung annehmen, als unabhängig von dem Krümmungshalbmesser, und mithin für die ganze Bahn als constant anzusehen ist.**

Das einzige bestimmende Element, aus welchem die Normal-Geschwindigkeit gefunden wird, ist demnach der mittlere Radhalbmesser; und setzt man diesen, wie gewöhnlich, $= 1\frac{1}{2}$ Fuss Engl., während $g = 32{,}2$ Fuss Engl. ist, so erhält man

$$v = 6{,}95 \text{ Fuss}$$

als diejenige Geschwindigkeit, mit welcher eine Bahn ihrer ganzen Erstreckung nach, welche Krümmungen sie auch bilden mag,

befahren werden kann, ohne dass ein Schleifen des einen oder des andern Radkranzes auf den Schienen eintreten wird.

Die Grösse der Neigung φ, welche der so eben gefundenen Normal-Geschwindigkeit entspricht, bestimmt man nun ohne Mühe aus der jedesmaligen Grösse des Krümmungshalbmessers. Die oben gegebene Gleichung $\varrho \operatorname{tg} \varphi = CU$ verwandelt sich nämlich jetzt, nach den geschehenen Voraussetzungen, in

$$\varrho\varphi = c,$$

woraus

$$\varphi = \frac{c}{\varrho}; \qquad (7)$$

und diese Gleichung zeigt, dass man, mit Beibehaltung des obigen Werthes von c, selbst noch für einen Krümmungshalbmesser $\varrho = 50$ Fuss einen Werth von φ erhält, nämlich

$$\varphi = 0{,}03, \text{ d. i. 1 Grad 43 Min.},$$

für welchen man $\cos\varphi = 1$ und $\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = \varphi$ setzen darf, ohne einen Fehler zu begehen, der die Grösse von einer halben Einheit der dritten Decimalstelle erreicht; eine für alle Anwendungen zureichende Genauigkeit. Noch mehr verringert sich offenbar dieser Fehler für grössere Krümmungshalbmesser; so z. B. für $\varrho = 300$ Fuss würde man nur haben

$$\varphi = 0{,}005, \text{ d. i. 17 Min.}$$

Es ist zu bemerken, dass ein gegebener Krümmungshalbmesser sich stets auf die Mitte H der Bahn zu beziehen pflegt, während in den vorliegenden Rechnungen dieser Krümmungshalbmesser stets auf den Punkt U bezogen wurde; doch ist der Unterschied zwischen den Werthen TU und TH, nämlich $UH = p\varphi$, welcher höchstens einige Zoll betragen kann, so gering, dass er im Vergleich mit dem ganzen Krümmungshalbmesser ohne bemerkbaren Einfluss vernachlässigt werden darf.

Schliesslich bleibt uns noch eine Grösse zu bestimmen, die für die Praxis von Wichtigkeit ist, nämlich die Grösse derjenigen Verschiebung, welche der Körper $MPNQ$ auf den Schienen zu erleiden hat, wenn die Achse aus der horizontalen in die so eben festgestellte geneigte Lage übergehen soll. Diese Verschiebung wird nämlich unmittelbar durch den Bogen QE ausgedrückt, und setzen wir denselben $= m$, so erhalten wir unter der Voraussetzung, dass der Halbmesser $AD = BD = r$ bekannt sei,

$$m = r\varphi = r \cdot \frac{c}{\varrho}. \qquad (8)$$

Nun ist es für die Praxis von Belang, dass diese Verschiebung möglichst gering ausfalle, weil davon die nöthige Breite der Räder abhängt. Da dieselbe sich nun hier als abhängig von dem Halbmesser r zeigt, dieser aber wieder, bei gegebener Bahnbreite, durch den Neigungswinkel ε der Radkränze gegen die Radachse bedingt wird, so ergiebt sich die praktische Forderung:

die Neigung der Radkränze stets so gross zu wählen, dass die Verschiebung m der Räder auf den Schienen eine gewisse gegebene Grösse nicht übersteigt.

Diese Forderung tritt mithin als Ergänzung zu der im §. 2. aufgestellten Regel hinzu, und beide zusammen genommen schliessen erst die Neigung der Radkränze in zwei Gränzen ein, deren numerische Werthe zu bestimmen indessen der Praxis überlassen bleiben muss.

Um ein erläuterndes Beispiel hinzuzufügen, so haben wir oben unter der Annahme $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1}{7}$ gefunden $r = 205{,}06$ Zoll, und daraus ergiebt sich für einen Krümmungshalbmesser $\varrho = 300$ Fuss beim Eintritt der Normal-Geschwindigkeit eine Verschiebung

$$m = 1{,}0253 \text{ Zoll.}$$

Betrachtet man diese Verschiebung, die nur um ein Geringes die Grösse von 1 Zoll übertrifft, als die äusserste, welche man einem Rade von der üblichen Breite von 3 Zoll noch auferlegen darf, so folgt, dass für Radkränze von $\frac{1}{14}$ Neigung der Krümmungshalbmesser von 300 Fuss eine Gränze abgiebt, unter welche man bei Anlegung einer Eisenbahn nicht hinabgehen darf. Wenn es aber erlaubt ist, die Neigung der Radkränze grösser anzunehmen, als sie durch die Gleichung $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1}{7}$ bestimmt wird, ohne dass man zu befürchten hat, dass der Mittelpunkt D des Bogens MQN der höchsten möglichen Lage des Schwerpunkts in einem Eisenbahnfuhrwerke zu nahe rückt oder gar darunter fällt, so werden unter Voraussetzung derselben äussersten Verschiebung auch noch geringere Krümmungshalbmesser für die Bahn zulässig sein.

Allgemein findet man **als die äusserste zulässige Gränze für die Grösse des Krümmungshalbmessers** aus der Gleichung (8)

$$\varrho = \frac{r}{m} \cdot c, \tag{9}$$

indem man hierin für m und r gleichfalls ihre äussersten zulässigen Werthe setzt.

§. 5.

Die bisher entwickelten Gesetze enthalten insofern noch keine den Forderungen der Praxis vollkommen genügende Theorie, als die oben gefundene Normal-Geschwindigkeit $v = 6{,}95$ Fuss, welche sich nur durch Vergrösserung der Radhöhe noch etwas erhöhen lässt, bei weitem nicht diejenige Geschwindigkeit erreicht, mit welcher durchschnittlich die Eisenbahnen pflegen befahren zu werden. Diese Geschwindigkeit beträgt nämlich bei voller Kraft der Maschine 30 Fuss und darüber, und vermindert sich nur in der Nähe der Haltstellen; es wird demnach in der Wirklichkeit im Allgemeinen nicht vermieden werden können, dass dasjenige Bewegungshinderniss, welches aus einem theilweisen Schleifen des einen oder des andern Rades auf seinen Schienen entspringt, in beträchtlicher Grösse sich einstelle, worüber weitere Rechnung zu

führen wir uns hier versagen wollen, indem wir auf die Glünder'sche Abhandlung verweisen.

Zugleich aber zeigt sich noch ein zweiter Uebelstand. Jener in der Wirklichkeit vorhandenen grössern Geschwindigkeit entspricht nämlich auch eine stärkere Neigung der Radachse gegen den Horizont, und folglich auch eine stärkere Verschiebung der Räder auf den Schienen, welche Verschiebung aber, bei einem nach den bisherigen Gesetzen construirten Fuhrwerke, keineswegs in allen Fällen sich noch wird ausführen lassen. Aus (3) erhält man nämlich, indem man wie bisher $\operatorname{tg} CDE = \operatorname{tg}\varphi = \varphi$ setzt,

$$\varphi = \frac{v^2}{g\varrho},$$

und da wir jetzt nicht mehr die Annahme machen, es sei v identisch mit der oben sogenannten Normalgeschwindigkeit, so fällt auch nicht mehr die Kegelspitze T in einerlei Vertikallinie mit dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn, man darf nicht mehr TU mit dem Krümmungshalbmesser der Bahn verwechseln, d. h. $\varrho\varphi = c$ setzen, sondern die Gleichung (8) zur Bestimmung der Grösse $QE = m$ der Verschiebung der Räder auf den Schienen nimmt jetzt die Gestalt an:

$$m = r\varphi = \frac{rv^2}{g\varrho}, \tag{10}$$

woraus man sodann umgekehrt **als die äusserste zulässige Gränze für die Grösse des Krümmungshalbmessers** statt (9) erhält

$$\varrho = \frac{rv^2}{mg}, \tag{11}$$

wenn man hierin für m, r und v gleichfalls ihre äussersten zulässigen Werthe setzt.

Es sei zum Beispiel die äusserste zulässige Verschiebung $m = 1$ Zoll, ferner $v = 30$ Fuss, so erhält man mit Beibehaltung der übrigen Zahlen, so wie sie eben benutzt wurden,

$$\varrho = 5731 \text{ Fuss}$$

als denjenigen Werth des Krümmungshalbmessers, unter welchen hinab bei der Anlage der Eisenbahn nicht gegangen werden darf. Diese Gränze lässt sich allerdings noch dadurch etwas hinabdrücken, dass man die Neigung der Radkränze vergrössert (wodurch r kleiner wird); aber sie wird sofort wieder zunehmen, sobald die Bahn mit noch grössern Geschwindigkeiten als 30 Fuss befahren werden soll, so dass wir nicht zu weit gehen werden, wenn wir in runder Zahl 6000 Fuss als niedrigste Gränze für die Grösse des Krümmungshalbmessers unter den hier vorausgesetzten Verhältnissen annehmen.

Beide Uebelstände zusammengenommen, nämlich:

1) dass man es bei den üblichen bedeutenden Geschwindigkeiten niemals in seiner Gewalt hat, in den Bahnkrümmungen eine rein wälzende Bewegung beider Räder her-

zustellen, sondern immer durch theilweises Schleifen des einen oder andern Rades ein mehr oder weniger bedeutendes Bewegungshinderniss eintritt; so wie

2) dass selbst bei Zulassung dieses Bewegungshindernisses dennoch wegen der bedeutenden Verschiebung, welche die Räder auf den Schienen erfordern würden, stärkere Bahnkrümmungen als solche mit 6000 Fuss Halbmesser gar nicht zugelassen werden dürfen;

haben es von grosser Wichtigkeit erscheinen lassen, eine Anordnung zu erdenken, bei welcher diese Uebelstände entweder ganz oder wenigstens theilweise wegfallen. Diese Anordnung besteht aber in der **Erhöhung der äussern Schienenreihe**, und es bleibt uns mithin jetzt noch zu untersuchen übrig, wie bei dieser Abänderung in den bisherigen Voraussetzungen die Bewegung in den Bahnkrümmungen sich gestaltet.

§. 6.

Nehmen wir also jetzt an, es sei die Linie AB, welche die Berührungspunkte zwischen Räder und Schienen mit einander verbindet, nicht mehr horizontal wie in Taf. VII. Fig. 2., sondern um den Winkel $ATK = \omega$, Taf. VII. Fig. 3, gegen den Horizont geneigt; alsdann wird die Neigung der Achse MN gegen den Horizont gemessen durch den Winkel $MTK = \varphi + \omega$, indem $MTA = \varphi$ wie früher denjenigen Winkel bezeichnet, welchen die Achse MN mit der Linie AB einschliesst. Die Richtung der Schwere CG steht jetzt rechtwinklig auf TK, und demnach verwandelt sich die Gleichgewichtsbedingung (3) jetzt in

$$\left.\begin{aligned} \frac{v^2}{g\varrho} &= \operatorname{tg} CDO \\ &= \operatorname{tg}(\varphi + \omega) \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

so dass wir statt (4) erhalten

$$v = \sqrt{g\varrho \operatorname{tg}(\varphi + \omega)} \qquad (13)$$

und nehmen wir jetzt an, es liege die Kegelspitze T in einerlei Vertikallinie mit dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn, so wie es zur Erlangung einer rein wälzenden Bewegung beider Räder nothwendig ist, so ist mithin $TV = \varrho$ der Krümmungshalbmesser für den Punkt C, folglich $\varrho \operatorname{tg}(\varphi + \omega) = CV$, so dass statt (5) der Ausdruck für die Normal-Geschwindigkeit wird:

$$v = \sqrt{g . CV}. \qquad (14)$$

Hieraus lässt sich wiederum eine angenäherte, aber für die Praxis völlig genügende Formel herstellen, wenn man der obigen Annahme gemäss nicht nur den Winkel φ, sondern auch den Winkel ω so klein voraussetzt, dass man ohne bemerkbaren Fehler

$$\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = \varphi \text{ und } \cos\varphi = 1,$$

sowie

$$\sin\omega = \operatorname{tg}\omega = \omega \text{ und } \cos\omega = 1$$

setzen könne. Alsdann nämlich wird, indem man gleichzeitig wieder den mittleren Radhalbmesser c einführt,

$$CV = c + \varrho\omega,$$

so dass wir statt der Gleichung (6) jetzt die folgende erhalten:

$$v = \sqrt{g(c + \varrho\omega)}. \tag{15}$$

Hier zeigt sich nun, dass die Normal-Geschwindigkeit **nicht mehr als unabhängig vom Krümmungshalbmesser angesehen werden darf**, sobald man der äussern Schiene eine Erhöhung über die innere Schiene giebt, sondern dass sie zugleich mit dieser Erhöhung und dem Krümmungshalbmesser wächst Man kann hier mithin erreichen — was bei der frühern Anordnung nicht möglich war — dass die Normal-Geschwindigkeit, bei welcher beide Räder eine rein wälzende Bewegung annehmen, jeden beliebigen Werth erhält, wenn man nur ϱ und ω angemessen feststellt; und wenn (wie der Fall in der Praxis vorzuliegen pflegt) diejenige Geschwindigkeit v bekannt ist, mit welcher eine Bahnkrümmung vom Halbmesser ϱ befahren werden soll, so kann man dieselbe zur Normal-Geschwindigkeit in dem hier gebrauchten Sinne des Worts machen, indem man nach (15)

$$\omega = \frac{v^2}{g\varrho} - \frac{c}{\varrho} \tag{16}$$

annimmt. Diese Grösse kann man sodann weiter benutzen, um die lineare Erhöhung des Punktes A über B, oder die Differenz $AK - BL = \delta$ zu bestimmen, wenn die Breite der Bahn $AB = 2e$ bekannt ist; nämlich

$$\delta = 2e\omega. \tag{17}$$

Soll z. B. die Normal-Geschwindigkeit in einer Bahnkrümmung von 300 Fuss Halbmesser 30 Fuss betragen, so hat man, mit Beibehaltung der übrigen Werthe von oben,

$$\omega = 0{,}088, \text{ d. i. } 5 \text{ Grad } 2 \text{ Min.}$$

und daraus

$$\delta = 5{,}10 \text{ Zoll.}$$

Der Winkel ω ist hier so gross ausgefallen, dass die Uebereinstimmung von $\sin\omega$ und $\operatorname{tg}\omega$ mit ω selbst, und von $\cos\omega$ mit der Einheit, nur noch bis auf weniger als eine halbe Einheit der zweiten Decimalstelle verbürgt werden kann; welche Genauigkeit indessen für die Anwendungen noch immer vollkommen ausreichend sein würde, wenn so grosse Erhöhungen überhaupt noch in der Praxis vorkommen könnten, worüber §. 7. das Weitere enthalten wird.

Zugleich aber übersieht man noch aus den gegebenen Formeln, dass wenn alles übrige ungeändert bleibt, ω sowie δ im umgekehrten Verhältnisse des Krümmungshalbmessers sich ändern müssen; mithin z. B. für eine Krümmung von 600 Fuss Halbmesser

$$\omega = 0{,}044, \quad \delta = 2{,}55 \text{ Zoll},$$

für eine Krümmung von 900 Fuss Halbmesser

$$\omega = 0{,}029, \quad \delta = 1{,}70 \text{ Zoll},$$

u. s. f.

Was die Grösse der Verschiebung der Räder auf ihren Schienen betrifft, so wird dieselbe auch hier durch den Bogen $QE = m$ gemessen, und man hat wie oben

$$m = r\varphi.$$

Für den Winkel φ aber erhält man aus (12)

$$\varphi = \frac{v^2}{g\varrho} - \omega, \tag{18}$$

und wenn hier v diejenige Normal-Geschwindigkeit bedeutet, für welche die Krümmung gebauet, d. h. ω bestimmt ist, so giebt die Zuziehung von (16)

$$\varphi = \frac{c}{\varrho},$$

wie in (7), und daraus

$$m = r\varphi = r.\frac{c}{\varrho},$$

wie in (8). Es gelten mithin wieder genau alle diejenigen Folgerungen, welche sich oben im §. 4. an die Gleichungen (7) und (8) angeknüpft haben, und demnach leistet die Erhöhung der äussern Schienenreihe allen den Anforderungen Genüge, welche man an die Bewegungen in Bahnkrümmungen stellen kann. Denn nicht nur ist man jetzt im Stande, für jede gegebene Geschwindigkeit eine Bahn herzustellen, in welcher durchgängig eine rein wälzende Bewegung beider Räder stattfindet, sondern es gilt auch nicht mehr jener Halbmesser von 6000 Fuss als Gränze, welche von der Krümmung der einzelnen Bahnstrecken nicht überschritten werden darf. Im Gegentheil findet man hier wieder **als die äusserste zulässige Gränze für die Grösse des Krümmungshalbmessers** aus (8) den Werth

$$\varrho = \frac{r}{m} . c,$$

wie in (9), wenn man hierin für m und r gleichfalls ihre äussersten zulässigen Werthe setzt; also unter den oben gemachten Voraussetzungen $\varrho = 300$ Fuss.

§. 7.

Wenn eine Bahnkrümmung, in welcher die äussere Schienenreihe eine angemessene Erhöhung gegen die innere erhalten hat, nicht mit derjenigen Normal-Geschwindigkeit befahren wird, für welche sie gebaut, d. h. der Werth von ω festgestellt ist, — ein Fall, der in der Praxis offenbar nicht vermieden werden kann, — so treten hier wieder Betrachtungen in Kraft, ähnlich denjenigen, welche den Gegenstand des §. 5. ausmachen. In diesem Falle werden nämlich nicht mehr beide Räder eine rein wälzende Bewegung annehmen, sondern es wird durch das Schleifen des einen oder des andern Rades auf seinen Schienen das mehrerwähnte Bewegungshinderniss sich einstellen, welches wir, wie schon gesagt, hier nicht weiter der Rechnung unterwerfen. Zugleich wird aber auch die Verschiebung der Räder auf den Schienen, m, eine andere werden, da der Neigungswinkel φ sich ändert; und nennen wir demnach v diejenige von der Normalgeschwindigkeit verschiedene Geschwindigkeit, mit welcher die Bahn befahren werden soll, so haben wir mit Zuziehung der Gleichung (18)

$$m = r\varphi = r\left(\frac{v^2}{g\varrho} - \omega\right) \qquad (19)$$

als die Grösse der einer beliebigen Geschwindigkeit v entsprechenden Verschiebung. Diese Grösse fällt mit (8) zusammen, wenn man für v die Normal-Geschwindigkeit an die Stelle setzt; sie wird Null, wenn v den Werth $v = \sqrt{g\varrho\omega}$ hat, in welchem Falle die Achse MN parallel zu der Basis AB liegt; und endlich kann sie auch negativ werden, und kommt dem Werthe $m = -r\omega$ desto näher, je mehr die Geschwindigkeit sich dem Werthe Null nähert, in welchem letztern Falle die Achse MN horizontal liegt. Alles dieses erhellet auch unmittelbar aus der Betrachtung der Natur der Sache.

Nehmen wir beispielsweise an, die oben vorausgesetzte Bahnkrümmung von 300 Fuss Halbmesser, welche für eine Normal-Geschwindigkeit von 30 Fuss eine Neigung $\omega = 0{,}088$ besitzen muss, solle mit einer Geschwindigkeit von 32 Fuss befahren werden, so ergiebt sich aus (19) die zugehörige Verschiebung

$$m = 3{,}7 \text{ Zoll},$$

dessgleichen wenn dieselbe mit einer Geschwindigkeit von 28 Fuss befahren werden soll, so erhält man die Verschiebung

$$m = -1{,}4 \text{ Zoll},$$

während für die Normal-Geschwindigkeit von 30 Fuss die Verschiebung beträgt

$$m = 1{,}0 \text{ Zoll}.$$

Die, wie dieses Beispiel zeigt, so beträchtlich ausfallenden Differenzen in der Grösse der Verschiebung bei einer so geringen Abweichung von ± 2 Fuss von der Normal-Geschwindigkeit, welche die ursprünglich festgestellte Gränze von $m = \pm 1$ Zoll weit über-

schreiten, machen hier zum Schluss noch eine eigene Untersuchung nöthig, um ihre Ursachen aufzusuchen, und daraus für die Praxis Regeln zur Vermeidung derselben herzuleiten.

Es seien zu dem Ende v und v' irgend zwei Geschwindigkeiten und resp. m und m' die ihnen entsprechenden Verschiebungen, so folgt aus (19)

$$m - m' = r . \frac{v^2 - v'^2}{g\varrho},$$

und lässt man hierin v' die Normal-Geschwindigkeit bedeuten, wodurch m' den Werth

$$m' = r . \frac{c}{\varrho}$$

annimmt, so erhält man

$$m = \frac{r}{\varrho}\left(\frac{v^2 - v'^2}{g} + c\right) \qquad (20)$$

welche Gleichung sofort erkennen lässt, wie die in jedem besondern Falle gegebenen Data auf die Grösse von m von Einfluss sind. Bezeichnet nämlich v die äusserste Geschwindigkeit, mit welcher die der Normal-Geschwindigkeit v' entsprechende Bahnkrümmung noch befahren werden soll, so wird die ihr zugehörige Verschiebung m desto kleiner ausfallen, je kleiner r, d. h. je grösser die Neigung der Radkränze gegen die Radachse ist, und je grösser ϱ angenommen wird. Es zeigt sich hier mithin abermals die Nothwendigkeit, die Neigung der Radkränze so gross wie möglich zu wählen, wodurch der im §. 2. gegebenen Regel eine Gränze gestellt wird. Ist aber die Neigung der Radkränze ein für alle Mal auf ein Aeusserstes festgestellt, so bleibt nur der Krümmungshalbmesser noch das einzige veränderliche Element, und man erhält mithin, sobald durch die Breite der Räder eine äusserste zulässige Grösse der Verschiebung vorgeschrieben ist, jetzt als die äusserste zulässige Gränze für die Grösse des Krümmungshalbmessers aus (20) den Werth

$$\varrho = \frac{r}{m}\left(\frac{v^2 - v'^2}{g} + c\right) \qquad (21)$$

wenn man hierin für m, r und v gleichfalls ihre äussersten zulässigen Werthe an die Stelle setzt.

Da es für v zwei äusserste Werthe giebt, nämlich einen grössten und einen kleinsten, so hat man die Rechnung doppelt zu führen und von den gefundenen beiden Krümmungshalbmessern den grössern beizubehalten. Im allgemeinen wird v' das arithmetische Mittel aus jenen beiden äussersten Geschwindigkeiten sein, in welchem Falle man nur für die grösste Geschwindigkeit die Rechnung durchzuführen braucht; doch ist jenes nicht nothwendig, sondern vielmehr ist es der Praxis angemessener, die am häufigsten vorkommende Geschwindigkeit als Normal-Geschwindigkeit dem Bau der Bahnkrümmungen zum Grunde zu legen.

Es seien zum Beispiel wie oben die äussersten Geschwindigkeiten, mit welcher eine für die Normal-Geschwindigkeit $v' = 30$

Fuss einzurichtende Bahnstrecke noch befahren werden soll, die von 32 und 28 Fuss, und als äusserste Grösse der Verschiebung werde $m=\pm 1$ Zoll festgestellt, so hat man

$$1)\ \varrho=\frac{205{,}06}{+1}\left(\frac{32^2-30^2}{32{,}2}+1{,}5\right)=1097 \text{ Fuss},$$

$$2)\ \varrho=\frac{205{,}06}{-1}\left(\frac{28^2-30^2}{32{,}2}+1{,}5\right)=431 \text{ Fuss};$$

und es dürfen demnach auf der genannten Bahnstrecke **Krümmungshalbmesser unter 1100 Fuss nicht zugelassen werden**, wenn nicht Gefahr entstehen soll, dass der Wagenzug die Schienen verlässt. Und so in ähnlichen Fällen.

Aus diesem Grunde werden also auch sowohl die der Normal-Geschwindigkeit entsprechende Verschiebung, als auch die Erhöhung der äussern Schienenreihe gegen die innere, in der Praxis weit geringer ausfallen, als sie oben im §. 6. beispielsweise berechnet wurden.

XXVII.

In ein gegebenes Dreieck ein ähnliches zu zeichnen, dessen Seiten mit den homologen des ersteren einen gegebenen Winkel φ bilden.

Von dem

Herrn Doctor H. Hoffmann,

Lehrer am Gymnasium zu Danzig.

Diese Aufgabe bietet zwei wesentlich von einander verschiedene Fälle dar; wenn nämlich

I. jede Ecke des einbeschriebenen Dreiecks in der Gegenseite des gleichen Winkels liegt, und wenn

II. jede Ecke des einbeschriebenen Dreiecks in der Gegenseite eines ungleichen Winkels liegt.

I. Erster Fall.

1) Geometrische Auflösung.

§. 1.

Gegeben ist das Dreieck ABC (Taf. VIII. Fig. 1. u. 2.). Man suche den Mittelpunkt, O, des umbeschriebenen Kreises mittels der drei Perpendikel OD, OE, OF in der Mitte der Dreiecksseiten; trage an diese Perpendikel in O den gegebenen Winkel immer nach derselben Seite an, so dass

$$\angle DOa = \angle EOb = \angle FOc = \varphi$$

und verbinde die Schnittpunkte a, b, c mit einander; dann ist Δabc das verlangte Dreieck.

Der Beweis zerfällt in zwei Theile:

1) $\Delta abc \backsim \Delta ABC.$

Da $\angle ObE = \angle OcF = \angle OaD$, so sind die Vierecke

$$ObAc,\ OcBa,\ OaCb$$

Kreisvierecke; zieht man daher noch OA, OB, OC und bedenkt, dass

$$\angle OAE = \angle OCE,\ \angle OBF = \angle OAF,\ \angle OCD = \angle OBD;$$

so hat man:

$$\angle OAC = \angle Oab,\ \angle OBA = \angle Obc,\ \angle OCB = \angle Oca,$$
$$\angle OAB = \angle Oac,\ \angle OBC = \angle Oba,\ \angle OCA = \angle Ocb.$$

Addirt man die unter einander stehenden Gleichungen, so erhält man:

$$\angle CAB = \angle cab,\ \angle ABC = \angle abc,\ \angle BCA = \angle bca;$$
$$\text{d. h. } \Delta ABC \backsim \Delta abc.$$

2) Die Neigung der homologen Seiten ist $= \varphi$ oder

$$\angle(BC, bc) = \angle(CA, ca) = \angle(AB, ab) = \varphi.$$

Aus den eben benutzten sechs Gleichungen folgt auch:

$$\angle Oab = \angle Ocb,\ \angle Obc = \angle Oac,\ \angle Oca = \angle Oba.$$

Schreibt man diese Gleichungen noch folgendermassen darunter:

$$\angle Oba = \angle Oca,\ \angle Ocb = \angle Oab,\ \angle Oac = \angle Obc,$$
$$\angle Obc = \angle Oac,\ \angle Oca = \angle Oba,\ \angle Oab = \angle Ocb;$$

und addirt die unter einander stehenden, so hat man:

$$\angle Oab + \angle abc = \angle bca + \angle Oac = 1R,$$
$$\angle Obc + \angle bca = \angle cab + \angle Oba = 1R,$$
$$\angle Oca + \angle cab = \angle abc + \angle Ocb = 1R.$$

Daher ist O für das Dreieck abc der Höhenpunkt, folglich:

$$\begin{array}{lll} Oa \perp bc, & & OD \perp BC, \\ Ob \perp ca, & \text{aber auch:} & OE \perp CA, \\ Oc \perp ab; & & OF \perp AB; \end{array}$$

da nun nach der Construction

$$\angle DOa = \angle EOb = \angle FOc = \varphi,$$

so ist auch:

$$\angle (BC, bc) = \angle (CA, ca) = \angle (AB, ab) = \varphi.$$

§. 2.

Trägt man den Winkel φ nach der einen Seite (wie in Taf. VIII. Fig. 1.) oder nach der andern Seite (wie in Taf. VIII. Fig. 2.) auf die angegebene Art an, so erhält man das Dreieck abc oder das Dreieck $a'b'c'$. Von diesen beiden Lösungen ist zu bemerken, dass sie congruente Dreiecke liefern; denn aus den congruenten Dreiecken

$$\Delta\, ObE \cong \Delta\, O'b'E',\ \Delta\, OcF \cong \Delta\, O'c'F',\ \Delta\, OaD \cong \Delta\, O'a'D'$$

folgt:

$$Ob = O'b',\ Oc = O'c',\ Oa = O'a';$$

aber es ist auch:

$$\angle bOc = \angle b'O'c',\ \angle cOa = \angle c'O'a',\ \angle aOb = \angle a'O'b';$$

folglich:

$$bc = b'c',\ ca = c'a',\ ab = a'b';$$

d. h. $\Delta\, abc \cong \Delta\, a'b'c'$.

§. 3.

Von den Kreisvierecken

$$ObAc,\ OcBa,\ OaCb$$

ist zu merken, dass die Radien der umbeschriebenen Kreise gleich sind, da nach einem bekannten Satze die Radien der Kreise, welche man durch zwei Ecken und den Höhenpunkt legt, gleich dem Radius des umbeschriebenen Kreises sind. Wendet man dies auf das Dreieck abc und seinen Höhenpunkt O an, so folgt der ausgesprochene Satz.

Für das Dreieck ABC kann man den Satz so aussprechen: Beschreibt man drei Kreise mit gleichen Radien, welche durch den Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises und eine Ecke eines Dreiecks gehen und liegt der Schnittpunkt zweier in einer Dreiecksseite, so liegen auch die andern Schnittpunkte in den Dreiecksseiten.

Oder: Wenn drei Kreise mit gleichem Radius beschrieben werden, von denen jeder durch die Ecke eines Dreiecks geht und der eine die beiden andern in einer Dreiecksseite schneidet, so schneiden sich auch diese in einer Dreiecksseite und alle drei in dem Mittelpunkte des umbeschriebenen Dreiecks.

Das Minimum der Grösse dieser Radien ist der halbe Radius des umbeschriebenen Kreises; von diesem Minimum können sie bis in das Unendliche wachsen.

2) Trigonometrische Auflösung.

§. 4.

Da die Neigung der homologen Seiten $=\varphi$ ist, so ist

$$\angle Abc = C+\varphi,\ \angle Bca = A+\varphi,\ \angle Cab = B+\varphi$$

und

$$\angle Bac = C-\varphi,\ \angle Cba = A-\varphi,\ \angle Acb = B-\varphi.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$Ac = \frac{bc}{\sin A}\sin(C+\varphi),\ Ba = \frac{ca}{\sin B}\sin(A+\varphi),\ Cb = \frac{ab}{\sin C}\sin(B+\varphi)$$

und

$$Bc = \frac{ac}{\sin B}\sin(C-\varphi),\ Ca = \frac{ba}{\sin C}\sin(A-\varphi),\ Ab = \frac{cb}{\sin A}\sin(B-\varphi).$$

Da aber $\frac{bc}{\sin A} = \frac{ac}{\sin B} = \frac{ab}{\sin C}$ ist, so erhält man durch Addition

$$AB = \frac{ab}{\sin C}(\sin(C+\varphi)+\sin(C-\varphi)),\quad BC = \frac{bc}{\sin A}(\sin(A+\varphi)+\sin(A-\varphi)),$$
$$= 2ab\cos\varphi \qquad\qquad = 2bc\cos\varphi$$

$$AC = \frac{ac}{\sin B}(\sin(B+\varphi)+\sin(B-\varphi));$$
$$= 2ac\cos\varphi$$

also

$$ab = \frac{AB}{2\cos\varphi},\ bc = \frac{BC}{2\cos\varphi},\ ac = \frac{AC}{2\cos\varphi}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Ausdrücke für die Abschnitte der Seiten des Dreiecks ABC, so erhält man:

$$Ac=\frac{AB\sin(C+\varphi)}{2\sin C\cos\varphi},\quad Ba=\frac{BC\sin(A+\varphi)}{2\sin A\cos\varphi},\quad Cb=\frac{CA\sin(B+\varphi)}{2\sin B\cos\varphi};$$

$$Bc=\frac{AB\sin(C-\varphi)}{2\sin C\cos\varphi},\quad Ca=\frac{BC\sin(A-\varphi)}{2\sin A\cos\varphi},\quad Ab=\frac{CA\sin(B-\varphi)}{2\sin B\cos\varphi}.$$

Setzt man in die gefundenen Ausdrücke statt φ den Winkel $360-\varphi$, so ändern sich die Seiten ab, bc, ac nicht, dagegen gehen die Abschnitte der Seiten AB, BC, AC in einander über. Für $\varphi=0$ fallen beide Lösungen zusammen. In diesem Falle ist das einbeschriebene Dreieck ein Minimum und halbirt mit seinen Ecken die Seiten des Dreiecks ABC.

II. *Zweiter Fall.*

1) Geometrische Auflösung.

§. 5.

Die Auflösung des ersten Falles beruht wesentlich auf der Eigenschaft des Höhenpunktes und des Mittelpunktes des umbeschriebenen Kreises; hier sollen die Eigenschaften eines anderen Punktes benutzt werden, der wie jene als Schnittpunkt dreier Kreise definirt werden kann.

Beschreibt man (Taf. VIII. Fig. 3.) über AB als Sehne einen Kreis, der in A die AC, und über BC einen Kreis, der in B die AB berührt; zieht dann die Scheitellinien OA, OB, OC, so ist

$$\angle OAC=\angle OBA=\angle OCB=x;$$

es wird daher auch ein Kreis, der durch A, O und C gelegt wird, die BC in C berühren.

Es werden sich also drei Kreise, welche durch zwei Ecken eines Dreiecks beschrieben werden und von denen jeder in einer andern Ecke eine andere Dreiecksseite berührt, in einem Punkte O schneiden, der innerhalb des Dreieckes liegt. Dieser Punkt O hat die Eigenschaft, dass die Scheitellinien, die sich in ihm schneiden, mit je einer Dreiecksseite gleiche Winkel bilden.

In jedem Dreiecke hat man zwei Punkte der angegebenen Eigenschaft, O und O' (Taf. VIII. Fig. 4.), deren gleiche Winkel eine Wechsellage haben und unter sich gleich sind.

Um dieses zu beweisen, wollen wir uns eines allgemeinen Satzes bedienen, dessen Beweis hier folgen soll, weil dieser Satz zwar in C. Adam's: Die merkw. Eig. d. geradl. Dr. (S. VI.) vorkommt, aber in einer andern Form ausgesprochen ist. Dieser Satz heisst:

Schneiden sich drei Scheitellinien Aa, Bb, Cc eines Dreiecks ABC in einem Punkte O, so dass also stattfindet:

$$Ba.Cb.Ac=Ca.Ab.Bc,$$

so schneiden sich auch diejenigen Scheitellinien Aa', Bb', Cc' in einem Punkte O', für welche die Winkeltheile ihre Lage gewechselt haben.

Es finden dann nämlich folgende sechs Proportionen statt:

$$\triangle BAa : \triangle CAa' = AB.Aa : AC.Aa' = Ba : Ca',$$
$$\triangle CBb : \triangle ABb' = BC.Bb : BA.Bb' = Cb : Ab',$$
$$\triangle ACc : \triangle BCc' = CA.Cc : CB.Cc' = Ac : Bc'$$

und

$$\triangle BAa' : \triangle CAa = AB.Aa' : AC.Aa = Ba' : Ca,$$
$$\triangle CBb' : \triangle ABb = BC.Bb' : BA.Bb = Cb' : Ab,$$
$$\triangle ACc' : \triangle BCc = CA.Cc' : CB.Cc = Ac' : Bc.$$

Multiplicirt man diese sechs Proportionen, so werden die Producte der dritten und vierten Glieder gleich, man hat daher auch

$$Ba.Cb.Ac \times Ba'.Cb'.Ac' = Ca'.Ab'.Bc' \times Ca.Ab.Bc,$$

oder mit Hülfe der Voraussetzung:

$$Ba'.Cb'.Ac' = Ca'.Ab'.Bc',$$

d. h. die Scheitellinien Aa', Bb', Cc' schneiden sich in einem Punkte O'.

Für unsern speciellen Fall hat man daher:

$$\angle O'AB = \angle O'BC = \angle O'CA = x,$$

woraus folgt, dass von den drei Kreisen, welche durch je zwei Ecken des Dreiecks und den Punkt O' gelegt werden, jeder eine andere Seite in einer anderen Ecke berührt.

Ausser diesen eben bewiesenen gemeinsamen Eigenschaften der Punkte O und O' ist noch zu merken, dass die Theile, in welche das Dreieck durch die Scheitellinien des Punktes O getheilt wird, ähnlich sind den Theilen, in welche ABC durch die Scheitellinien des Punktes O' getheilt wird. Denn als Summe der Aussenwinkel der anliegenden Dreiecke ist:

$$\begin{array}{lll} \angle AOB = \angle(B+C), & \angle BOC = \angle(C+A), & \angle COA = \angle(A+B), \\ \quad = 180 - A & \quad = 180 - B & \quad = 180 - C \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \angle AO'C = \angle(B+C), & \angle BO'A = \angle(C+A), & \angle CO'B = \angle(A+B); \\ \quad = 180 - A & \quad = 180 - B & \quad = 180 - C \end{array}$$

daher:

$$\triangle AOB \sim \triangle AO'C, \ \triangle BOC \sim \triangle BO'A, \ \triangle COA \sim \triangle CO'B.$$

Auch diese Dreiecke werden noch in ähnliche Theile getheilt, woraus folgt, dass die Scheitellinien in O und O' sich unter Winkeln schneiden, welche den Dreieckswinkeln gleich sind; eine Eigenschaft, welche diese Punkte mit dem Höhenpunkte und dem Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises theilen.

§. 6.

Der Punkt O führt nun zu folgender Auflösung des zweiten Falles.

Man suche in dem gegebenen Dreiecke ABC (Taf. VIII. Fig. 5.) den Punkt O und ziehe OA, OB, OC; trage dann an diese Scheitellinien nach der Seite des Winkels x hin in O den gegebenen Winkel φ *) an, so dass

$$\angle AOa = \angle BOb = \angle COc = \varphi,$$

und verbinde a, b und c mit einander, so ist $\Delta\, abc$ das verlangte Dreieck.

Auch hier ist zu beweisen:

$$1) \quad \Delta\, abc \sim \Delta\, ABC.$$

Aus der Consruction folgt:

$$\angle ObA = \angle OcB = \angle OaC = x + \varphi,$$
$$\angle OaA = \angle ObB = \angle OcC = 180 - (x + \varphi);$$

daher

$$\angle ObA + \angle OaA = \angle OcB + \angle ObB = \angle OaC + \angle OcC = 180,$$

d. h.

$$ObAa,\ OcBb,\ OaCc$$

sind Kreisvierecke. Man hat also

$$\angle Oab = \angle OAB,\ \angle Obc = \angle OBC,\ \angle Oca = \angle OCA$$

oder

$$\angle Oac = x,\ \angle Oba = x,\ \angle Ocb = x.$$

Addirt man die über einander stehenden Gleichungen, so findet man

$$\angle cab = \angle CAB,\ \angle abc = \angle ABC,\ \angle bca = \angle BCA,$$

was bewiesen werden sollte.

$$2) \quad \angle Aba = \angle Bcb = \angle Cac = \varphi.$$

Aus den Kreisvierecken $ObAa$, $OcBb$, $OaCc$ folgt:

$$\angle AOa = \angle Aba,\ \angle BOb = \angle Bcb,\ \angle COc = \angle Cac$$

oder

$$\angle AOa = \angle BOb = \angle COc = \varphi;$$

folglich auch:

$$\angle Aba = \angle Bcb = \angle Cac = \varphi.$$

*) Der Bequemlichkeit der Zeichnung wegen ist der Winkel φ in den beiden Fällen nicht von gleicher Grösse genommen.

In Beziehung auf Δabc verdient noch bemerkt zu werden, dass

$$\angle Oac = \angle Oba = \angle Ocb = x,$$

d. h. dass der Punkt O für beide Dreiecke ABC und abc dieselbe Bedeutung hat.

§. 7.

Dieser Fall lässt vier Lösungen zu, welche in den Figuren 5. und 6., 7. und 8. auf Taf. VIII. dargestellt sind, indem man in Figur 5. und 6. den Winkel φ, in Figur 7. und 8. den Winkel $360-\varphi$ auf die vorgeschriebene Art angetragen hat. Von diesen vier Lösungen liefern je zwei congruente Dreiecke, indem Δabc (Fig. 5.) $\cong \Delta a'b'c'$ (Fig. 6.) und Δabc (Fig. 7.) $\cong \Delta a'b'c'$ (Fig. 8.)

Der Beweis dieser beiden Congruenzen ist folgender.

Aus der Construction ergeben sich folgende Aehnlichkeiten:

$$\Delta AOC \sim \Delta aOc,\ \Delta BOA \sim \Delta bOa,\ \Delta COB \sim \Delta cOb;$$
$$\Delta A'O'C' \sim \Delta a'O'c',\ \Delta B'O'A' \sim \Delta b'O'a',\ \Delta C'O'B' \sim \Delta c'O'b'$$

und

$$\Delta AOa \sim \Delta A'O'a',\ \Delta BOb \sim \Delta B'O'b',\ \Delta COc \sim \Delta C'O'c'.$$

Aus den beiden ersteren ergeben sich folgende Proportionen:

$$AC:ac = OA:Oa,\ BA:ba = OB:Ob,\ CB:cb = OC:Oc;$$
$$A'C':a'c' = O'A':O'a',\ B'A':b'a' = O'B':O'b',\ C'B':c'b' = O'C':O'c';$$

und aus der dritten hat man:

$$OA:Oa = O'A':O'a',\ OB:Ob = O'B':O'b',\ OC:Oc = O'C':O'c';$$

woraus folgt:

$$AC:ac = A'C':a'c',\ BA:ba = B'A':b'a',\ CB:cb = C'B':c'b'.$$

Da aber

$$AC = A'C',\ BA = B'A',\ CB = C'B':$$

so ist auch:

$$ac = a'c',\ ba = b'a',\ cb = c'b';$$

was zu beweisen war.

2) Trigonometrische Auflösung.

§. 8.

Aus den Dreiecken AOB, BOC, COA (Taf. VIII. Fig. 3.) folgt:

$$OB\sin x = OA\sin(A-x),$$
$$OC\sin x = OB\sin(B-x),$$
$$OA\sin x = OC\sin(C-x).$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen, so ergiebt sich als specieller Fall eines bekannten Satzes:

$$\sin^3 x = \sin(A-x)\sin(B-x)\sin(C-x).$$

Diese Gleichung, scheinbar von höherem Grade, ist in der That nur vom ersten Grade, wenn man $\operatorname{tg} x$ als Unbekannte daraus entwickelt. Wir wollen folgenden Gang der Entwickelung einschlagen. Durch Auflösung des Productes rechts vom Gleichheitszeichen erhält man zunächst:

$$\sin^3 x = \tfrac{1}{2}\sin(A-x)[\cos(B-C)-\cos(B+C-2x)],$$

dann

$$= \tfrac{1}{4}\sin(A+B-C-x)+\tfrac{1}{4}\sin(A+C-B-x)$$
$$-\tfrac{1}{4}\sin(A+B+C-3x)-\tfrac{1}{4}\sin(B+C-A-x);$$

da aber $A+B+C=180$, so wird

$$\sin^3 x+\tfrac{1}{4}\sin 3x = \tfrac{1}{4}[\sin(2A+x)+\sin(2B+x)+\sin(2C+x)]$$
$$=\tfrac{1}{4}\cos x(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$
$$+\tfrac{1}{4}\sin x(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C).$$

Vereinigt man jetzt wieder die Summen in der Parenthese, so hat man:

$$\sin^3 x+\tfrac{1}{4}\sin 3x = \cos x\sin A\sin B\sin C$$
$$-\sin x\cos A\cos B\cos C-\tfrac{1}{4}\sin x$$

oder

$$\sin^3 x+\tfrac{1}{4}\sin 3x+\tfrac{1}{4}\sin x = \cos x\sin A\sin B\sin C$$
$$-\sin x\cos A\cos B\cos C.$$

Nun aber ist bekanntlich:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

also

$$\sin x = \sin^3 x+\tfrac{1}{4}\sin 3x+\tfrac{1}{4}\sin x.$$

Man erhält daher:

$$\sin x(1+\cos A\cos B\cos C) = \cos x\,.\,\sin A\sin B\sin C,$$

und endlich:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin A\sin B\sin C}{1+\cos A\cos B\cos C}.$$

Noch einfacher erscheint der Werth für die Cotangente, der hier abgeleitet werden soll, weil er in der Folge eine Anwendung findet.

Es ist nämlich

$$1+\cos A\cos B\cos C = 1+\cos A(-\cos A+\sin B\sin C)$$
$$=\sin^2 A+\sin B\sin C\cos A$$
$$=\sin A\sin(B+C)+\sin B\sin C\cos A$$
$$=\sin A\sin B\cos C+\sin A\sin C\cos B+\sin B\sin C\cos A.$$

Dividirt man diesen Ausdruck durch $\sin A\sin B\sin C$, so erhält man:

$$\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C.$$

§. 9.

So einfach auch der zuletzt gefundene Ausdruck für $\operatorname{ctg} x$ ist, so ist er doch nicht für die Untersuchung geschickt, wie sich x mit den Dreieckswinkeln A, B, C ändert. Um ihn für diesen Zweck umzuformen, wollen wir $\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} C$ vereinigen und erhalten dann:

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\sin B}{\sin A\sin C}+\operatorname{ctg} B,$$

und wollen dann $A=90-\frac{1}{2}B+\xi$ und $C=90-\frac{1}{2}B-\xi$ setzen. Dies giebt:

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\sin B}{\cos(\frac{1}{2}B-\xi)\cos(\frac{1}{2}B+\xi)}+\operatorname{ctg} B$$

$$=\frac{\sin B}{\cos^2\frac{1}{2}B-\sin^2\xi}+\operatorname{ctg} B,$$

wo $2\xi=A-C$ ist. Es soll nun zuerst die Veränderung von x für $\xi=0$ oder im gleichschenkligen Dreiecke untersucht werden, für welches

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\sin B}{\cos^2\frac{1}{2}B}+\operatorname{ctg} B=\frac{2(1-\cos B)}{\sin B}+\operatorname{ctg} B$$

$$=\frac{2-\cos B}{\sin B}.$$

Hieraus folgt, dass $\operatorname{ctg} x>\operatorname{ctg} B$, also $x<B$, dass also x stets kleiner ist, als der Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks, ferner, dass $\operatorname{ctg} x$ immer positiv ist, also x im ersten Quadranten liegt.

Setzt man für B die Werthe $B=0$ und $B=180$, so wird für beide Werthe $\operatorname{ctg} x=\infty$, $x=0$; es wird also zwischen $B=0$ und $B=180$ einen Werth geben, für welchen x ein Maximum wird. Die allgemeine Methode liefert dafür die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial \operatorname{ctg} x}{\partial B}=\frac{1-2\cos B}{\sin^2 B}=0,\ \cos B=\tfrac{1}{2},\ B=60^\circ;$$

so dass also x für das gleichseitige Dreieck ein Maximum wird. Man erhält nämlich:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \quad x = 30^0.$$

Dieses Resultat erscheint auch bei einer andern Betrachtung, welche weiter unten folgen soll.

Wir wollen jetzt B constant annehmen und in der Formel

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sin B}{\cos^2 \frac{1}{2}B - \sin^2 \xi} + \operatorname{ctg} B$$

ξ wachsen lassen. Da angenommen wurde $C = (90 - \frac{1}{2}B) - \xi$, so wird ξ nur von 0 bis $90 - \frac{1}{2}B$ oder $\sin \xi$ von 0 bis $\cos \frac{1}{2}B$ wachsen können; es wird also auch in den ungleichwinkligen Dreiecken x stets im ersten Quadranten liegen und dabei um so kleiner werden, je grösser ξ wird.

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so kann man sagen, dass x für das gleichseitige Dreieck ein Maximum ist und um so kleiner wird, je mehr sich das Dreieck von der Regelmässigkeit entfernt. Bleibt das Dreieck gleichschenklig, so haben die Dreiecke einen gleichen Winkel x, deren Winkel an der Spitze durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B' = \operatorname{tg}^2 30 \text{ *)}$$

verbunden sind.

§. 10.

Für den Punkt O' (Taf. VIII. Fig. 4.) wird man einen Winkel x finden, welcher gleich ist dem Winkel, der für den Punkt O gefunden wurde; denn man erhält dieselbe Bedingungsgleichung

$$\sin^3 x = \sin(A - x) \sin(B - x) \sin(C - x),$$

aus welcher für den Punkt O der Werth für $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ abgeleitet wurde.

§. 11.

Um in Taf. VIII. Fig. 4. alles durch Rechnung bestimmt zu haben, wollen wir die Werthe der Scheitellinien hieher setzen. Sie sind:

$$OA = AB\frac{\sin x}{\sin A}, \quad OB = BC\frac{\sin x}{\sin B}, \quad OC = AC\frac{\sin x}{\sin C};$$

$$O'A = AC\frac{\sin x}{\sin A}, \quad O'B = AB\frac{\sin x}{\sin B}, \quad O'C = BC\frac{\sin x}{\sin C}.$$

---

*) Den Winkel $\frac{1}{2}B'$ kann man construiren, wenn man in einer Ellipse, deren Axen a und b so beschaffen sind, dass $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} 30^0$, einen Durchmesser mit der Neigung $\frac{1}{2}B$ gegen die grosse Axe zieht und dazu den conjugirten Durchmesser sucht. Seine Neigung ist $\frac{1}{2}B'$.

Es bleibt nun noch übrig, die Grösse von OO' zu bestimmen. Dies geschieht am einfachsten mittels des Dreiecks BOO', aus dem sich sogleich ergiebt:

$$OO'^2 = BO^2 + BO'^2 - 2BO.BO' \cos(B-2x).$$

Da jedoch OO' in Beziehung auf die Stücke des Dreiecks eine symmetrische Function ist, so muss sie sich auch so transformiren lassen, dass sie auch die Form einer symmetrischen Function hat. Zu dem Ende wollen wir setzen:

$$BO = BC\frac{\sin x}{\sin B} = AC\frac{\sin A \sin x}{\sin^2 B},\quad BO' = AB\frac{\sin x}{\sin B} = AC\frac{\sin C \sin x}{\sin^2 B}$$

und erhalten dann:

$$OO'^2 = \frac{AC^2 \sin^2 x}{\sin^2 B}\left(\frac{\sin^2 A + \sin^2 C}{\sin^2 B} - \frac{2\sin A \sin C}{\sin^2 B}\cos(B-2x)\right).$$

Für $(\sin^2 A + \sin^2 C)$ kann man setzen $(\sin^2 B + 2\sin A \sin C \cos B)$, so dass

$$OO'^2 = \frac{AC^2 \sin^2 x}{\sin^2 B}\left(1 + 2\frac{\sin A \sin C(\cos B - \cos(B-2x))}{\sin^2 B}\right),$$

oder, wenn man die beiden Cosinusse vereinigt:

$$OO' = \frac{AC^2 \sin^2 x}{\sin^2 B}\left(1 - 4\sin x \frac{\sin A \sin C \sin(B-x)}{\sin^2 B}\right).$$

Nun aber fanden wir

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C$$

oder

$$\frac{\sin(B-x)}{\sin B \sin x} = \frac{\sin B}{\sin A \sin C},$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{\sin A \sin C \sin(B-x)}{\sin^2 B} = \sin x.$$

Es wird daher

$$OO'^2 = \left(\frac{AC}{\sin B}\right)^2 \sin^2 x(1 - 4\sin^2 x).$$

Diese Form ist symmetrisch, da

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BA}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = 2r,$$

wo r der Radius des umbeschriebenen Kreises ist.

Um den Werth von OO' für die logarithmische Berechnun einzurichten, schreiben wir

$$OO'^2 = 16r^2(\tfrac{1}{4} - \sin^2 x)\sin^2 x,$$

und bedenken, dass $\tfrac{1}{2} = \sin 30$; dann hat man

$$\begin{aligned} OO'^2 &= 16r^2 \sin^2 x(\sin^2 30 - \sin^2 x) \\ &= 16r^2 \sin^2 x \sin(30 + x)\sin(30 - x), \end{aligned}$$

und endlich

$$OO' = 4r\sin x\sqrt{\sin(30+x)\sin(30-x)}.$$

Da OO' immer eine reelle Grösse ist, so muss $\sin(30-x)$ immer positiv, d. h.

$$x < 30^0$$

sein, ein Resultat, welches mit dem §. 9. gefundenen übereinstimmt.

§. 12.

Die Grösse der Seiten des einbeschriebenen Dreiecks (Taf. VIII. Fig. 5. und 6.) hängt von dem gegebenen Winkel φ ab. Es ist nämlich:

$$AO:aO = BO:bO = CO:cO = \sin(x+\varphi):\sin x,$$

aber auch

$$= AC:ac = BA:ba = CB:cb.$$

Man hat also:

$$ab = AB\frac{\sin x}{\sin(x+\varphi)},\quad bc = BC\frac{\sin x}{\sin(x+\varphi)},\quad ac = AC\frac{\sin x}{\sin(x+\varphi)}.$$

Wird statt φ der Winkel $360 - \varphi$ genommen, so erhält man die Seiten der Dreiecke Taf. VIII. Fig. 7. und 8.; sie werden:

$$ab = AB\frac{\sin x}{\sin(x-\varphi)},\quad bc = BC\frac{\sin x}{\sin(x-\varphi)},\quad ac = AC\frac{\sin x}{\sin(x-\varphi)}.$$

XXVIII.

Ueber die Bestimmung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte.

Von

dem Herausgeber.

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte oder der Linien des zweiten Grades ist bekanntlich

$$1)\quad Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0.$$

Wenn nun

$$x_1,\, y_1;\quad x_2,\, y_2;\quad x_3,\, y_3;\quad x_4,\, y_4;\quad x_5,\, y_5$$

die Coordinaten von fünf gegebenen Punkten sind, durch welche ein Kegelschnitt beschrieben werden soll, so hat man zur Bestimmung der Coefficienten

$$A,\, B,\, C,\, D,\, E,\, F;$$

deren Anzahl sich aber, wie auf der Stelle erhellet, und hier wohl kaum noch besonders erinnert zu werden braucht, eigentlich auf fünf reducirt, die folgenden fünf Gleichungen des ersten Grades:

$$2)\quad \begin{cases} Ay_1{}^2+Bx_1y_1+Cx_1{}^2+Dy_1+Ex_1+F=0, \\ Ay_2{}^2+Bx_2y_2+Cx_2{}^2+Dy_2+Ex_2+F=0, \\ Ay_3{}^2+Bx_3y_3+Cx_3{}^2+Dy_3+Ex_3+F=0, \\ Ay_4{}^2+Bx_4y_4+Cx_4{}^2+Dy_4+Ex_4+F=0, \\ Ay_5{}^2+Bx_5y_5+Cx_5{}^2+Dy_5+Ex_5+F=0; \end{cases}$$

welche also zur Bestimmung der gesuchten Coefficienten hinreichen, woraus daher ersichtlich ist, dass durch fünf gegebene Punkte ein Kegelschnitt im Allgemeinen vollkommen bestimmt wird, was auch längst bekannt ist, und sich in jedem vollständigern Lehrbuche der Theorie der Linien des zweiten Grades ausgesprochen findet.

So einfach und sich in der That ganz von selbst darbietend dies aber auch ist, so ist mir doch nicht bekannt, dass die obigen fünf Gleichungen des ersten Grades schon wirklich aufgelöst und die gesuchten Coefficienten durch die zehn gegebenen Coordinaten in völlig entwickelten Ausdrücken dargestellt worden wären, was mich veranlasst, eine von mir gefundene vollständige Auflösung dieser Aufgabe, welche allerdings, wenn man sie nicht mit einigem Geschick anfasst, in nicht geringe Weitläufigkeiten führen kann, in dem vorliegenden Aufsatze mitzutheilen, und daran zugleich noch einige andere Betrachtungen zu knüpfen.

Zuerst erhält man aus den fünf Gleichungen 2) durch Subtraction auf der Stelle die vier folgenden Gleichungen:

$$3)\;\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r} A(y_1^2-y_2^2)+B(x_1y_1-x_2y_2)+C(x_1^2-x_2^2) \\ +D(y_1-y_2)+E(x_1-x_2) \end{array}\right\}=0, \\
\left.\begin{array}{r} A(y_2^2-y_3^2)+B(x_2y_2-x_3y_3)+C(x_2^2-x_3^2) \\ +D(y_2-y_3)+E(x_2-x_3) \end{array}\right\}=0, \\
\left.\begin{array}{r} A(y_3^2-y_4^2)+B(x_3y_3-x_4y_4)+C(x_3^2-x_4^2) \\ +D(y_3-y_4)+E(x_3-x_4) \end{array}\right\}=0, \\
\left.\begin{array}{r} A(y_4^2-y_5^2)+B(x_4y_4-x_5y_5)+C(x_4^2-x_5^2) \\ +D(y_4-y_5)+E(x_4-x_5) \end{array}\right\}=0.
\end{array}\right.$$

Ueberlegt man aber, dass überhaupt, wie man durch leichte Rechnung findet:

$$\begin{aligned}
&(u^2-u_1^2)(v_1-v_2)-(u_1^2-u_2^2)(v-v_1) \\
&=u^2(v_1-v_2)+u_1^2(v_2-v)+u_2^2(v-v_1), \\
&(uv-u_1v_1)(v_1-v_2)-(u_1v_1-u_2v_2)(v-v_1) \\
&=uv(v_1-v_2)+u_1v_1(v_2-v)+u_2v_2(v-v_1), \\
&(v^2-v_1^2)(v_1-v_2)-(v_1^2-v_2^2)(v-v_1) \\
&=-(v-v_1)(v_1-v_2)(v_2-v), \\
&(u-u_1)(v_1-v_2)-(u_1-u_2)(v-v_1) \\
&=u(v_1-v_2)+u_1(v_2-v)+u_2(v-v_1)
\end{aligned}$$

ist, so wird man sich leicht von der Richtigkeit der drei folgenden Gleichungen überzeugen:

4)

$$\left.\begin{array}{l}
A\{y_1^2(x_2-x_3)+y_2^2(x_3-x_1)+y_3^2(x_1-x_2)\} \\
+B\{x_1y_1(x_2-x_3)+x_2y_2(x_3-x_1)+x_3y_3(x_1-x_2)\} \\
-C(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1) \\
+D\{y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)\}
\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}
A\{y_2^2(x_3-x_4)+y_3^2(x_4-x_2)+y_4^2(x_2-x_3)\} \\
+B\{x_2y_2(x_3-x_4)+x_3y_3(x_4-x_2)+x_4y_4(x_2-x_3)\} \\
-C(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2) \\
+D\{y_2(x_3-x_4)+y_3(x_4-x_2)+y_4(x_2-x_3)\}
\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&A\{y_3^2(x_4-x_5)+y_4^2(x_5-x_3)+y_5^2(x_3-x_4)\}\\
&+B\{x_3y_3(x_4-x_5)+x_4y_4(x_5-x_3)+x_5y_5(x_3-x_4)\}\\
&-C(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\
&+D\{y_3(x_4-x_5)+y_4(x_5-x_3)+y_5(x_3-x_4)\}
\end{aligned}\right\}=0.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet, allgemein:

$$\begin{aligned}
&\{u(v_1-v_2)+u_1(v_2-v)+u_2(v-v_1)\}(v_1-v_2)(v_2-v_3)(v_3-v_1)\\
&-\{u_1(v_2-v_3)+u_2(v_3-v_1)+u_3(v_1-v_2)\}(v-v_1)(v_1-v_2)(v_2-v)\\
&=(v_1-v_2)\left\{\begin{aligned}
&u(v_1-v_2)(v_2-v_3)(v_3-v_1)\\
&-u_1(v_2-v_3)(v_3-v)(v-v_2)\\
&+u_2(v_3-v)(v-v_1)(v_1-v_3)\\
&-u_3(v-v_1)(v_1-v_2)(v_2-v)
\end{aligned}\right\},
\end{aligned}$$

und man hat daher die beiden folgenden Gleichungen:

5)

$$\left.\begin{aligned}
&A\left\{\begin{aligned}
&y_1^2(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\
&-y_2^2(x_3-x_4)(x_4-x_1)(x_1-x_3)\\
&+y_3^2(x_4-x_1)(x_1-x_2)(x_2-x_4)\\
&-y_4^2(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)
\end{aligned}\right\}\\
&+B\left\{\begin{aligned}
&x_1y_1(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\
&-x_2y_2(x_3-x_4)(x_4-x_1)(x_1-x_3)\\
&+x_3y_3(x_4-x_1)(x_1-x_2)(x_2-x_4)\\
&-x_4y_4(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)
\end{aligned}\right\}\\
&+D\left\{\begin{aligned}
&y_1(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\
&-y_2(x_3-x_4)(x_4-x_1)(x_1-x_3)\\
&+y_3(x_4-x_1)(x_1-x_2)(x_2-x_4)\\
&-y_4(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&A\left\{\begin{aligned}
&y_2^2(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\
&-y_3^2(x_4-x_5)(x_5-x_2)(x_2-x_4)\\
&+y_4^2(x_5-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_5)\\
&-y_5^2(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)
\end{aligned}\right\}\\
&+B\left\{\begin{aligned}
&x_2y_2(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\
&-x_3y_3(x_4-x_5)(x_5-x_2)(x_2-x_4)\\
&+x_4y_4(x_5-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_5)\\
&-x_5y_5(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)
\end{aligned}\right\}\\
&+D\left\{\begin{aligned}
&y_2(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\
&-y_3(x_4-x_5)(x_5-x_2)(x_2-x_4)\\
&+y_4(x_5-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_5)\\
&-y_5(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\}=0.$$

Der Kürze wegen wollen wir diese beiden Gleichungen durch

$$6)\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A(py_1^2-qy_2^2+ry_3^2-sy_4^2)\\+B(px_1y_1-qx_2y_2+rx_3y_3-sx_4y_4)\\+D(py_1-qy_2+ry_3-sy_4)\end{array}\right\}=0.\\\left.\begin{array}{l}A(p_1y_2^2-q_1y_3^2+r_1y_4^2-py_5^2)\\+B(p_1x_2y_2-q_1x_3y_3+r_1x_4y_4-px_5y_5)\\+D(p_1y_2-q_1y_3+r_1y_4-py_5)\end{array}\right\}=0\end{array}\right.$$

bezeichnen, wo die Bedeutung der Symbole

$$p,\ q,\ r,\ s,\ p_1,\ q_1,\ r_1$$

aus der Vergleichung mit dem Vorhergehenden von selbst erhelen wird.

Entwickeln wir nun durch gewöhnliche Multiplication die Gröss

$$\begin{array}{l}(py_1^2-qy_2^2+ry_3^2-sy_4^2)(p_1y_2-q_1y_3+r_1y_4-py_5)\\-(p_1y_2^2-q_1y_3^2+r_1y_4^2-py_5^2)(py_1-qy_2+ry_3-sy_4),\end{array}$$

so erhalten wir für dieselbe nach einigen leichten Reductionen de Ausdruck:

$$\begin{array}{l}y_1y_2(y_1-y_2)pp_1\\-y_1y_3(y_1-y_3)pq_1\\+y_1y_4(y_1-y_4)pr_1\\-y_1y_5(y_1-y_5)pp\\+y_2y_3(y_2-y_3)(qq_1-rp_1)\\-y_2y_4(y_2-y_4)(qr_1-sp_1)\\+y_2y_5(y_2-y_5)pq\\+y_3y_4(y_3-y_4)(rr_1-sq_1)\\-y_3y_5(y_3-y_5)pr\\+y_4y_5(y_4-y_5)ps.\end{array}$$

Nun ist aber, wie man ebenfalls mittelst leichter Rechnun findet:

$$\begin{array}{l}qq_1-rp_1=p(x_1-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_1),\\qr_1-sp_1=p(x_1-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_1),\\rr_1-sq_1=p(x_1-x_2)(x_2-x_5)(x_5-x_1);\end{array}$$

und für die obige Grösse, welche wir der Kürze wegen durch Q bezeichnen wollen, erhält man also den folgenden Ausdruck:

$$\begin{array}{rl}7)\ Q= & py_1y_2(y_1-y_2).(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\ & -py_1y_3(y_1-y_3).(x_2-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_2)\\ & +py_1y_4(y_1-y_4).(x_2-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_2)\\ & -py_1y_5(y_1-y_5).(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\ & +py_2y_3(y_2-y_3).(x_1-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_1)\\ & -py_2y_4(y_2-y_4).(x_1-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_1)\\ & +py_2y_5(y_2-y_5).(x_1-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_1)\\ & +py_3y_4(y_3-y_4).(x_1-x_2)(x_2-x_5)(x_5-x_1)\\ & -py_3y_5(y_3-y_5).(x_1-x_2)(x_2-x_4)(x_4-x_1)\\ & +py_4y_5(y_4-y_5).(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1).\end{array}$$

Entwickelt man ferner auch die Grösse

$$(px_1y_1-qx_2y_2+rx_3y_3-sx_4y_4)(p_1y_2-q_1y_3+r_1y_4-py_5)$$
$$-(p_1x_2y_2-q_1x_3y_3+r_1x_4y_4-px_5y_5)(py_1-qy_2+ry_3-sy_4)$$

durch gemeine Multiplication, so erhält man für dieselbe nach einigen leichten Reductionen den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
&y_1y_2(x_1-x_2)pp_1\\
&-y_1y_3(x_1-x_3)pq_1\\
&+y_1y_4(x_1-x_4)pr_1\\
&-y_1y_5(x_1-x_5)pp\\
&+y_2y_3(x_2-x_3)(qq_1-rp_1)\\
&-y_2y_4(x_2-x_4)(qr_1-sp_1)\\
&+y_2y_5(x_2-x_5)pq\\
&+y_3y_4(x_3-x_4)(rr_1-sq_1)\\
&-y_3y_5(x_3-x_5)pr\\
&+y_4y_5(x_4-x_5)ps.
\end{aligned}$$

Führt man aber in diesen Ausdruck der obigen Grösse, welche wir der Kürze wegen durch P bezeichnen wollen, die schon vorher gefundenen Ausdrücke von

$$qq_1-rp_1,\ qr_1-sp_1,\ rr_1-sq_1$$

und auch für die übrigen Grössen ihre aus dem Obigen bekannten Ausdrücke ein, so erhält man für P den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
8)\ P= &\ py_1y_2(x_1-x_2).(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\
&-py_1y_3(x_1-x_3).(x_2-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_2)\\
&+py_1y_4(x_1-x_4).(x_2-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_2)\\
&-py_1y_5(x_1-x_5).(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\
&+py_2y_3(x_2-x_3).(x_1-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_1)\\
&-py_2y_4(x_2-x_4).(x_1-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_1)\\
&+py_2y_5(x_2-x_5).(x_1-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_1)\\
&+py_3y_4(x_3-x_4).(x_1-x_2)(x_2-x_5)(x_5-x_1)\\
&-py_3y_5(x_3-x_5).(x_1-x_2)(x_2-x_4)(x_4-x_1)\\
&+py_4y_5(x_4-x_5).(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1).
\end{aligned}$$

Wegen der Gleichungen 6) haben wir nun offenbar die Gleichung:

$$9)\ AQ+BP=0.$$

Entwickelt man ferner die Grösse

$$(py_1^2-qy_2^2+ry_3^2-sy_4^2)(p_1x_2y_2-q_1x_3y_3+r_1x_4y_4-px_5y_5)$$
$$-(p_1y_2^2-q_1y_3^2+r_1y_4^2-py_5^2)(px_1y_1-qx_2y_2+rx_3y_3-sx_4y_4)$$

durch gemeine Multiplication, so erhält man für dieselbe den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
&-y_1y_2(x_1y_2-x_2y_1)pp_1\\
&+y_1y_3(x_1y_3-x_3y_1)pq_1\\
&-y_1y_4(x_1y_4-x_4y_1)pr_1\\
&+y_1y_5(x_1y_5-x_5y_1)pp\\
&-y_2y_3(x_2y_3-x_3y_2)(qq_1-rp_1)\\
&+y_2y_4(x_2y_4-x_4y_2)(qr_1-sp_1)\\
&-y_2y_5(x_2y_5-x_5y_2)pq\\
&-y_3y_4(x_3y_4-x_4y_3)(rr_1-sq_1)\\
&+y_3y_5(x_3y_5-x_5y_3)pr\\
&-y_4y_5(x_4y_5-x_5y_4)ps,
\end{aligned}$$

und wenn wir nun wieder alle erforderlichen Substitutionen vornehmen, die obige Grösse aber der Kürze wegen durch S bezeichnen, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
10)\quad S=&-py_1y_2(x_1y_2-x_2y_1).(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\
&+py_1y_3(x_1y_3-x_3y_1).(x_2-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_2)\\
&-py_1y_4(x_1y_4-x_4y_1).(x_2-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_2)\\
&+py_1y_5(x_1y_5-x_5y_1).(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\
&-py_2y_3(x_2y_3-x_3y_2).(x_1-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_1)\\
&+py_2y_4(x_2y_4-x_4y_2).(x_1-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_1)\\
&-py_2y_5(x_2y_5-x_5y_2).(x_1-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_1)\\
&-py_3y_4(x_3y_4-x_4y_3).(x_1-x_2)(x_2-x_5)(x_5-x_1)\\
&+py_3y_5(x_3y_5-x_5y_3).(x_1-x_2)(x_2-x_4)(x_4-x_1)\\
&-py_4y_5(x_4y_5-x_5y_4).(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1).
\end{aligned}$$

Wegen der Gleichungen 6) haben wir aber, wie sogleich in die Augen fallen wird, die Gleichung

$$11)\quad AS-DP=0.$$

Aus den Gleichungen 9) und 11) ergiebt sich

$$\frac{A}{P}=-\frac{B}{Q}=\frac{D}{S},$$

und man kann also offenbar

$$A=P,\ B=-Q,\ D=S$$

setzen. Weil aber die drei Grössen P, Q, S den gemeinschaftlichen Factor p haben, so ist klar, dass wir, wenn kürzer

$$
\begin{aligned}
12)\ P' = {} & y_1y_2(x_1-x_2).(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\
& -y_1y_3(x_1-x_3).(x_2-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_2)\\
& +y_1y_4(x_1-x_4).(x_2-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_2)\\
& -y_1y_5(x_1-x_5).(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\
& +y_2y_3(x_2-x_3).(x_1-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_1)\\
& -y_2y_4(x_2-x_4).(x_1-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_1)\\
& +y_2y_5(x_2-x_5).(x_1-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_1)\\
& +y_3y_4(x_3-x_4).(x_1-x_2)(x_2-x_5)(x_5-x_1)\\
& -y_3y_5(x_3-x_5).(x_1-x_2)(x_2-x_4)(x_4-x_1)\\
& +y_4y_5(x_4-x_5).(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1),
\end{aligned}
$$

ferner

$$
\begin{aligned}
13)\ Q' = {} & y_1y_2(y_1-y_2).(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\
& -y_1y_3(y_1-y_3).(x_2-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_2)\\
& +y_1y_4(y_1-y_4).(x_2-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_2)\\
& -y_1y_5(y_1-y_5).(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\
& +y_2y_3(y_2-y_3).(x_1-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_1)\\
& -y_2y_4(y_2-y_4).(x_1-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_1)\\
& +y_2y_5(y_2-y_5).(x_1-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_1)\\
& +y_3y_4(y_3-y_4).(x_1-x_2)(x_2-x_5)(x_5-x_1)\\
& -y_3y_5(y_3-y_5).(x_1-x_2)(x_2-x_4)(x_4-x_1)\\
& +y_4y_5(y_4-y_5).(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
14)\ S' = {} & -y_1y_2(x_1y_2-x_2y_1).(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\
& +y_1y_3(x_1y_3-x_3y_1).(x_2-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_2)\\
& -y_1y_4(x_1y_4-x_4y_1).(x_2-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_2)\\
& +y_1y_5(x_1y_5-x_5y_1).(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\
& -y_2y_3(x_2y_3-x_3y_2).(x_1-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_1)\\
& +y_2y_4(x_2y_4-x_4y_2).(x_1-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_1)\\
& -y_2y_5(x_2y_5-x_5y_2).(x_1-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_1)\\
& -y_3y_4(x_3y_4-x_4y_3).(x_1-x_2)(x_2-x_5)(x_5-x_1)\\
& +y_3y_5(x_3y_5-x_5y_3).(x_1-x_2)(x_2-x_4)(x_4-x_1)\\
& -y_4y_5(x_4y_5-x_5y_4).(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)
\end{aligned}
$$

gesetzt wird, auch

$$15)\ A=P',\ B=-Q',\ D=S'$$

setzen können.

Aus der Form der Gleichung 1) geht nun auf der Stelle u
ganz von selbst hervor, dass sich die Werthe von C und E er
ben müssen, wenn respective in den Ausdrücken von A und D
Symbole x und y gegen einander vertauscht werden. Setzen
also:

$$
\begin{aligned}
16)\quad R' = \;& x_1x_2(y_1-y_2)\cdot(y_3-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_3)\\
&-x_1x_3(y_1-y_3)\cdot(y_2-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_2)\\
&+x_1x_4(y_1-y_4)\cdot(y_2-y_3)(y_3-y_5)(y_5-y_2)\\
&-x_1x_5(y_1-y_5)\cdot(y_2-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_2)\\
&+x_2x_3(y_2-y_3)\cdot(y_1-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_1)\\
&-x_2x_4(y_2-y_4)\cdot(y_1-y_3)(y_3-y_5)(y_5-y_1)\\
&+x_2x_5(y_2-y_5)\cdot(y_1-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_1)\\
&+x_3x_4(y_3-y_4)\cdot(y_1-y_2)(y_2-y_5)(y_5-y_1)\\
&-x_3x_5(y_3-y_5)\cdot(y_1-y_2)(y_2-y_4)(y_4-y_1)\\
&+x_4x_5(y_4-y_5)\cdot(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
17)\quad T' = \;& x_1x_2(x_1y_2-x_2y_1)\cdot(y_3-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_3)\\
&-x_1x_3(x_1y_3-x_3y_1)\cdot(y_2-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_2)\\
&+x_1x_4(x_1y_4-x_4y_1)\cdot(y_2-y_3)(y_3-y_5)(y_5-y_2)\\
&-x_1x_5(x_1y_5-x_5y_1)\cdot(y_2-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_2)\\
&+x_2x_3(x_2y_3-x_3y_2)\cdot(y_1-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_1)\\
&-x_2x_4(x_2y_4-x_4y_2)\cdot(y_1-y_3)(y_3-y_5)(y_5-y_1)\\
&+x_2x_5(x_2y_5-x_5y_2)\cdot(y_1-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_1)\\
&+x_3x_4(x_3y_4-x_4y_3)\cdot(y_1-y_2)(y_2-y_5)(y_5-y_1)\\
&-x_3x_5(x_3y_5-x_5y_3)\cdot(y_1-y_2)(y_2-y_4)(y_4-y_1)\\
&+x_4x_5(x_4y_5-x_5y_4)\cdot(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1),
\end{aligned}
$$

wo R' aus P', T' aus S' durch Vertauschung der Symbole x u
y gegen einander erhalten wird, so ist

$$18)\quad C=R',\; E=T'.$$

Aus der Gleichung 1) geht zwar auch von selbst hervor, das
der Ausdruck von B, d. h. die Grösse Q', ungeändert bleib
muss, wenn man die Symbole x und y gegen einander vertausch
da es jedoch interessant ist, dies auch auf dem Wege der Rec
nung nachgewiesen zu sehen, so wollen wir diese Entwickelun
jetzt noch geben.

Zuvörderst überzeugt man sich durch ganz einfache Rechnun
dass überhaupt

$$
\begin{aligned}
&(u-v)(v-w)(w-u)\\
&=-\{uv(u-v)+vw(v-w)+wu(w-u)\}
\end{aligned}
$$

ist. Also ist nach 13):

$$\begin{aligned}Q'=&-y_1y_2(y_1-y_2)\{x_3x_4(x_3-x_4)+x_4x_5(x_4-x_5)+x_5x_3(x_5-x_3)\}\\&+y_1y_3(y_1-y_3)\{x_2x_4(x_2-x_4)+x_4x_5(x_4-x_5)+x_5x_2(x_5-x_2)\}\\&-y_1y_4(y_1-y_4)\{x_2x_3(x_2-x_3)+x_3x_5(x_3-x_5)+x_5x_2(x_5-x_2)\}\\&+y_1y_5(y_1-y_5)\{x_2x_3(x_2-x_3)+x_3x_4(x_3-x_4)+x_4x_2(x_4-x_2)\}\\&-y_2y_3(y_2-y_3)\{x_1x_4(x_1-x_4)+x_4x_5(x_4-x_5)+x_5x_1(x_5-x_1)\}\\&+y_2y_4(y_2-y_4)\{x_1x_3(x_1-x_3)+x_3x_5(x_3-x_5)+x_5x_1(x_5-x_1)\}\\&-y_2y_5(y_2-y_5)\{x_1x_3(x_1-x_3)+x_3x_4(x_3-x_4)+x_4x_1(x_4-x_1)\}\\&-y_3y_4(y_3-y_4)\{x_1x_2(x_1-x_2)+x_2x_5(x_2-x_5)+x_5x_1(x_5-x_1)\}\\&+y_3y_5(y_3-y_5)\{x_1x_2(x_1-x_2)+x_2x_4(x_2-x_4)+x_4x_1(x_4-x_1)\}\\&-y_4y_5(y_4-y_5)\{x_1x_2(x_1-x_2)+x_2x_3(x_2-x_3)+x_3x_1(x_3-x_1)\},\end{aligned}$$

nd folglich, wie leicht erhellen wird:

$$\begin{aligned}Q'=&-x_1x_2(x_1-x_2)\{y_3y_4(y_3-y_4)+y_4y_5(y_4-y_5)+y_5y_3(y_5-y_3)\}\\&+x_1x_3(x_1-x_3)\{y_2y_4(y_2-y_4)+y_4y_5(y_4-y_5)+y_5y_2(y_5-y_2)\}\\&-x_1x_4(x_1-x_4)\{y_2y_3(y_2-y_3)+y_3y_5(y_3-y_5)+y_5y_2(y_5-y_2)\}\\&+x_1x_5(x_1-x_5)\{y_2y_3(y_2-y_3)+y_3y_4(y_3-y_4)+y_4y_2(y_4-y_2)\}\\&-x_2x_3(x_2-x_3)\{y_1y_4(y_1-y_4)+y_4y_5(y_4-y_5)+y_5y_1(y_5-y_1)\}\\&+x_2x_4(x_2-x_4)\{y_1y_3(y_1-y_3)+y_3y_5(y_3-y_5)+y_5y_1(y_5-y_1)\}\\&-x_2x_5(x_2-x_5)\{y_1y_3(y_1-y_3)+y_3y_4(y_3-y_4)+y_4y_1(y_4-y_1)\}\\&-x_3x_4(x_3-x_4)\{y_1y_2(y_1-y_2)+y_2y_5(y_2-y_5)+y_5y_1(y_5-y_1)\}\\&+x_3x_5(x_3-x_5)\{y_1y_2(y_1-y_2)+y_2y_4(y_2-y_4)+y_4y_1(y_4-y_1)\}\\&-x_4x_5(x_4-x_5)\{y_1y_2(y_1-y_2)+y_2y_3(y_2-y_3)+y_3y_1(y_3-y_1)\};\end{aligned}$$

aher ist nach der obigen allgemeinen Relation:

$$\begin{aligned}Q'=&\;x_1x_2(x_1-x_2).(y_3-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_3)\\&-x_1x_3(x_1-x_3).(y_2-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_2)\\&+x_1x_4(x_1-x_4).(y_2-y_3)(y_3-y_5)(y_5-y_2)\\&-x_1x_5(x_1-x_5).(y_2-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_2)\\&+x_2x_3(x_2-x_3).(y_1-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_1)\\&-x_2x_4(x_2-x_4).(y_1-y_3)(y_3-y_5)(y_5-y_1)\\&+x_2x_5(x_2-x_5).(y_1-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_1)\\&+x_3x_4(x_3-x_4).(y_1-y_2)(y_2-y_5)(y_5-y_1)\\&-x_3x_5(x_3-x_5).(y_1-y_2)(y_2-y_4)(y_4-y_1)\\&+x_4x_5(x_4-x_5).(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1).\end{aligned}$$

Vergleicht man aber diesen Ausdruck der Grösse Q' mit dem Ausdrucke 13) dieser Grösse, so erhellet auf der Stelle, dass der letztere ungeändert bleibt, wenn man die Symbole x und y gegen einander vertauscht.

Wenn auch im Vorhergehenden

$$A=P', \; B=-Q', \; C=R', \; D=S', \; E=T'$$

gesetzt worden ist, so ist doch zu bemerken, dass dies nur de Kürze wegen geschehen, und allerdings eigentlich bloss

$$A:B:C:D:E=P':-Q':R':S':T'$$

ist.

Dividiren wir nun aber die Gleichung 1) durch y^2, so erha ten wir

$$A+B\frac{x}{y}+C\frac{x^2}{y^2}+D\frac{1}{y}+E\frac{x}{y^2}+F\frac{1}{y^2}=0,$$

also, wie leicht erhellet:

$$F\left(\frac{1}{y}\right)^2+E\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}+C\left(\frac{x}{y}\right)^2+D\frac{1}{y}+B\frac{x}{y}+A=0.$$

Vergleicht man aber diese Gleichung mit der Gleichung 1 so wird auf der Stelle erhellen, dass man das Verhältniss

$$F:C$$

aus dem vorher gefundenen Verhältnisse

$$A:C=P':R'$$

erhält, wenn man in letzterem für die Symbole x, y respectiv $\frac{x}{y}$, $\frac{1}{y}$ setzt. Dadurch ergiebt sich

$$\begin{aligned}
F:C= & \;\frac{1}{y_1y_2}\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_2}{y_2}\right)\cdot\left(\frac{x_3}{y_3}-\frac{x_4}{y_4}\right)\left(\frac{x_4}{y_4}-\frac{x_5}{y_5}\right)\left(\frac{x_5}{y_5}-\frac{x_3}{y_3}\right)\\
&-\frac{1}{y_1y_3}\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_3}{y_3}\right)\cdot\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_4}{y_4}\right)\left(\frac{x_4}{y_4}-\frac{x_5}{y_5}\right)\left(\frac{x_5}{y_5}-\frac{x_2}{y_2}\right)\\
&+\frac{1}{y_1y_4}\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_4}{y_4}\right)\cdot\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_3}{y_3}\right)\left(\frac{x_3}{y_3}-\frac{x_5}{y_5}\right)\left(\frac{x_5}{y_5}-\frac{x_2}{y_2}\right)\\
&-\frac{1}{y_1y_5}\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_5}{y_5}\right)\cdot\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_3}{y_3}\right)\left(\frac{x_3}{y_3}-\frac{x_4}{y_4}\right)\left(\frac{x_4}{y_4}-\frac{x_2}{y_2}\right)\\
&+\frac{1}{y_2y_3}\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_3}{y_3}\right)\cdot\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_4}{y_4}\right)\left(\frac{x_4}{y_4}-\frac{x_5}{y_5}\right)\left(\frac{x_5}{y_5}-\frac{x_1}{y_1}\right)\\
&-\frac{1}{y_2y_4}\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_4}{y_4}\right)\cdot\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_3}{y_3}\right)\left(\frac{x_3}{y_3}-\frac{x_5}{y_5}\right)\left(\frac{x_5}{y_5}-\frac{x_1}{y_1}\right)\\
&+\frac{1}{y_2y_5}\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_5}{y_5}\right)\cdot\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_3}{y_3}\right)\left(\frac{x_3}{y_3}-\frac{x_4}{y_4}\right)\left(\frac{x_4}{y_4}-\frac{x_1}{y_1}\right)\\
&+\frac{1}{y_3y_4}\left(\frac{x_3}{y_3}-\frac{x_4}{y_4}\right)\cdot\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_2}{y_2}\right)\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_5}{y_5}\right)\left(\frac{x_5}{y_5}-\frac{x_1}{y_1}\right)\\
&-\frac{1}{y_3y_5}\left(\frac{x_3}{y_3}-\frac{x_5}{y_5}\right)\cdot\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_2}{y_2}\right)\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_4}{y_4}\right)\left(\frac{x_4}{y_4}-\frac{x_1}{y_1}\right)\\
&+\frac{1}{y_4y_5}\left(\frac{x_4}{y_4}-\frac{x_5}{y_5}\right)\cdot\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_2}{y_2}\right)\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_3}{y_3}\right)\left(\frac{x_3}{y_3}-\frac{x_1}{y_1}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&: \frac{x_1x_2}{y_1y_2}\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right).\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_4}\right)\left(\frac{1}{y_4}-\frac{1}{y_5}\right)\left(\frac{1}{y_5}-\frac{1}{y_3}\right)\\
&-\frac{x_1x_3}{y_1y_3}\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_3}\right).\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_4}\right)\left(\frac{1}{y_4}-\frac{1}{y_5}\right)\left(\frac{1}{y_5}-\frac{1}{y_2}\right)\\
&+\frac{x_1x_4}{y_1y_4}\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_4}\right).\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}\right)\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_5}\right)\left(\frac{1}{y_5}-\frac{1}{y_2}\right)\\
&-\frac{x_1x_5}{y_1y_5}\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_5}\right).\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}\right)\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_4}\right)\left(\frac{1}{y_4}-\frac{1}{y_2}\right)\\
&+\frac{x_2x_3}{y_2y_3}\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}\right).\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_4}\right)\left(\frac{1}{y_4}-\frac{1}{y_5}\right)\left(\frac{1}{y_5}-\frac{1}{y_1}\right)\\
&-\frac{x_2x_4}{y_2y_4}\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_4}\right).\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_3}\right)\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_5}\right)\left(\frac{1}{y_5}-\frac{1}{y_1}\right)\\
&+\frac{x_2x_5}{y_2y_5}\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_5}\right).\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_3}\right)\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_4}\right)\left(\frac{1}{y_4}-\frac{1}{y_1}\right)\\
&+\frac{x_3x_4}{y_3y_4}\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_4}\right).\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_5}\right)\left(\frac{1}{y_5}-\frac{1}{y_1}\right)\\
&-\frac{x_3x_5}{y_3y_5}\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_5}\right).\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_4}\right)\left(\frac{1}{y_4}-\frac{1}{y_1}\right)\\
&+\frac{x_4x_5}{y_4y_5}\left(\frac{1}{y_4}-\frac{1}{y_5}\right).\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}\right)\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_1}\right).
\end{aligned}
$$

Multiplicirt man nun die beiden Glieder des zweiten Verhältnisses mit

$$y_1{}^2y_2{}^2y_3{}^2y_4{}^2y_5{}^2,$$

so erhält man:

$$
\begin{aligned}
F:C= &\;(x_1y_2-x_2y_1).(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_3-x_3y_5)\\
&-(x_1y_3-x_3y_1).(x_2y_4-x_4y_2)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_2-x_2y_5)\\
&+(x_1y_4-x_4y_1).(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_5-x_5y_3)(x_5y_2-x_2y_5)\\
&-(x_1y_5-x_5y_1).(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_2-x_2y_4)\\
&+(x_2y_3-x_3y_2).(x_1y_4-x_4y_1)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_1-x_1y_5)\\
&-(x_2y_4-x_4y_2).(x_1y_3-x_3y_1)(x_3y_5-x_5y_3)(x_5y_1-x_1y_5)\\
&+(x_2y_5-x_5y_2).(x_1y_3-x_3y_1)(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_1-x_1y_4)\\
&+(x_3y_4-x_4y_3).(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_5-x_5y_2)(x_5y_1-x_1y_5)\\
&-(x_3y_5-x_5y_3).(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_4-x_4y_2)(x_4y_1-x_1y_4)\\
&+(x_4y_5-x_5y_4).(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_1-x_1y_3)\\
&: x_1x_2(y_1-y_2).(y_3-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_3)\\
&-x_1x_3(y_1-y_3).(y_2-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_2)\\
&+x_1x_4(y_1-y_4).(y_2-y_3)(y_3-y_5)(y_5-y_2)\\
&-x_1x_5(y_1-y_5).(y_2-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_2)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&+x_2x_3(y_2-y_3)\,.\,(y_1-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_1)\\
&-x_2x_4(y_2-y_4)\,.\,(y_1-y_3)(y_3-y_5)(y_5-y_1)\\
&+x_2x_5(y_2-y_5)\,.\,(y_1-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_1)\\
&+x_3x_4(y_3-y_4)\,.\,(y_1-y_2)(y_2-y_5)(y_5-y_1)\\
&-x_3x_5(y_3-y_5)\,.\,(y_1-y_2)(y_2-y_4)(y_4-y_1)\\
&+x_4x_5(y_4-y_5)\,.\,(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)
\end{aligned}$$

d. i. nach 16), wenn wir

$$\begin{aligned}
19)\quad U' = \;&(x_1y_2-x_2y_1)\,.\,(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_3-x_3y_5)\\
&-(x_1y_3-x_3y_1)\,.\,(x_2y_4-x_4y_2)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_2-x_2y_5)\\
&+(x_1y_4-x_4y_1)\,.\,(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_5-x_5y_3)(x_5y_2-x_2y_5)\\
&-(x_1y_5-x_5y_1)\,.\,(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_2-x_2y_4)\\
&+(x_2y_3-x_3y_2)\,.\,(x_1y_4-x_4y_1)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_1-x_1y_5)\\
&-(x_2y_4-x_4y_2)\,.\,(x_1y_3-x_3y_1)(x_3y_5-x_5y_3)(x_5y_1-x_1y_5)\\
&+(x_2y_5-x_5y_2)\,.\,(x_1y_3-x_3y_1)(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_1-x_1y_4)\\
&+(x_3y_4-x_4y_3)\,.\,(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_5-x_5y_2)(x_5y_1-x_1y_5)\\
&-(x_3y_5-x_5y_3)\,.\,(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_4-x_4y_2)(x_4y_1-x_1y_4)\\
&+(x_4y_5-x_5y_4)\,.\,(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_1-x_1y_3)
\end{aligned}$$

setzen:

$$F:C = U':R';$$

und weil nun nach dem Obigen $C=R'$ ist, so ist

$$20)\quad F = U'.$$

Also sind jetzt alle sechs Coefficienten der Gleichung

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

des durch die fünf gegebenen Punkte, deren Coordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4; x_5, y_5 sind, gehenden Kegelschnitts durch die Formeln 15), 18), 20) mit Bezug auf die Formeln 12), 13), 14), 16), 17), 19) vollständig bestimmt.

Wenn sechs Punkte in einem Kegelschnitte liegen sollen, so denke man sich den einen derselben als Anfang der Coordinaten angenommen, und bezeichne die Coordinaten der fünf anderen Punkte wie vorher durch

$$x_1, y_1;\; x_2, y_2;\; x_3, y_3;\; x_4, y_4;\; x_5, y_5.$$

Ist nun

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

die Gleichung des durch die sechs gegebenen Punkte gehenden Kegelschnitts, so erhält man natürlich für

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$$

ganz dieselben Werthe wie vorher, weil dieser Kegelschnitt durch die fünf Punkte

$$(x_1y_1),\ (x_2y_2),\ (x_3y_3),\ (x_4y_4),\ (x_5y_5)$$

geht. Weil derselbe aber auch durch den als Anfang der Coordinaten angenommenen sechsten Punkt gehen soll, so muss die Gleichung

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

auch für $x=0$, $y=0$ erfüllt sein, d. h. es muss $F=0$, folglich nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned}
21)\ 0=&(x_1y_2-x_2y_1).(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_3-x_3y_5)\\
&-(x_1y_3-x_3y_1).(x_2y_4-x_4y_2)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_2-x_2y_5)\\
&+(x_1y_4-x_4y_1).(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_5-x_5y_3)(x_5y_2-x_2y_5)\\
&-(x_1y_5-x_5y_1).(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_2-x_2y_4)\\
&+(x_2y_3-x_3y_2).(x_1y_4-x_4y_1)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_1-x_1y_5)\\
&-(x_2y_4-x_4y_2).(x_1y_3-x_3y_1)(x_3y_5+x_5y_3)(x_5y_1-x_1y_5)\\
&+(x_2y_5-x_5y_2).(x_1y_3-x_3y_1)(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_1-x_1y_4)\\
&+(x_3y_4-x_4y_3).(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_5-x_5y_2)(x_5y_1-x_1y_5)\\
&-(x_3y_5-x_5y_3).(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_4-x_4y_2)(x_4y_1-x_1y_4)\\
&+(x_4y_5-x_5y_4).(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_1-x_1y_3)
\end{aligned}$$

sein, welches also überhaupt die Bedingungsgleichung ist, die Statt finden muss, wenn die sechs gegebenen Punkte in einem Kegelschnitte liegen sollen.

Wenn wir die sechs gegebenen Punkte durch M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 bezeichnen, und

$$M_0,\ M_i,\ M_k$$

der Punkt M_0 und zwei beliebige andere Punkte M_i und M_k dieses Systems von sechs Punkten sind; so ist nach Archiv. Thl. III. S. 263. unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten

$$x_iy_k-x_ky_i$$

der positiv oder negativ genommene doppelte Flächeninhalt des Dreiecks

$$M_0\ M_i\ M_k,$$

jenachdem man sich, um von dem Punkte M_0 durch den Punkt M_i zu dem Punkte M_k zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss. Bezeichnen wir also

überhaupt den, jenachdem man sich, um von dem Punkte M_0 durch den Punkt M_i zu dem Punkte M_k zu gelangen, nach der einen oder nach der andern Seite hin bewegen muss, positiv oder negativ genommenen einfachen Flächeninhalt des Dreiecks $M_0 M_i M_k$ durch

$$\Delta_{0,i,k};$$

so ist nach 21) offenbar

$$
\begin{aligned}
22)\quad 0= \; & \Delta_{0,1,2}\cdot\Delta_{0,3,4}\cdot\Delta_{0,4,5}\cdot\Delta_{0,5,3}\\
& -\Delta_{0,1,3}\cdot\Delta_{0,2,4}\cdot\Delta_{0,4,5}\cdot\Delta_{0,5,2}\\
& +\Delta_{0,1,4}\cdot\Delta_{0,2,3}\cdot\Delta_{0,3,5}\cdot\Delta_{0,5,2}\\
& -\Delta_{0,1,5}\cdot\Delta_{0,2,3}\cdot\Delta_{0,3,4}\cdot\Delta_{0,4,2}\\
& +\Delta_{0,2,3}\cdot\Delta_{0,1,4}\cdot\Delta_{0,4,5}\cdot\Delta_{0,5,1}\\
& -\Delta_{0,2,4}\cdot\Delta_{0,1,3}\cdot\Delta_{0,3,5}\cdot\Delta_{0,5,1}\\
& +\Delta_{0,2,5}\cdot\Delta_{0,1,3}\cdot\Delta_{0,3,4}\cdot\Delta_{0,4,1}\\
& +\Delta_{0,3,4}\cdot\Delta_{0,1,2}\cdot\Delta_{0,2,5}\cdot\Delta_{0,5,1}\\
& -\Delta_{0,3,5}\cdot\Delta_{0,1,2}\cdot\Delta_{0,2,4}\cdot\Delta_{0,4,1}\\
& +\Delta_{0,4,5}\cdot\Delta_{0,1,2}\cdot\Delta_{0,2,3}\cdot\Delta_{0,3,1}
\end{aligned}
$$

die Bedingungsgleichung, dass die sechs gegebenen Punkte in einem Kegelschnitte liegen.

Das Gesetz, nach welchem die Glieder dieser Gleichung gebildet sind, fällt auf der Stelle in die Augen und wird hier einer weiteren Erläuterung nicht bedürfen.

Welchen der sechs gegebenen Punkte man für den Punkt M_0 setzen, und in welcher Ordnung man überhaupt die sechs gegebenen Punkte nehmen will, ist natürlich ganz willkührlich, was hier ebenfalls nicht weiter erläutert zu werden braucht. Die obige merkwürdige Gleichung findet ganz allgemein für jede sechs Punkte eines Kegelschnitts Statt, in welcher Ordnung man dieselben auch nehmen mag, und enthält daher zugleich eine merkwürdige allgemeine Eigenschaft der Kegelschnitte.

Welche Bedingungen erfüllt sein müssen, wenn der durch die fünf gegebenen Punkte

$$(x_1y_1),\ (x_2y_2),\ (x_3y_3),\ (x_4y_4),\ (x_5y_5)$$

gehende Kegelschnitt eine Parabel, eine Ellipse oder eine Hyperbel sein soll, kann hier als aus der allgemeinen Theorie der Linien des zweiten Grades hinreichend bekannt vorausgesetzt werden, und soll für jetzt der Kürze wegen hier nicht weiter ausgeführt werden, wenngleich sich uns hierdurch noch Gelegenheit zu manchen andern Entwickelungen darbieten würde.

Eine der obigen ähnliche Bearbeitung der Aufgabe, durch neun Punkte im Raume eine Fläche des zweiten Grades zu legen, und die Entwickelung der Bedingungsgleichung, welche erfüllt sein muss, wenn zehn Punkte im Raume in einer Fläche des zweiten Grades liegen sol-

len, oder wenn sich durch zehn gegebene Punkte im Raume eine Fläche des zweiten Grades legen lassen soll, hoffe ich der vorliegenden Abhandlung über die Linien des zweiten Grades späterhin nachfolgen lassen zu können. Vielleicht aber findet sich auch, was mir sehr lieb sein soll, einer der geehrten Leser des Archivs durch das Obige veranlasst, die genannte Aufgabe über die Flächen des zweiten Grades nach einer ähnlichen Methode zu bearbeiten, wie oben die einfachere analoge Aufgabe über die Linien des zweiten Grades bearbeitet worden ist. Sollte mir vielleicht ein desfallsiger Aufsatz zur Einrückung in's Archiv gütigst mitgetheilt werden, so werde ich für dessen möglichst baldigen Abdruck, wenn er mir überhaupt seinem Zwecke zu entsprechen scheint, Sorge tragen.

XXIX.

Zur Theorie des Integrallogarithmus.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Unter die bemerkenswerthesten Eigenschaften des Integrallogarithmus darf man vielleicht die folgende, wie es scheint, noch nicht bekannte zählen, dass sich die Differenz

$$li(e^u)-li(e^{\frac{1}{u}})$$

immer in eine Reihe von der Form

$$\frac{1}{1}P_1(u-\frac{1}{u})+\frac{1}{3}P_3(u-\frac{1}{u})^3+\frac{1}{5}P_5(u-\frac{1}{u})^5+....$$

verwandeln lässt, wobei jedoch die Coeffizienten P für positive und negative u nicht dieselben sind. Um diess zu zeigen, gehen wir von der Aufgabe aus, die Funktion $e^{a\sqrt{1+x}}$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln, wovon die Lösung sehr leicht ist, wenn man in dem Taylorschen Theoreme

$$f(\varkappa+x)=f(\varkappa)+\frac{f'(\varkappa)}{1}x+\frac{f''(\varkappa)}{1.2}x^2+....$$

$f(z)=e^{a\sqrt{z}}$ und $x=1$ nimmt. Es wird dann unter Anwendung einer Formel, welche ich in meiner Differenzialrechnung S. 93. bewiesen habe,

$$f^{(n)}(z)=\frac{\partial^n(e^{a\sqrt{z}})}{\partial z^n}=$$

$$\left(\frac{a}{2\sqrt{z}}\right)^n\left[1-\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{a\sqrt{z}}\right)+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4}\left(\frac{1}{a\sqrt{z}}\right)^2\right.$$
$$\left.-\frac{(n+2)(n+1)\ldots.(n-3)}{2.4.6}\left(\frac{1}{a\sqrt{z}}\right)^3+\ldots.\right]e^{a\sqrt{z}},$$

woraus für $z=1$ und nach Division mit $1.2.3.\ldots.n$ folgt, dass der Coeffizient von x^n, den wir mit Q_{2n} bezeichnen wollen, durch die Formel

$$Q_{2n}=\frac{a^n e^a}{2.4.6.\ldots(2n)}\left[1-\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{a}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4}\cdot\frac{1}{a^2}\right.$$
$$\left.-\frac{(n+2)(n+1)\ldots.(n-3)}{2.4.6}\cdot\frac{1}{a^3}+\ldots\ldots\right] \quad (1)$$

ausgedrückt wird, und demnach für die so bestimmten Werthe von Q

$$e^{a\sqrt{1+x}}=Q_0+Q_2x+Q_4x^2+Q_6x^3+\ldots,$$

oder wenn man x^2 für x schreibt:

$$e^{a\sqrt{1+x^2}}=Q_0+Q_2x^2+Q_4x^4+Q_6x^6+\ldots. \quad (2)$$

ist. Die Gränzen für die Gültigkeit dieses Resultates sind leicht mittelst des Cauchy'schen Theoremes a priori abzusehen. Die Differenzialquotienten der Funktion $e^{\sqrt{1+x^2}}$ sind nämlich Brüche, welche verschiedene Potenzen von $1+x^2$ zu Nennern haben und daher für $x=1.\sqrt{-1}$ unstetig und unendlich werden; es muss daher der Modulus von x kleiner als der Modulus 1 desjenigen x sein, für welches die Discontinuität eintritt. Die Gültigkeit der Gleichung (2) ist daher an die Bedingung

$$1>\operatorname{mod}x>-1$$

geknüpft. Diess sieht man auch leicht a posteriori ein; nähme man z. B. $x=(1+\omega)\sqrt{-1}$, wo ω eine positive Grösse ist, so würde die linke Seite in

$$e^{a\sqrt{2\omega+\omega^2}\sqrt{-1}}=\cos[a\sqrt{2\omega+\omega^2}]+\sqrt{-1}\sin[a\sqrt{2\omega+\omega^2}]$$

übergehen, und da die rechte Seite reell bleibt, so würde durch Vergleichung der reellen und imaginären Partieen das völlig absurde Resultat

$$\sin[a\sqrt{2\omega+\omega^2}]=0$$

herauskommen. — Differenziren wir nun die Gleichung (2) nach x, so ergiebt sich für $1 > \mathrm{mod}\, x > -1$

$$\frac{a}{\sqrt{1+x^2}} e^{a\sqrt{1+x^2}} = 2Q_2 + 4Q_4 x^2 + 6Q_6 x^4 + \ldots \tag{3}$$

und diese Gleichung werde Seite für Seite mit der folgenden multiplizirt:

$$\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} = 1 + \frac{a^2 x^2}{1.2} + \frac{a^4 x^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

Man findet so ohne Schwierigkeit:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{2\sqrt{1+x^2}}\left[e^{a(\sqrt{1+x^2}+x)} + e^{a(\sqrt{1+x^2}-x)}\right] \\ = R_0 + R_2 x^2 + R_4 x^4 + R_6 x^6 + \ldots. \end{array}\right\} \tag{4}$$

wobei die Werthe der mit R bezeichneten Coeffizienten durch die Formel

$$\left.\begin{array}{l} R_{2n} = (2n+2)\, Q_{2n+2} + \dfrac{(2n)\, Q_{2n}}{1.2} a^2 + \dfrac{(2n-2)\, Q_{2n-2}}{1.2.3.4} a^4 + \ldots \\ \qquad \ldots + \dfrac{2Q_2}{1.2.3\ldots(2n)} a^{2n} \end{array}\right\} \tag{5}$$

bestimmt werden. Setzen wir ferner in der Formel (4)

$$\sqrt{1+x^2} + x = u, \tag{6}$$

also

$$\sqrt{1+x^2} - x = \frac{1}{u};$$

so wird $2\sqrt{1+x^2} = u + \frac{1}{u}$, $x = \frac{1}{2}(u - \frac{1}{u})$, und hiernach ergiebt sich

$$\frac{a}{u+\frac{1}{u}}\left[e^{au} + e^{\frac{a}{u}}\right] = R_0 + \frac{R_2}{2^2}(u - \frac{1}{u})^2 + \frac{R_4}{2^4}(u - \frac{1}{u})^4 + \ldots,$$

und nach beiderseitiger Multiplikation mit

$$(1 + \frac{1}{u^2})\partial u = \frac{1}{u}(u + \frac{1}{u})\partial u$$

wird aus der vorigen Gleichung:

$$\frac{a}{u}[e^{au}+e^{\frac{a}{u}}]\partial u$$
$$=(1+\frac{1}{u^2})\partial u[R_0+\frac{R_2}{2^2}(u-\frac{1}{u})^2+\frac{R_4}{2^4}(u-\frac{1}{u})^4+\ldots]$$
$$=\partial[\frac{R_0}{1}(u-\frac{1}{u})+\frac{R_2}{3.2^2}(u-\frac{1}{u})^3+\frac{R_4}{5.2^4}(u-\frac{1}{u})^5+\ldots].$$

Nach der Definition des Integrallogarithmus ist nun bekanntlich

$$\int\frac{\partial z}{z}e^z=li(e^z)+\text{Const.},$$

woraus für $z=au$ und $z=\frac{a}{u}$ folgt:

$$\int\frac{\partial u}{u}e^{au}=li(e^{au})+C',$$
$$\int\frac{\partial u}{u}e^{\frac{a}{u}}=-li(e^{\frac{a}{u}})+C''.$$

Diese Formeln kann man zur Integration der vorhergehenden Gleichung benutzen; man erhält so:

$$a[li(e^{au})-li(e^{\frac{a}{u}})]+\text{Const.}$$
$$=\frac{1}{1}R_0(u-\frac{1}{u})+\frac{1}{3}\frac{R_2}{2^2}(u-\frac{1}{u})^3+\frac{1}{5}\frac{R_4}{2^4}(u-\frac{1}{u})^5+\ldots$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung ist an die Gränzen

$$\sqrt{2}+1>u>\sqrt{2}-1 \qquad (7)$$

gebunden, wie man sogleich bemerken wird, wenn man in die Gleichung (6) die Gränzwerthe $+1$ und -1 für x einführt. Nehmen wir in der vorigen Gleichung $u=1$, wodurch die Bedingung (7) erfüllt ist, so ergiebt sich $C=0$, und wenn wir

$$\frac{R_{2n}}{2^{2n}a}=P_{2n+1}$$

setzen, so ist jetzt

$$\left.\begin{aligned}&li(e^{au})-li(e^{\frac{a}{u}})\\&=\frac{1}{1}P_1(u-\frac{1}{u})+\frac{1}{3}P_3(u-\frac{1}{u})^3+\frac{1}{5}P_5(u-\frac{1}{u})^5+\ldots\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

wobei noch die Bedingung (7) erfüllt sein muss. Wir wollen nun die beiden Spezialisirungen $a=+1$ und $a=-1$ untersuchen. Für die erste ist

$$\left.\begin{array}{l} li(e^u)-li(e^{\frac{1}{u}}) \\ =\frac{1}{1}P_1(u-\frac{1}{u})+\frac{1}{3}P_3(u-\frac{1}{u})^3+\frac{1}{5}P_5(u-\frac{1}{u})^5+\ldots \end{array}\right\} \quad (9)$$

d nach dem Früheren

$$Q_{2n}=\frac{e}{2.4....(2n)}[1-\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4}-....] \quad (10)$$

$$P_{2n-1}=\frac{1}{2^{2n-2}}\left[(2n)Q_{2n}+\frac{(2n-2)Q_{2n-2}}{1.2}+....+\frac{2Q_2}{1.2....(2n-2)}\right] \quad (11)$$

Für $n=1, 2, 3, ...$ geben diese Formeln sehr leicht:

$$Q_2=\frac{e}{2},\ Q_4=0,\ Q_6=\frac{e}{2.4.6},....;$$

$$P_1=e,\ P_3=\frac{e}{2.4},\ P_5=\frac{4e}{2.4.6.8},....$$

Nimmt man dagegen in No. (8) a negativ, so wird

$$\left.\begin{array}{l} li(e^{-u})-li(e^{-\frac{1}{u}}) \\ =\frac{1}{1}P_1(u-\frac{1}{u})+\frac{1}{3}P_3(u-\frac{1}{u})^3+\frac{1}{5}P_5(u-\frac{1}{u})^5+\ldots \end{array}\right\} \quad (12)$$

d dabei ist

$$Q_{2n}=\frac{(-1)^n\frac{1}{e}}{2.4....(2n)}[1+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4}+....] \quad (13)$$

$$P_{2n-1}=-\frac{1}{2^{2n-2}}[(2n)Q_{2n}+\frac{(2n-2)Q_{2n-2}}{1.2}+\ldots+\frac{2Q_2}{1.2...(2n)}] \quad (14)$$

Hieraus findet man leicht

$$Q_2=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e},\ Q_4=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{e},\ Q_6=-\frac{7}{2.4.6}\cdot\frac{1}{e},...;$$

$$P_1=\frac{1}{e},\ P_3=-\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{e},\ P_5=\frac{10}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{e},...;$$

o ganz andere Werthe für die Coeffizienten. Man sieht hier-, dass die Formel (9) nicht für negative u in Anspruch genomn werden darf, weil sie dann ein von dem in (12) verzeichneten z verschiedenes und desshalb falsches Resultat geben würde. *)

---

*) Beispiele dieser Art widerlegen die Deklamationen, die man noch hie da über die allgemeine Gültigkeit der Taylorschen Formel, über synsche Geheimnisse etc. hört, am allerbesten. Wäre die Taylorsche e allgemein richtig, so müsste es auch die Formel (9) sein, sie müsste

Zu der Formel (12) kann man übrigens auch noch auf einem anderen Wege gelangen, der durch seine Kürze bemerkenswerth ist. Bezeichnet man nämlich mit T den unbekannten Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x} \operatorname{Arctan} \frac{x}{t} \partial x \tag{15}$$

der offenbar nur von t abhängt, so ist

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\int_0^\infty \frac{\cos x}{t^2+x^2} \partial x,$$

und der Werth des Integrales rechts ist nach einer sehr bekannten Formel $= -\frac{\pi}{2t}e^{-t}$, mithin $T = -\frac{\pi}{2}\int \frac{\partial t}{t} e^{-t}$ oder

$$-\frac{\pi}{2}\int \frac{\partial t}{t} e^{-t} + \text{Const} = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x} \operatorname{Arctan} \frac{x}{t} \partial x,$$

was aber nur für positive t gilt, weil die so eben benutzte Integralformel nur für solche t besteht. Setzen wir $t=\tau$, $t=\infty$ und subtrahiren die beiden so entstehenden Gleichungen, so wird

---

also auch für negative u gelten, was gegenüber der Gleichung (12) zu Resultaten wie $-e = \frac{1}{e}$ führen würde. Die Sache ist aber sehr einfach. Wer eine Gleichung von der Form

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

hinschreibt, der sagt eigentlich, ich will eine Parabel $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ construiren, die sich möglichst genau an eine gegebene Curve $y = f(x)$ anschliesst und zwar um so genauer, je höher der Grad der Parabel ist. Eine Parabel verläuft aber immer stetig, daher kann ihre Identität (Deckung) mit der Curve $y = f(x)$ nur so lange statt finden, als die letztere ebenfalls stetig verläuft; tritt also z. B. für $x = \xi$ eine Discontinuität in $f(x)$ ein, so hört an dieser Stelle die Identität zwischen $y = f(x)$ und $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ auf, wenn sie vorher bestanden hat, weil sich eine unstetige und eine stetige Curve nicht durchweg decken können. Ueber $x = \xi$ hinaus giebt $y = A_0 + A_1 x + \ldots$ die Fortsetzung der Parabel, aber nicht der Curve $y = f(x)$, und beide Grössenformen haben gar keine Beziehung mehr mit einander, weil es unzählige Curven $y = f(x)$ geben kann, welche für $x < \xi$ identisch sind, für $x = \xi$ unstetig werden, aber für $x > \xi$ ganz willkührlich und von einander verschieden verlaufen. Es kann nun der Fall eintreten, dass die Funktion $y = f(x)$ stetig bleibt von $x = -\infty$ bis $x = \xi$ und von $x = \xi$ bis $x = +\infty$, aber bei ξ diskontinuirlich wird; dann giebt es zwei verschiedene Parabeln, welche mit den beiden Zweigen von $y = f(x)$ zusammenfallen, also zwei ganz verschiedene Reihen für $f(x)$, jenachdem $x < \xi$ oder $x > \xi$ ist. Diess haben wir in unserer Betrachtung, denn $U(v)$ ist eine an der Stelle $v = 1$ discontinuirliche aber sonst stetige Funktion, und daher also die doppelte Reihenform. Diese Bemerkung lässt sich übrigens leicht auf den Fall ausdehnen, dass $f(x)$ mehrmals discontinuirlich wird.

$$-\frac{\pi}{2}\int_x^\tau \frac{\partial t}{t}e^{-t}=\int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{Arctan}\frac{x}{\tau}\partial x-0,$$

d. i.

$$-\frac{\pi}{2}li(e^{-\tau})=\int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{Arctan}\frac{x}{\tau}\partial x.$$

Hieraus ergiebt sich leicht

$$li(e^{-u})-li(e^{-\frac{1}{u}})=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{Arctan}\frac{(u-\frac{1}{u})x}{1+x^2}\partial x,$$

und wenn man für $\sqrt{2}+1>u>\sqrt{2}-1$, wo immer

$$1>\frac{(u-\frac{1}{u})x}{1+x^2}>-1$$

ist, den Arctan in eine Reihe verwandelt, so wird

$$li(e^{-u})-li(e^{-\frac{1}{u}})$$
$$=\frac{1}{1}J_1(u-\frac{1}{u})-\frac{1}{3}J_3(u-\frac{1}{u})^3+\frac{1}{5}J_5(u-\frac{1}{u})^5-\ldots,$$

worin die Grössen J durch die Formel

$$J_{2n+1}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2n}\cos x}{(1+x^2)^{2n+1}}\partial x$$

bestimmt werden, wobei das Integral sich leicht näher ausführen lässt.

XXX.

Ueber die höheren Differenzialquotienten der Potenzen des Cosinus.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Differenzirt man mehrmals hintereinander den Ausdruck $\cos^\mu x$, so findet man leicht, dass die Differenzialquotienten gerader Ordnung unter der Form stehen:

$$(-1)^n \frac{\partial^{2n} \cos^\mu x}{\partial x^{2n}} = A_0 \cos^\mu x + A_2 \cos^{\mu-2} x + A_4 \cos^{\mu-4} x + \ldots$$
$$\ldots\ldots + A_{2n} \cos^{\mu-2n} x, \qquad (1)$$

worin A_0, A_2, A_4, A_6 etc. gewisse rein numerische Coeffizienten bedeuten, welche nur von μ und n abhängen. Da man ferner jeden Differenzialquotienten ungerader Ordnung dadurch erhält, dass man seinen Vorgänger, der gerader Ordnung ist, noch einmal differenzirt, so ist klar, dass zur Entwickelung von $\frac{\partial^m \cos^\mu x}{\partial x^m}$ überhaupt die Entwickelung des Falles $m = 2n$ hinreicht. Diese letztere ist aber vollständig gegeben, wenn man in der Gleichung (1) die mit A bezeichneten Coeffizienten independent bestimmen kann. Für den Fall, dass μ eine ganze positive Zahl ist, wird diese Bestimmung durch keine wesentlichen Hindernisse erschwert, wenn man einige Kunstgriffe anwendet; ich mache dieselbe bekannt, weil sie vielleicht zu weiteren Untersuchungen über den, wie es scheint, ungleich schwereren Fall eines ganz beliebigen μ Veranlassung giebt.

Bezeichnen wir mit μ_0, μ_1, μ_2 etc. die Binomialkoeffizienten des Exponenten μ, so ist bekanntlich

$$(2\cos x)^\mu = \mu_0 \cos \mu x + \mu_1 \cos(\mu-2)x + \mu_2 \cos(\mu-4)x + \ldots,$$

wobei die Reihe soweit fortgesetzt wird, bis sie von selbst abbricht. Es ergiebt sich hieraus sogleich:

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^n \frac{\partial^{2n}(2\cos x)^\mu}{\partial x^{2n}} \\ &= \mu_0 \mu^{2n} \cos \mu x + \mu_1 (\mu-2)^{2n} \cos(\mu-2)x \\ &\quad + \mu_2 (\mu-4)^{2n} \cos(\mu-4)x + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Andererseits ist nach einem bekannten Theoreme:

$$2\cos mx = (2\cos x)^m - \frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2}(2\cos x)^{m-4}$$
$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}(2\cos x)^{m-6} + \ldots,$$

wobei aber m nur eine ganze positive Zahl sein darf. Man kann dafür auch schreiben:

$$2\cos mx = (2\cos x)^m - \frac{m}{1}(m-2)_0 (2\cos x)^{m-2}$$
$$+ \frac{m}{2}(m-3)_1 (2\cos x)^{m-4} - \ldots;$$

und wenn man mittelst dieser Formel jedes einzelne Glied der Reihe rechts in (1) in eine nach Potenzen von $2\cos x$ fortschreitende Reihe verwandelt, so kann man nachher die ganze rechte Seite nach solchen Potenzen ordnen; man erhält hierdurch ohne Schwierigkeit:

$$(-1)^n 2^{\mu+1} \frac{\partial^{2n} \cos^\mu x}{\partial x^{2n}}$$

$$= \mu_0 \mu_{2n} (2\cos x)^\mu$$

$$+ [\mu_1 (\mu-2)^{2n} - \mu_0 \mu^{2n} . \frac{\mu}{1} (\mu-2)_0] (2\cos x)^{\mu-2}$$

$$+ [\mu_2 (\mu-4)^{2n} - \mu_1 (\mu-2)^{2n} . \frac{\mu-2}{1} (\mu-4)_0 + \mu_0 \mu^{2n} . \frac{\mu}{2} (\mu-3)_1] (2\cos x)^{\mu-4},$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder mit anderen Worten: wenn

$$(-1)^n \frac{\partial^{2n} \cos^\mu x}{\partial x^{2n}} = A_0 \cos^\mu x + A_2 \cos^{\mu-2} x + A_4 \cos^{\mu-4} x + \ldots$$
$$\ldots + A_{2n} \cos^{\mu-2n} x \qquad (2)$$

gesetzt wird, so ist für ein ganzes positives p:

$$\begin{aligned} A_{2p} &= \tfrac{1}{2} \mu_p (\mu-2p)^{2n} \\ &- \frac{\mu_{p-1} (\mu-2p)_0}{2} (\mu-2p+2)^{2n+1} \\ &+ \frac{\mu_{p-2} (\mu-2p+1)_1}{4} (\mu-2p+4)^{2n+1} \\ &- \frac{\mu_{p-3} (\mu-2p+2)_2}{6} (\mu-2p+6)^{2n+1} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\pm \frac{\mu_0 (\mu-p-1)_{p-1}}{2p} \mu^{2n+1}, \end{aligned} \qquad (3)$$

worin das Bildungsgesetz der Coeffizienten mit völliger Deutlichkeit ausgesprochen liegt.

Da aus der Gleichung (2) hervorgeht, dass A_{2n+2}, A_{2n+4}, etc. nicht vorkommen können, so folgt, dass für $p > n$ immer $A_{2p} = 0$ sein muss, was einen rein algebraischen Satz giebt, dessen Beweis jedoch, einer brieflichen Mittheilung des Herrn Dr. Arndt zufolge, den gewöhnlichen Mitteln Trotz zu bieten scheint.

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{(-1)^n}{1.2\ldots(2n)} [A_0 + A_2 + \ldots + A_{2n}] = C_{2n},$$

so ist

$$\cos^\mu x = C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4 + C_6 x^6 + \ldots,$$

wie man leicht mittelst des Mac-Laurinschen Theoremes einsieht.

XXXI.

Einfache Construction des Krümmungshalbmessers der Kegelschnitte.

Von dem
Herrn Fabriken-Kommissionsrathe A. Brix
zu Berlin.

Es sei VAV' (Taf. VII. Fig. 4.) ein Kegelschnitt, F dessen Brennpunkt und Q ein beliebiger Curvenpunkt, für welchen $AP = x$, $PQ = y$ die Coordinaten, $QN = z$ die Normale und $PN = u$ die Subnormale vorstellen.

Man ziehe durch Q und F die Sekante QM, errichte in N das Perpendikel NM auf QN, welches die Sekante in M schneidet; dann ziehe man MO senkrecht auf QM und verlängere die Normale bis zum Durchschnitt O mit dieser Senkrechten, so ist QO der Krümmungshalbmesser des Curvenpunktes Q.

Einen einfachen geometrischen Beweis dieser Construction zu finden, ist mir noch nicht gelungen, wogegen ihre Uebereinstimmung mit den analytischen Formeln leicht nachzuweisen ist. Geht man nämlich von der Gleichung

$$y^2 = mx + nx^2$$

aus, so ist

$$u = \tfrac{1}{2}(m + 2nx), \quad z = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{m^2 + 4(n+1)(mx + nx^2)}$$

und

$$QO = \varrho = \frac{1}{2m^2}\sqrt{[m^2 + 4(n+1)(mx + nx^2)]^3} = \frac{4z^3}{m^2}.$$

Nach obiger Construction findet man aber leicht, die in der Figur angegebene Bezeichnung berücksichtigend:

$$QO = \varrho = z . \sec^2(\varphi + \psi) = z(1 + \operatorname{tg}^2(\varphi + \psi)).$$

Nun ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{u}{y}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{PF}{PQ} = \frac{x - AF}{y};$$

folglich, da $AF = \frac{m}{2n}(-1 + \sqrt{1+n})$:

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{m+2nx-m\sqrt{1+n}}{2ny}=\frac{2u-m\sqrt{1+n}}{2ny}.$$

Es ist aber

$$\operatorname{tg}(\varphi+\psi)=\frac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\psi}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi},$$

und wenn für $\operatorname{tg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\psi$ die obigen Werthe eingesetzt werden:

$$\operatorname{tg}(\varphi+\psi)=\frac{2u(1+n)-m\sqrt{1+n}}{2ny^2-2u^2+mu\sqrt{1+n}}.y$$
$$=\frac{2y}{m}\sqrt{1+n}.$$

Ferner hat man

$$\sec^2(\varphi+\psi)=1+\operatorname{tg}^2(\varphi+\psi);$$

also

$$\sec^2(\varphi+\psi)=\frac{m^2+4(n+1)y^2}{m^2}=\frac{4z^2}{m^2}.$$

Oben war $\varrho=z.\sec^2(\varphi+\psi)$ angegeben, also ist nun

$$\varrho=\frac{4z^3}{m^2},$$

übereinstimmend mit der analytischen Formel für den Krümmungshalbmesser.

XXXII.

Bemerkung zu Aufgabe 23. in: „Die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks. Von C. Adams. Winterthur. 1846."

Von dem

Herrn Doctor H. Hoffmann,

Lehrer am Gymnasium zu Danzig.

Bei Aufgabe 23. a. a. O. ist die Bemerkung nöthig, dass die Auflösung keinesweges allgemein ist und nur gilt, wenn von den

drei Höhen h_1, h_2, h_3 die Summe je zweier grösser ist, als die dritte; denn es ist diese Voraussetzung durchaus nicht die Bedingung für die Möglichkeit der Aufgabe.

Diese Bedingung ist für den Fall, dass $h_1 > h_2$ ist:

$$\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_1}>\frac{1}{h_3} \text{ oder } h_3>\frac{h_1 h_2}{h_1+h_2}$$

und

$$\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1}<\frac{1}{h_3} \text{ oder } h_3<\frac{h_1 h_2}{h_1-h_2}.$$

Es wird allerdings der Fall eintreten, dass h_3 zwischen diesen Grenzen und zugleich zwischen den Grenzen

$$h_3 > h_1 - h_2,\ h_3 < h_1 + h_2$$

liegt; doch wird es Werthe für h_1 und h_2 geben, wo die ersten Grenzen ganz ausserhalb der zweiten liegen, wenn nämlich

$$\frac{h_1 h_2}{h_1-h_2}<h_1-h_2 \text{ oder } h_2<\tfrac{1}{2}h_1(3-\sqrt{5}).$$

Wird h_2 grösser angenommen, so werden sich jene beiden Grenzen, die wahren und die zufälligen, theilweise decken, bis sie endlich ganz zusammenfallen. Dies geschieht, wenn

$$\frac{h_1 h_2}{h_1-h_2}=h_1+h_2$$

und

$$\frac{h_1 h_2}{h_1+h_2}=h_1-h_2$$

oder

$$h_2=\tfrac{1}{2}h_1(\sqrt{5}-1).$$

Wächst h_2 noch weiter, so werden die wahren Grenzen zwar wieder über jene zufälligen hinaustreten, sie jedoch nicht mehr ganz verlassen, da der Bedingung

$$\frac{h_1 h_2}{h_1+h_2}>h_1+h_2$$

kein reeller Werth von h_2 entspricht.

Man kann die jedesmaligen Grenzen für h_3 unter der gemachten Voraussetzung $h_1 > h_2$ auf einfache Weise durch eine Figur darstellen.

Ist in Taf. VIII. Fig. 9. $AB=h_1$, so mache man $BC=BC'$ $=h_2$, errichte in C und C' die Perpendikel $CD=C'D'=h_2$, und ziehe AD und AD', so sind die wahren Grenzen von h_3 BE und BE', die zufälligen AC und AC'.

Es wird nun h_3 nicht zwischen AC und AC' liegen können, wenn Bc so genommen ist, dass $Ac \geqq Be$. Die Construction giebt für diesen Fall $h_2 \leqq Bc$, wo AB in c so getheilt ist, dass

$$Bc : Ac = Ac : AB. \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

enn da $Be = Ac$ sein soll, so folgt diese Proportion sogleich aus

$$Ac : cd = AB : Be.$$

Hiemit ist zugleich der Werth von h_2 für den Fall gefunden, ıss die wahren und zufälligen Grenzen sich decken, dass also $C = BE'$ und $AC' = BE$. Denn mit Hilfe dieser Bedingung wird ıs

$$AC : CD = AB : BE \text{ und } AC' : C'D' = AB : BE'$$

ntstehen:

$$AC : BC = AB : AB + BC \text{ und } AB + BC : BC = AB : AC;$$

us beiden aber folgt:

$$AC : BC = BC : AB. \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Vergleicht man 1) und 2) mit einander, so folgt:

$$Bc = AC \text{ und } Ac = BC.$$

XXXIII.

Ein Paar Tetraedersätze.

Von dem

Herrn Schulrath J. H. T. Müller,

Director des Realgymnasiums zu Wiesbaden.

1. Werden in den vier Seitenflächen

$$A, B, C, D$$

nes Tetraeders, deren Gegenscheitel

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$$

ıd, vier Punkte

$$\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$$

gestalt angenommen, dass die Geraden

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}',\ \mathfrak{d}\mathfrak{d}'$$

einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt

$$\mathfrak{o}$$

haben, und bezeichnet man die in

A liegenden Dreiecke $\mathfrak{a}'\mathfrak{c}\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}'\mathfrak{d}\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ mit $A_B,\ A_C,\ A_D$;
B „ „ $\mathfrak{b}'\mathfrak{d}\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}'\mathfrak{a}\mathfrak{c},\ \mathfrak{b}'\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ „ $B_C,\ B_D,\ B_A$;
C „ „ $\mathfrak{c}'\mathfrak{a}\mathfrak{b},\ \mathfrak{c}'\mathfrak{b}\mathfrak{d},\ \mathfrak{c}'\mathfrak{d}\mathfrak{a}$ „ $C_D,\ C_A,\ C_B$;
D „ „ $\mathfrak{d}'\mathfrak{b}\mathfrak{c},\ \mathfrak{d}'\mathfrak{c}\mathfrak{a},\ \mathfrak{d}'\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ „ $D_A,\ D_B,\ D_C$;

wo der jedesmalige Zeiger die dem Theildreiecke anliegende Tetraederfläche ist, so finden folgende Beziehungen statt:

$$A_C.C_B.B_D.D_A = A_D.D_B.B_C.C_A = A_B.B_A.C_D.D_C,$$
$$A_D.D_C.C_B.B_A = A_B.B_C.C_D.D_A = A_C.C_A.B_D.D_B,$$
$$A_B.B_D.D_C.C_A = A_C.C_D.D_B.B_A = A_D.D_A.B_C.C_B.$$

Diese drei Gleichheiten von vierfactorigen Producten gehören der Reihe nach den drei einfachen gebrochenen geradlinigen Vierecken

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{b}\mathfrak{c},\quad \mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{c}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d},\quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{b}$$

mit den Diagonalen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b},\ \mathfrak{c}\mathfrak{d};\quad \mathfrak{a}\mathfrak{c},\ \mathfrak{b}\mathfrak{d};\quad \mathfrak{a}\mathfrak{d},\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

zu, welche durch die vier gegebenen Tetraederecken bestimmt sind.

Für jedes solche Viereck ist demnach unter der oben gemachten Voraussetzung

> *das Product aus den vier Theildreiecken, welche dessen Diagonalen anliegen, gleich den Producten aus den vier dessen Seiten anliegenden Theildreiecken, von denen keine zwei derselben Tetraederfläche angehören.*

Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich leicht, wenn man, die Tetraeder, welche $\mathfrak{o}$ zur gemeinschaftlichen Spitze und A, B, C, D zu Grundflächen haben, mit $\mathfrak{T}_A$, $\mathfrak{T}_B$, $\mathfrak{T}_C$, $\mathfrak{T}_D$ bezeichnend, die sich augenblicklich ergebenden Verhältnissgleichheiten

$$\mathfrak{T}_A:\mathfrak{T}_B:\mathfrak{T}_C = D_A:D_B:D_C,$$
$$\mathfrak{T}_B:\mathfrak{T}_C:\mathfrak{T}_D = A_B:A_C:A_D,$$
$$\mathfrak{T}_C:\mathfrak{T}_D:\mathfrak{T}_A = B_C:B_D:B_A,$$
$$\mathfrak{T}_D:\mathfrak{T}_A:\mathfrak{T}_B = C_D:C_A:C_B$$

bildet, und diese in gehöriger Weise durch Multiplication verbindet.

2. Werden in den vier Tetraederflächen

$$A, B, C, D$$

vier Transversallinien

$$a', b', c', d'$$

dergestalt gezogen, dass dieselben in der gemeinschaftlichen Transversalebene

$$O$$

liegen, und bezeichnet man die hierdurch auf den Tetraederflächen bestimmten Dreiecke, welche durch je zwei Tetraederkanten und die zugehörige Transversallinie begrenzt werden, nämlich,

$$\mathfrak{a}d', \mathfrak{a}b', \mathfrak{a}c'; \mathfrak{b}a', \mathfrak{b}c', \mathfrak{b}d'; \mathfrak{c}b', \mathfrak{c}d', \mathfrak{c}a'; \mathfrak{d}c', \mathfrak{d}a', \mathfrak{d}b'$$

mit

$$D_A, B_A, C_A; A_B, C_B, D_B; B_C, D_C, A_C; C_D, A_D, B_D;$$

so erhält man dieselben Gleichungen, wie die in 1. gefundenen.

Sowie der Beweis des ersten Satzes dem des ihm analogen vom Dreiecke entspricht, wonach mit Anwendung derselben Bezeichnungsweise

$$a_b . b_c . c_a = a_c . c_b . b_a$$

ist, so ist diess auch mit dem des zweiten der Fall, der für das Dreieck ebenfalls dieselbe Gestalt hat.

Diese beiden Lehrsätze mit ihren Umkehrungen, deren weitere Verfolgung mit Rücksicht auf ihren Zusammenhang mit andern, vielleicht noch nicht bekannten Sätzen sich der Einsender auf eine andere Zeit verspart, schienen, besonders wegen ihrer Analogie mit den erwähnten Dreieckssätzen, der Mittheilung werth zu sein.

XXXIV.

Ueber die Summirung der nach den Potenzen einer Hauptgrösse fortschreitenden Reihen, deren Coefficienten eine arithmetische Reihe einer beliebigen Ordnung bilden.

Von

dem Herausgeber.

Ich gehe bei dieser Untersuchung von dem folgenden Satze aus:

Lehrsatz.

Wenn die Grösse x, welche wir als positiv annehmen wollen, kleiner als die Einheit ist, und n und k positive ganze Zahlen bezeichnen; so nähert sich

$$n(n+1)(n+2)......(n+k-1)x^n$$

jederzeit bis zu jedem beliebigen Grade der Null, wenn n, indem k als constant betrachtet wird, in's Unendliche wächst.

Beweis.

Es ist, wie leicht erhellet:

$$(n+1)(n+2)....(n+k)x^{n+1}=n(n+1)....(n+k-1)x^n$$
$$\times(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})....(1+\frac{1}{n+k-1})x,$$
$$(n+2)(n+3)....(n+k+1)x^{n+2}=(n+1)(n+2)....(n+k)x^{n+1}$$
$$\times(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})....(1+\frac{1}{n+k})x,$$
$$(n+3)(n+4)....(n+k+2)x^{n+3}=(n+2)(n+3)....(n+k+1)x^{n+2}$$
$$\times(1+\frac{1}{n+2})(1+\frac{1}{n+3})....(1+\frac{1}{n+k+1})x,$$
$$(n+4)(n+5)....(n+k+3)x^{n+4}=(n+3)(n+4)....(n+k+2)x^{n+3}$$
$$\times(1+\frac{1}{n+3})(1+\frac{1}{n+4})....(1+\frac{1}{n+k+2})x,$$

u. s. w.

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$K=(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})....(1+\frac{1}{n+k-1}),$$
$$K_1=(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})(1+\frac{1}{n+3})....(1+\frac{1}{n+k}),$$
$$K_2=(1+\frac{1}{n+2})(1+\frac{1}{n+3})(1+\frac{1}{n+4})....(1+\frac{1}{n+k+1}),$$
$$K_3=(1+\frac{1}{n+3})(1+\frac{1}{n+4})(1+\frac{1}{n+5})....(1+\frac{1}{n+k+2}),$$

u. s. w.

setzen:

$$(n+1)(n+2)....(n+k)x^{n+1}=n(n+1)....(n+k-1)x^n.Kx,$$
$$(n+2)(n+3)....(n+k+1)x^{n+2}=(n+1)(n+2)....(n+k)x^{n+1}.K_1x,$$
$$(n+3)(n+4)....(n+k+2)x^{n+3}=(n+2)(n+3)....(n+k+1)x^{n+2}.K_2x,$$
$$(n+4)(n+5)....(n+k+3)x^{n+4}=(n+3)(n+4)....(n+k+2)x^{n+3}.K_3x,$$

u. s. w.,

also

$$(n+1)(n+2)....(n+k)x^{n+1}=n(n+1)....(n+k-1)x^n.Kx,$$
$$(n+2)(n+3)....(n+k+1)x^{n+2}=n(n+1)....(n+k-1)x^n.KK_1x^2,$$
$$(n+3)(n+4)....(n+k+2)x^{n+3}=n(n+1)....(n+k-1)x^n.KK_1K_2x^3,$$
$$(n+4)(n+5)....(n+k+3)x^{n+4}=n(n+1)....(n+k-1)x^n.KK_1K_2K_3x^4,$$

u. s. w.

Offenbar ist aber

$$K>K_1>K_2>K_3>K_4> \text{ u. s. w.},$$

und folglich

$$K=K,$$
$$KK_1<K^2,$$
$$KK_1K_2<K^3,$$
$$KK_1K_2K_3<K^4,$$

u. s. w.

also

$$Kx=Kx,$$
$$KK_1x^2<(Kx)^2,$$
$$KK_1K_2x^3<(Kx)^3,$$
$$KK_1K_2K_3x^4<(Kx)^4,$$

u. s. w.

Daher ist nach dem Obigen:

$$(n+1)(n+2)....(n+k)x^{n+1} = n(n+1)....(n+k-1)x^n.Kx,$$
$$(n+2)(n+3)....(n+k+1)x^{n+2} < n(n+1)....(n+k-1)x^n.(Kx)^2,$$
$$(n+3)(n+4)....(n+k+2)x^{n+3} < n(n+1)....(n+k-1)x^n.(Kx)^3,$$
$$(n+4)(n+5)....(n+k+3)x^{n+4} < n(n+1)....(n+k-1)x^n.(Kx)^4,$$
u. s. w.

Soll nun $Kx < 1$, d. i.

$$(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})....(1+\frac{1}{n+k-1})x < 1$$

sein, so muss

$$x < \frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})....(1+\frac{1}{n+k-1})}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})....(1+\frac{1}{n+k-1})} > x$$

sein. Wenn aber n in's Unendliche wächst, so nähern sich die Brüche

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ... \frac{1}{n+k-1}$$

deren Anzahl constant, nämlich k ist, immer mehr und mehr der Null und können derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt, und es wird sich also, wenn n in's Unendliche wächst, offenbar der Bruch

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})....(1+\frac{1}{n+k-1})},$$

welcher stets kleiner als die Einheit ist, im Wachsen der Einheit immer mehr und mehr nähern, und derselben beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur n gross genug nimmt. Da nun nach der Voraussetzung $x < 1$ und als eine constante völlig bestimmte Grösse natürlich von der Einheit um eine bestimmte endliche Grösse unterschieden ist, so wird, wenn man n in's Unendliche wachsen lässt, der stets wachsende Bruch

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})...(1+\frac{1}{n+k-1})},$$

welcher der Einheit beliebig nahe kommen kann, wenn man nur

gross genug nimmt, immer endlich grösser als x werden, dann also die obige Bedingung erfüllt, und folglich

$$Kx < 1$$

sein. Dann nähern sich aber nach dem Obigen die Grössen

$$\begin{gathered}
n(n+1)\ldots.(n+k-1)x^n,\\
(n+1)(n+2)\ldots.(n+k)x^{n+1},\\
(n+2)(n+3)\ldots.(n+k+1)x^{n+2},\\
(n+3)(n+4)\ldots.(n+k+2)x^{n+3},\\
(n+4)(n+5)\ldots.(n+k+3)x^{n+4},\\
\text{u. s. w.}
\end{gathered}$$

offenbar immer mehr und mehr der Null und können derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur weit genug in der vorhergehenden Reihe fortschreitet oder sich nur weit genug von ihrem Anfange entfernt, wodurch unser Satz offenbar vollständig bewiesen ist.

Die fortwährende Abnahme der Werthe von

$$n(n+1)\ldots.(n+k-1)x^n$$

mit wachsendem n beginnt nur erst dann, wenn

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})\ldots.(1+\frac{1}{n+k-1})} > x$$

geworden ist, was immer endlich einmal eintreten muss.

Zusatz.

Wenn der absolute Werth der Grösse x kleiner als die Einheit ist und n und k positive ganze Zahlen bezeichnen, so nähert sich der absolute Werth von

$$n(n+1)(n+2)\ldots.(n+k-1)x^n$$

jederzeit der Null, wenn n, indem k als constant betrachtet wird, in's Unendliche wächst, und kann der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt.

Es ist nun, wovon man sich auf der Stelle durch ganz leichte Rechnung überzeugt, allgemein

$$\frac{n(n+1)\ldots.(n+k-1)}{1.2.3\ldots.k} = \frac{n(n+1)\ldots.(n+k-2)}{1.2.3\ldots.(k-1)} + \frac{(n-1)n\ldots.(n+k-2)}{1.2.3\ldots.k};$$

also, wenn man für n nach und nach $1, 2, 3, 4, \ldots. n$ setzt:

$$\frac{1.2.3....k}{1.2.3....k}=\frac{1.2.3....(k-1)}{1.2.3....(k-1)},$$

$$\frac{2.3.4....(k+1)}{1.2.3....k}=\frac{2.3.4....k}{1.2.3....(k-1)}+\frac{1.2.3....k}{1.2.3....k},$$

$$\frac{3.4.5....(k+2)}{1.2.3....k}=\frac{3.4.5....(k+1)}{1.2.3....(k-1)}+\frac{2.3.4....(k+1)}{1.2.3....k},$$

$$\frac{4.5.6....(k+3)}{1.2.3....k}=\frac{4.5.6....(k+2)}{1.2.3....(k-1)}+\frac{3.4.5....(k+2)}{1.2.3....k},$$

u. s. w.

$$\frac{n(n+1)....(n+k-1)}{1.2.3....k}=\frac{n(n+1)....(n+k-2)}{1.2.3....(k-1)}+\frac{(n-1)n....(n+k-2)}{1.2.3....k}.$$

Multiplicirt man nun diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,....x^{n-1}$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$1)\quad \overset{k}{S}_n=\frac{1.2.3....k}{1.2.3....k}+\frac{2.3.4....(k+1)}{1.2.3....k}x$$
$$+\frac{3.4.5....(k+2)}{1.2.3....k}x^2$$
$$+\frac{4.5.6....(k+3)}{1.2.3....k}x^3$$

u. s. w.

$$+\frac{n(n+1)....(n+k-1)}{1.2.3....k}x^{n-1}$$

gesetzt wird, auf der Stelle die Gleichung

$$\overset{k}{S}_n=\overset{k-1}{S}_n+\overset{k}{S}_{n-1}.x.$$

Weil nun aber offenbar

$$\overset{k}{S}_{n-1}=\overset{k}{S}_n-\frac{n(n+1)....(n+k-1)}{1.2.3....k}x^{n-1}$$

ist so wird die vorhergehende Gleichung

$$\overset{k}{S}_n=\overset{k-1}{S}_n+\{\overset{k}{S}_n-\frac{n(n+1)....(n+k-1)}{1.2.3....k}x^{n-1}\}x,$$

also:

$$2)\quad (1-x)\overset{k}{S}_n=\overset{k-1}{S}_n-\frac{n(n+1)\ldots.(n+k-1)}{1.2.3\ldots.k}x^n.$$

Für $k=1$ ist nach 1):

$$\overset{1}{S}_n=\frac{1}{1}+\frac{2}{1}x+\frac{3}{1}x^2+\frac{4}{1}x^3+\ldots.+\frac{n}{1}x^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}x+\frac{1}{1}x^2+\frac{1}{1}x^3+\ldots.+\frac{1}{1}x^{n-1}$$

$$+\frac{1}{1}x+\frac{2}{1}x^2+\frac{3}{1}x^3+\ldots.+\frac{n-1}{1}x^{n-1}$$

$$=1+x+x^2+x^3+\ldots.+x^{n-1}$$

$$+(\frac{1}{1}+\frac{2}{1}x+\frac{3}{1}x^2+\ldots.+\frac{n-1}{1}x^{n-2})x,$$

d. i.

$$\overset{1}{S}_n=1+x+x^2+x^3+\ldots.+x^{n-1}+(\overset{1}{S}_n-\frac{n}{1}x^{n-1})x,$$

also

$$3)\quad (1-x)\overset{1}{S}_n=1+x+x^2+x^3+\ldots.+x^{n-1}-\frac{n}{1}x^n.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung 2), so findet man, dass, wenn diese letztere Gleichung ganz allgemein, d. h. auch noch für $k=1$ gelten soll,

$$4)\quad \overset{0}{S}_n=1+x+x^2+x^3+\ldots.+x^{n-1}$$

gesetzt werden muss. Dies vorausgesetzt, ist nun nach der allgemeinen Gleichung 2), wenn für k nach und nach $1, 2, 3, 4, \ldots. k$ gesetzt wird:

$$(1-x)\overset{1}{S}_n=\overset{0}{S}_n-\frac{n}{1}x^n,$$

$$(1-x)\overset{2}{S}_n=\overset{1}{S}_n-\frac{n(n+1)}{1.2}x^n,$$

$$(1-x)\overset{3}{S}_n=\overset{2}{S}_n-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^n,$$

$$(1-x)\overset{4}{S}_n=\overset{3}{S}_n-\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}x^n,$$

u. s. w.

$$(1-x)\overset{k}{S}_n=\overset{k-1}{S}_n-\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{1.2.3\ldots k}x^n;$$

also

$$(1-x)\overset{1}{S}_n=\overset{0}{S}_n-\frac{n}{1}x^n,$$

$$(1-x)^2\overset{2}{S}_n=(1-x)\overset{1}{S}_n-\frac{n(n+1)}{1.2}(1-x)x^n,$$

$$(1-x)^3\overset{3}{S}_n=(1-x)^2\overset{2}{S}_n-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}(1-x)^2x^n,$$

$$(1-x)^4\overset{4}{S}_n=(1-x)^3\overset{3}{S}_n-\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}(1-x)^3x^n,$$

u. s. w.

$$(1-x)^k\overset{k}{S}_n=(1-x)^{k-1}\overset{k-1}{S}_n-\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+k-1)}{1.2.3\ldots.k}(1-x)^{k-1}x^n;$$

und folglich, wenn man addirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$(1-x)^k\overset{k}{S}_n=\overset{0}{S}_n-\left\{\begin{array}{l}\frac{n}{1}+\frac{n(n+1)}{1.2}(1-x)\\ +\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}(1-x)^2\\ +\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}(1-x)^3\\ \text{u. s. w.}\\ +\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{1.2.3\ldots.k}(1-x)^{k-1}\end{array}\right\}x^n.$$

Weil nun aber nach 4) und der Lehre von den geometrischen Reihen

$$5)\quad \overset{0}{S}_n=\frac{1-x^n}{1-x}$$

ist, so ist

$$6)\quad \overset{k}{S}_n=\frac{1-x^n}{(1-x)^{k+1}}-\left\{\begin{array}{l}\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{(1-x)^k}\\ +\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{(1-x)^{k-1}}\\ +\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{(1-x)^{k-2}}\\ +\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{(1-x)^{k-3}}\\ \text{u. s. w.}\\ +\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+k-1)}{1.2.3\ldots.k}\cdot\frac{1}{1-x}\end{array}\right\}x^n.$$

Wenn jetzt das erste Glied einer arithmetischen Reihe der $k$ten Ordnung und die ersten Glieder ihrer Differenzenreihen durch

$$A,\ \Delta A,\ \Delta^2 A,\ \Delta^3 A, \ldots\ \Delta^k A$$

und das $n$te Glied dieser Reihe durch A_{n-1}, die Binomialcoefficienten aber auf gewöhnliche Weise bezeichnet werden; so ist nach der allgemeinen Theorie der arithmetischen Reihen bekanntlich

$$A_{n-1} = A + (n-1)_1\,\Delta A + (n-1)_2\,\Delta^2 A + (n-1)_3\,\Delta^3 A + \ldots$$
$$\ldots + (n-1)_{n-1}\,\Delta^{n-1} A,$$

also, wenn man für n nach und nach die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... n in diese Gleichung einführt:

$$A = A,$$
$$A_1 = A + 1_1 . \Delta A,$$
$$A_2 = A + 2_1 . \Delta A + 2_2 . \Delta^2 A,$$
$$A_3 = A + 3_1 . \Delta A + 3_2 . \Delta^2 A + 3_3 . \Delta^3 A,$$
u. s. w.
$$A_{n-1} = A + (n-1)_1 . \Delta A + (n-1)_2 . \Delta^2 A + (n-1)_3 . \Delta^3 A + \ldots$$
$$\ldots + (n-1)_{n-1} . \Delta^{n-1} A;$$

und folglich, wenn man diese Gleichungen, nachdem man sie nach der Reihe mit

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3, \ldots\ x^{n-1}$$

multiplicirt hat, zu einander addirt, und der Kürze wegen

$$7)\quad \Sigma_{n-1} = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1}$$

setzt, wie leicht erhellen wird:

$$8)\quad \Sigma_{n-1} = \overset{0}{S}_n A + \overset{1}{S}_{n-1} x \Delta A + \overset{2}{S}_{n-2} x^2 \Delta^2 A$$
$$+ \overset{3}{S}_{n-3} x^3 \Delta^3 A$$
u. s. w.
$$+ \overset{n-2}{S_2} x^{n-2} \Delta^{n-2} A$$
$$+ \overset{n-1}{S_1} x^{n-1} \Delta^{n-1} A,$$

Führt man nun in diese Gleichung für

$$\overset{0}{S}_n,\ \overset{1}{S}_{n-1},\ \overset{2}{S}_{n-2},\ \overset{3}{S}_{n-3}, \ldots\ \overset{n-2}{S_2},\ \overset{n-1}{S_1}$$

ihre Ausdrücke aus 5) und 6) ein, so erhält man:

$$9)\quad \Sigma_{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}A$$

$$+\frac{1-x^{n-1}}{(1-x)^2}x\Delta A-\frac{n-1}{1}\cdot\frac{1}{1-x}x^n\Delta A$$

$$+\frac{1-x^{n-2}}{(1-x)^3}x^2\Delta^2A-\left\{\frac{n-2}{1}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\cdot\frac{1}{1-x}\right\}x^n\Delta^2A$$

$$+\frac{1-x^{n-3}}{(1-x)^4}x^3\Delta^3A-\left\{\begin{array}{l}\frac{n-3}{1}\cdot\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\\ \qquad+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1-x}\end{array}\right\}x^n\Delta$$

u. s. w.

$$+\frac{1-x^2}{(1-x)^{n-1}}x^{n-2}\Delta^{n-2}A-\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{(1-x)^{n-2}}+\frac{3.2}{1.2}\cdot\frac{1}{(1-x)^{n-3}}\\ \qquad+\frac{4.3.2}{1.2.3}\cdot\frac{1}{(1-x)^{n-4}}\\ \qquad\text{u. s. w.}\\ \qquad+\frac{(n-1)(n-2)\ldots.2}{1.2.3\ldots.(n-2)}\cdot\frac{1}{1-x}\end{array}\right\}x^n\Delta^{n-2}A$$

$$+\frac{1-x}{(1-x)^n}x^{n-1}\Delta^{n-1}A-\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{(1-x)^{n-1}}+\frac{2.1}{1.2}\cdot\frac{1}{(1-x)^{n-2}}\\ \qquad+\frac{3.2.1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{(1-x)^{n-3}}\\ \qquad\text{u. s. w.}\\ \qquad+\frac{(n-1)(n-2)\ldots.1}{1.2.3\ldots.(n-1)}\cdot\frac{1}{1-x}\end{array}\right\}x^n\Delta^{n-1}A.$$

eine allgemeine Summationsformel, deren Bildungsgesetz deutlich vor Augen liegt.

Ausgeschlossen muss jedoch offenbar der Fall werden, wenn $x=1$ ist. In diesem Falle ist aber die Summe Σ_{n-1} aus der Lehre von den arithmetischen Reihen bekannt, und derselbe braucht daher hier nicht weiter besonders berücksichtigt zu werden.

Für $n \overline{\overline{>}} k$ wird die Gleichung 9), weil nach der Voraussetzung die Grössen

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ \ldots.\ A_{n-1},\ \ldots.$$

eine arithmetische Reihe der $k$ten Ordnung bilden, nach einer einfachen Transformation:

$$\Sigma_{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}A$$

$$+\frac{1-x^{n-1}}{(1-x)^2}x\Delta A-\frac{n-1}{1}x^{n-1}.\frac{1}{1-x}x\Delta A$$

$$+\frac{1-x^{n-2}}{(1-x)^3}x^2\Delta^2 A-\left\{\frac{n-2}{1}x^{n-2}.\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{(n-2)(n-1)}{1.2}x^{n-2}.\frac{1}{1-x}\right\}x^2\Delta^2 A$$

$$+\frac{1-x^{n-3}}{(1-x)^4}x^3\Delta^3 A-\left\{\frac{n-3}{1}x^{n-3}.\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{(n-3)(n-2)}{1.2}x^{n-3}.\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{1.2.3}x^{n-3}.\frac{1}{1-x}\right\}x^3\Delta^3 A$$

u. s. w.

$$+\frac{1-x^{n-k}}{(1-x)^{k+1}}x^k\Delta^k A-\left\{\begin{array}{l}\frac{n-k}{1}x^{n-k}.\frac{1}{(1-x)^k}\\+\frac{(n-k)(n-k+1)}{1.2}x^{n-k}.\frac{1}{(1-x)^{k-1}}\\+\frac{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)}{1.2.3}x^{n-k}.\frac{1}{(1-x)^{k-2}}\\\text{u. s. w.}\\+\frac{(n-k)(n-k+1)\ldots.(n-1)}{1.2.3\ldots.k}x^{n-k}.\frac{1}{1-x}\end{array}\right\}x^k\Delta^k A.$$

Nehmen wir nun den absoluten Werth von x kleiner als die Einheit an, und lassen n in's Unendliche wachsen, so nähern sich nach dem Zusatze des oben bewiesenen Lehrsatzes die Grössen

$(n-1)x^{n-1}$;

$(n-2)x^{n-2}$, $(n-2)(n-1)x^{n-2}$;

$(n-3)x^{n-3}$, $(n-3)(n-2)x^{n-3}$, $(n-3)(n-2)(n-1)x^{n-3}$;

u. s. w.

$(n-k)x^{n-k}$, $(n-k)(n-k+1)x^{n-k}$, $(n-k)(n-k+1)(n-k+2)x^{n-k}$,....

......$(n-k)(n-k+1)\ldots(n-1)x^{n-k}$

sämmtlich der Null und können derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt, wobei man immer zu beachten hat, dass die Grösse k constant ist. Bezeichnen wir also die Gränze, welcher Σ_{n-1} sich bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn n in's Unendliche wächst, durch Σ, so ergiebt sich, natürlich immer unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist, aus der obigen Gleichung unmittelbar die folgende merkwürdige Gleichung:

$$10)\quad \Sigma=\frac{A}{1-x}+\frac{x\Delta A}{(1-x)^2}+\frac{x^2\Delta^2 A}{(1-x)^3}+\frac{x^3\Delta^3 A}{(1-x)^4}+\ldots+\frac{x^k\Delta^k A}{(1-x)^{k+1}}$$

Wenn also die Grössen

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ldots A_{n-1},\ldots$$

eine arithmetische Reihe der $k$ten Ordnung bilden, so ist in einer bekannten Bezeichnung immer:

$$11)\quad A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots$$
$$=\frac{A}{1-x}+\frac{x\Delta A}{(1-x)^2}+\frac{x^2\Delta^2 A}{(1-x)^3}+\frac{x^3\Delta^3 A}{(1-x)^4}+\ldots+\frac{x^k\Delta^k A}{(1-x)^{k+1}}.$$
$$\{-1<x<+1\}.$$

Wenn auch dieser sehr allgemeine und gewiss sehr merkwürdige Satz in seinen wesentlichen Bestandtheilen längst bekannt ist *), so ist derselbe bis jetzt doch nur ohne alle Rücksicht auf die Convergenz der Reihe

$$A,\ A_1x,\ A_2x^2,\ A_3x^3,\ A_4x^4,\ \ldots\ldots$$

nach den bei solchen Untersuchungen gebräuchlichen ältern Methoden, die hier als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden können, bewiesen worden. Der Hauptzweck der vorliegenden Abhandlung war eine schärfere Begründung des Satzes mit gehöriger Berücksichtigung der Convergenz der obigen Reihe. Anwendungen dieses allgemeinen Satzes auf specielle Reihen dem Obigen noch hinzuzufügen, halte ich hier für überflüssig. Auch werden sich verschiedene Bemerkungen über die Divergenz der betreffenden Reihe und dergl., die sich dem Obigen noch anschliessen liessen, einem Jeden leicht von selbst ergeben, und können daher hier der Kürze wegen füglich gleichfalls übergangen werden.

---

*) Ich finde ihn zuerst in: **The doctrine of chances, or a method of calculating the probability of events in play. By A. De Moivre. F. R. S. London. 1718. 4. p. 131.** und Moivre mag daher wohl der Erfinder sein. Sonst s. m. auch das **Mathematische Wörterbuch. Thl. IV. S. 601.**

XXXV.

Relationen zwischen den Fakultätenkoeffizienten.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

In dem Aufsatze Thl. VIII. Nr. XLI. S. 427. des Archivs habe ich gezeigt, dass, wenn $\overset{n}{C}_1, \overset{n}{C}_2, \overset{n}{C}_3, \ldots$ die Fakultätenkoeffizienten, d. h. die Constanten der Gleichung

$$u(u+1)(u+2)\ldots(u+n-1)=\overset{n}{C}_1 u+\overset{n}{C}_2 u^2+\overset{n}{C}_3 u^3+\ldots+\overset{n}{C}_n u^n$$

bezeichnen, die Formel gilt:

$$\left.\begin{aligned}&[l(1+x)]^m\\ =\overset{m}{C}_m x^m-\frac{1}{m+1}&\overset{m+1}{C}_m x^{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}\overset{m+2}{C}_m x^{m+2}-\ldots\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

wobei m eine positive ganze Zahl und $1>x>-1$ sein muss. Diese letztere Beziehung kann nun auf folgende Weise zur Auffindung von Eigenschaften jener merkwürdigen Zahlen benutzt werden. Es sei $\varphi(y)$ eine Funktion, welche sich wenigstens während eines kleinen, bei $y=0$ anfangenden Intervalles in eine nach Potenzen von y fortschreitende Reihe verwandeln lässt, also etwa

$$\varphi(y)=A_0+A_1 y+A_2 y^2+A_3 y^3+\ldots$$

In diese Gleichung substituire man $y=l(1+x)$, so wird $\varphi[l(1+x)]$ eine gewisse neue Funktion von x darstellen, welche mit $\psi(x)$ bezeichnet werden möge, und man hat

$$\psi(x)=A_0+A_1 l(1+x)+A_2[l(1+x)]^2+\ldots\ldots$$

Verwandelt man hier jedes einzelne Glied nach Formel (1) selbst wieder in eine Reihe und ordnet dann Alles nach Potenzen von x, so kann man die vorige Gleichung auf die Form

$$\psi(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\ldots$$

bringen, worin a_0, a_1, a_2, ... auf gewisse, leicht in einer Formel ausdrückbare Weise von A_0, A_1, A_2,.... und C_1, C_2, C_3,.... abhängen. Wählt man nun die ursprüngliche Funktion $\varphi(y)$ so, dass sich $\varphi[l(1+x)]=\psi(x)$ ganz unabhängig von der vorigen Betrachtung in eine Reihe von der Form

$$\psi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+....$$

verwandeln lässt, so führt die Vergleichung der Coeffizienten beider Reihen leicht zu Eigenschaften der Fakultätenkoeffizienten.

Das einfachste Beispiel, was sich hierzu geben lässt, bildet die Annahme $\varphi(y)=e^y$, oder

$$e^y=1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+....,$$

woraus für $y=l(1+x)$ folgt:

$$1+x=1+\frac{l(1+x)}{1}+\frac{[l(1+x)]^2}{1.2}+....$$

und wenn man hier die Formel (1) für $m=1$, 2, 3, etc. in Anwendung bringt, so ergiebt sich aus der Vergleichung der Coeffizienten von x^n:

$$\overset{n}{C}_1-\overset{n}{C}_2+\overset{n}{C}_3-\overset{n}{C}_4+....=0,$$

wie man auch leicht aus der Definition der Fakultätenkoeffizienten ableitet.

Nimmt man in der bekannten Reihe für $\cot\frac{1}{2}z$ für z die imaginäre Grösse $y\sqrt{-1}$, so erhält man leicht:

$$\frac{y}{e^y-1}=1-\frac{y}{2}+\frac{B_1y^2}{1.2}-\frac{B_3y^4}{1.2.3.4}+....,$$

worin B_1, B_3 etc. die Bernoullischen Zahlen bedeuten. Für $y=l(1+x)$ geht die linke Seite in $\frac{l(1+x)}{x}$ über, was sich unmittelbar leicht in eine Reihe verwandeln lässt. Nach beiderseitiger Coeffizientenvergleichung kommt man auf die Relation

$$B_1\overset{n}{C}_2-B_3\overset{n}{C}_4+B_5\overset{n}{C}_6-....=\frac{1.2.3....(n-1)}{2}\cdot\frac{n-1}{n+1},$$

die wegen der einfachen Verknüpfung der Fakultätenkoeffizienten mit den Bernoullischen Zahlen von Interesse ist.

Eine etwas allgemeinere Ausführung dieses Gedankens ist die folgende. Mittelst des Theoremes von Lagrange verwandle man die $p$te Potenz von der Wurzel der Gleichung

$$y=x\frac{y}{e^y-1}$$

in eine nach Potenzen von x fortgehende Reihe. Da $y=l(1+x)$ die fragliche Wurzel ist, so ergiebt sich hieraus eine Reihe für $[l(1+x)]^p$, und zwar ist der Coeffizient von x^n in ihr

$$\frac{1}{1.2....n}\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\left[\left(\frac{y}{e^y-1}\right)^n py^{p-1}\right], \text{ für } y=0.$$

Nach No. (1) dagegen ist der Coeffizient von x^n in der Entwickelung von $[l(1+x)]^p$:

$$\frac{(-1)^{n-p}}{(p+1)(p+2)......n}\overset{n}{C}_p.$$

Aus der Vergleichung beider Resultate ergiebt sich

$$(-1)^{n-p}.1.2...(p-1)\overset{n}{C}_p=D^{n-1}\left[y^{p-1}\left(\frac{y}{e^y-1}\right)^n\right],$$

wenn nach geschehener Differenziation $y=0$ genommen wird.

Nach der Regel für die Differenziation der Produkte kann man hieraus leicht die folgende Form ableiten:

$$(-1)^{n-p}\overset{n}{C}_p=(n-1)_{p-1}D^{n-p}\left(\frac{y}{e^y-1}\right)^n,\ y=0;$$

die vielleicht zu einer independenten Bestimmung der Fakultätenkoeffizienten führt.

XXXVI.

Untersuchungen über die Kurve, welche der Ort der Fusspunkte der Senkrechten ist, die man in einer Ellipse vom Mittelpunkte auf ihre Tangenten fällt.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

---

1) Sei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

die Gleichung der Ellipse, so ist

$$(y^2+x^2)^2=a^2x^2+b^2y^2 \qquad (2)$$

die Gleichung der verlangten Kurve, in Bezug auf die nämlichen Koordinatenaxen. Diese Kurve besteht aus vier kongruenten Theilen, wovon der eine reicht

$$\text{von } \left\{\begin{array}{l} x=a \text{ bis } x=0 \\ y=0 \quad ,, \quad y=b \end{array}\right\},$$

$$\text{der andere von } \left\{\begin{array}{l} x=0 \text{ bis } x=-a \\ y=b \quad ,, \quad y=0 \end{array}\right\},$$

$$\text{der dritte von } \left\{\begin{array}{l} x=-a \text{ bis } x=0 \\ y=0 \quad ,, \quad y=-b \end{array}\right\},$$

$$\text{der vierte von } \left\{\begin{array}{l} x=0 \text{ bis } x=a \\ y=-b \text{ bis } y=0 \end{array}\right\}.$$

Die Kurve ist leicht zu verzeichnen. Bedeutet $ACBDA$ (Taf. VII. Fig. 5.) die Ellipse (1), so mache man Winkel $COE = FOB$ und zeichne OF so, dass

$$OF=\frac{OB.OC}{OE},$$

alsdann wird F ein Punkt der verlangten Kurve sein.

Wäre $ACBD$ die Ellipse, deren Halbaxen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ wären, so hätte man:

$$OG \times OF = 1.$$

Die Kurve (2) ist immer ausser der Ellipse (1) und berührt sie bloss an den vier Endpunkten der Axen.

2) Die Ordinate y ist im ersten Viertel (von B bis C) in B gleich Null, in C gleich b; ist nun

$a^2 \begin{array}{l}< 2b^2 \\ > b^2\end{array}\Big\}$ so ist $y=b$ ein Maximum der Ordinate y und sie wächst also beständig von B bis C;

$a^2 \begin{array}{l}> b^2 \\ = 2b^2\end{array}\Big\}$ so ist für $x=0$, $y=b$ ebenfalls ein Maximum und y wächst gleichfalls von B bis C;

$a^2 \begin{array}{l}> b^2 \\ > 2b^2\end{array}\Big\}$ so ist für $x=\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{a^2b^2}{4(a^2-b^2)}}$, $y=\frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}}$ ein Maximum und es wächst y von B bis zu einem Punkte H, dessen Abscisse $\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{a^2b^2}{4(a^2-b^2)}}<\frac{a}{2}$ ist; für $x=0$ ist $y=b$ ein Minimum und es nimmt also y wieder ab von H bis C, wo es $=b$ wird.

3) In den in der vorigen Nummer aufgezählten Punkten läuft die Tangente an die Kurve parallel mit der Axe der x; in den Punkten A und B aber mit der Axe der y.

4) Lässt man die Halbaxe OB (die grössere) wachsen, während OC unverändert bleibt, so erhält man eine Reihe der durch (2) ausgedrückten Kurve analoger Kurven. Die einhüllenden Kurven dieser aller sind zwei Kreise, deren Durchmesser nach Grösse und Lage die Linien OC und OD sind, welche Kreise beide durch den Mittelpunkt O gehen und alle die Kurven in den Punkten C und D berühren.

5) Die von der Kurve (2) umschlossene Fläche ist gleich der halben Fläche eines Kreises, dessen Halbmesser gleich BC ist.

Der zwischen unserer Kurve und der Ellipse (1) liegende Raum ist gleich der halben Fläche eines Kreises, dessen Halbmesser gleich $OB-OC$ ist.

Der Flächenausschnitt, welcher dem Winkel $BOF=t$ entspricht, wird ausgedrückt durch

$$\frac{a^2+b^2}{4}t+\frac{a^2-b^2}{8}\sin 2t.$$

6) Die Länge des zum Winkel t gehörigen Kurvenstücks wird ausgedrückt durch

$$\sqrt{\left(\frac{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin^2 t}{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2 t}\right)}dt=a\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin^2 t}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2 t}}$$

$$-\frac{a^4-b^4}{a^3}\int_0^t\frac{\sin^2 t dt}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin^2 t}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2 t}},$$

welche Integrale elliptische Integrale sind, deren Werth nach „Gudermann, Theorie der Modularfunktionen und Modularintegrale. §. 219.“ bestimmt wird. An diesem Orte wollen wir auf die nähere Bestimmung nicht eingehen.

7) Dreht sich unsere Kurve um die Achse der x, so entsteht ein Rotationskörper, dessen Kubikinhalt:

$$\pi\left[\frac{ab^2}{2}+\frac{a^3}{3}+\frac{b^4}{4\sqrt{a^2-b^2}}\log\left(\frac{2a\sqrt{a^2-b^2}+2a^2-b^2}{b^2}\right)\right].$$

Der Kubikinhalt des Körperstücks, das durch die zwischen der Ellipse und der Kurve liegende Fläche erzeugt wird, ist:

$$\pi\left[\frac{a^3}{3}-\frac{5ab^2}{6}+\frac{b^4}{4\sqrt{a^2-b^2}}\log\left(\frac{2a\sqrt{a^2-b^2}+2a^2-b^2}{b^2}\right)\right].$$

8) Dreht sich unsere Kurve um eine Axe, die in ihrer Ebene,

aber so liegt, dass sie verlängert die Kurve nicht schneidet, und heisst k die Senkrechte von O aus auf die Axe, so ist der Kubikinhalt des entstehenden Körpers:

$$k\pi^2(a^2+b^2).$$

XXXVII.

Ueber das Grahamsche Kompensationspendel.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Bekanntlich besteht das Grahamsche Kompensationspendel in einer Pendelstange AB (Taf. VII. Fig. 6.), die auf dem Boden $DCFE$ eines cylindrischen Gefässes befestigt ist, in welchem sich Quecksilber in solcher Menge befindet, dass bei Erhöhung oder Erniedrigung der Temperatur die Schwingungsdauer des so zusammengesetzten Pendels nicht (oder kaum) geändert wird. Die Aufgabe ist, diese Quecksilbermenge zu bestimmen.

Ehe wir jedoch dieselbe in Betrachtung ziehen, wollen wir einige vorläufige Bemerkungen machen.

§. 1.

Sind eine Reihe materieller Punkte unabänderlich mit einander verbunden und es dreht sich das ganze System um eine Axe (auf deren einer Seite es sich befindet), so ist die Wirkung irgend einer Kraft, die an einem Punkte des Systems angebracht ist, in Bezug auf die Winkelgeschwindigkeit des Systems dieselbe, als wenn die Masse Σmr^2 (bei der m die Masse irgend eines Punktes, r seine Entfernung von der Drehaxe, und Σ die Summe aller mr^2 bezeichnet), in einem einzigen Punkte vereinigt wäre, der sich in der Entfernung 1 von der Drehaxe befindet. (Einen elementaren Beweis dieses Satzes sehe man z. B. in Pouillet-Müller Physik und Meteorologie. I. S. 202.) Die Summe Σmr^2 heisst das Trägheitsmoment des Systems. Ist dieses System von materiellen Punkten ein Körper, so wird Σmr^2 durch $\int r^2dm$ ersetzt, ausgedehnt auf den ganzen Kärper. Wirken nun auf alle Punkte dieses Körpers gleiche, parallele beschleunigende Kräfte,

von denen jede durch φ ausgedrückt werde; so ist die Wirkung auf den Punkt m gleich $m\varphi$, und die Wirkung aller Kräfte auf den Körper ist die nämliche, als wenn eine einzige Kraft $\Sigma m\varphi r$ in der Entfernung 1 von der Drehaxe, parallel mit den frühern Kräften, angebracht wäre. Es wird also der Körper schwingen, wie ein einfaches Pendel von der Länge 1, dessen Masse (in einem einzigen Punkte vereinigt gedacht) $=\int r^2dm$ und dessen bewegende Kraft $=\int r\varphi dm$, dessen beschleunigende Kraft also $=\frac{\int r\varphi dm}{\int r^2dm}$ $=\varphi\frac{\int rdm}{\int r^2dm}$ ist. Nun ist die Dauer der Oszillation eines einfachen Pendels von der Länge 1, auf das die beschleunigende Kraft ψ wirkt, $=\pi\sqrt{\frac{1}{\psi}}$, demnach die Dauer der Oszillation des zusammengesetzten Pendels $=\pi\sqrt{\frac{\int r^2dm}{\varphi\int rdm}}=\pi\sqrt{\frac{\int r^2dm}{g\int rdm}}$, wenn g die bekannte Beschleunigung der Schwere ($=9^m,80896$) bezeichnet. Ist l die Länge des einfachen Pendels, das unter dem Einflusse der Schwere die nämliche Oszillationsdauer hat, so ist

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=\pi\sqrt{\frac{\int r^2dm}{g\int rdm}},$$

also

$$l=\frac{\int r^2dm}{\int rdm}=\frac{\int r^2dm}{Mr_1},$$

wenn M die Masse des ganzen Körpers, r_1 die Entfernung des Schwerpunktes desselben von der Drehaxe bedeutet. Hieraus folgt:

$$\int r^2dm=lMr_1,$$

wodurch man das Trägheitsmoment eines Körpers ohne alle Rechnung bestimmen kann, wie diess schon Euler in seinen Anmerkungen zu Robins Artillerie, III. Anm. zum VIII. Satze, zeigt. (Man sehe auch Coriolis Lehrbuch der Mechanik fester Körper. §. 43. und Poisson Mechanik. II. §. 395.) In den obigen Formeln kann man auch das Element des Gewichtes einführen statt des Elements der Masse.

§. 2.

Sei nunmehr bei 0° Temperatur:

die Länge der Stange $AB=a$, ihr Radius $=r$;
die Dicke des Gefässbodens $CD=b$, der äussere Radius desselb. $=r_1$;
die Höhe des Gefässes $DG=c$, der innere Radius $=r_2$;
die Höhe des Quecksilbers im Gefässe $DH=f$;
das Gewicht der Volumeneinheit der Masse der Stange $AB=e$;
„ „ „ „ „ „ des Gefässes $=e_1$;
„ „ „ „ des Quecksilbers $=e_2$;

der Koeffizient der linearen Ausdehnung der Stange für 1° Temperaturerhöhung $=k$,
" " " " " des Gefässes für 1° Temperaturerhöhung $=k_1$,
" " " " " des Quecks. für 1° Temperaturerhöhung $=k_2$.

Berechnen wir nun zuerst $\int r dm$ bei 0°. Diese Grösse besteht aus folgenden Theilen:

a) für die Stange *AB* ist

$$\int r dm = \int_0^a x r^2 \pi e dx = \frac{r^2 \pi a^2 e}{2};$$

b) für den Boden des Gefässes

$$\int r dm = \int_a^{a+b} r_1^2 \pi e_1 x dx = \frac{r_1^2 \pi e_1}{2}(2ab + b^2);$$

c) für den obern Theil des Gefässes

$$\int r dm = \int_{a-c}^a (r_1^2 - r_2^2) \pi e_1 x dx = \frac{(r_1^2 - r_2^2) \pi e_1}{2}(2ac - c^2);$$

d) für das Quecksilber

$$\int r dm = \int_{a-f}^a (r_2^2 - r^2) \pi e_2 x dx = \frac{(r_2^2 - r^2) \pi e_2}{2}(2af - f^2).$$

Heisst jetzt *K* die Summe dieser Grössen, so ist für 0° Temperatur

$$\int r dm = K.$$

Erhöht sich nun die Temperatur zu t^0, so hat man in *K* zu setzen:

statt a nun $a(1+kt)$; statt $b:b(1+k_1 t)$; statt $c:c(1+k_1 t)$;
" r " $r(1+kt)$; " $r_1:r_1(1+k_1 t)$; " $r_2:r_2(1+k_1 t)$;
" e " $\frac{e}{1+3kt}$; " $e_1:\frac{e_1}{1+3k_1 t}$; " $e_2:\frac{e_2}{1+3k_2 t}$;

und um den Werth f' zu finden, den man statt f zu setzen hat, bemerke man, dass bei 0° das Gewicht des Quecksilbers $=(r_2^2 - r^2)\pi f e_2$ und bei $t^0: [r_2^2(1+2k_1 t) - r^2(1+2kt)]\pi f' \frac{e_2}{1+3k_2 t}$ ist, so dass

$$(r_2^2 - r_2) f = [r_2^2(1+2k_1 t) - r^2(1+2kt)] \frac{f'}{1+3k_2 t},$$

$$f' = \frac{(r_2^2 - r^2) f (1 + 3k_2 t)}{r_2^2(1+2k_1 t) - r^2(1+2kt)}.$$

Setzt man diese neuen Werthe in *K*, so erhält man den Werth *K'*, der $=\int r dm$ bei t^0 Temperatur ist.

Ganz eben so findet sich bei 0°:

$$\int r^2 dm = K_1 = \frac{\pi}{3}\left\{r^2a^3e + 3r_1{}^2e_1a^2b + 3r_1{}^2e_1ab^2 + r_1{}^2e_1b^3 \right.$$
$$\left. + (r_1{}^2 - r_2{}^2)e_1(3a^2c - 3ac^2 + c^3) + (r_2{}^2 - r^2)e_2(3a^2f - 3af^2 + f^3)\right\}$$

und für t^0:

$$\int r^2 dm = K_1{}',$$

wenn $K_1{}'$ aus K_1 eben so gebildet wird, wie K' aus K.

Die Länge des einfachen Pendels von gleicher Oszillationsdauer ist also bei 0°: $\frac{K_1}{K}$, bei t^0: $\frac{K_1{}'}{K'}$. Damit also Kompensation Statt finde, muss

$$K_1 K' = K K_1{}'$$

sein, aus welcher Gleichung der Werth von f bestimmt werden muss. Sie ist im Allgemeinen in Bezug auf f vom 6ten Grade. Da t aus dieser Gleichung nicht verschwindet, so ist eine Kompensation unabhängig von dem Werthe von t nicht möglich; man wird also t innerhalb der Gränzen der Temperaturwechsel nehmen und alsdann f berechnen. Auch kann man für eine Reihe von Werthen von t die entsprechenden Werthe von $f(<c)$ berechnen, und, wenn ihre Differenzen gering sind, den Mittelwerth für f nehmen. Wären aber die Differenzen der verschiedenen Werthe von f bedeutend, so wäre eine Kompensation geradezu unmöglich.

XXXVIII.

Ueber die Bewegung einer Kugel im Laufe einer Windbüchse.

Von dem

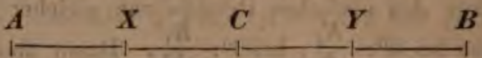
Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Um diese Bewegung zu bestimmen, soll vorausgesetzt werden, dass die Kugel gepflastert (umwickelt) sei, also fest aufsitze; ferner sei die Reibung derselben im Laufe $= b$ (so dass ein Gewicht von b Kilogr. nöthig wäre, sie aus dem Laufe zu ziehen); endlich möge der Widerstand der Luft ausser Acht gelassen werden.

Es habe nun der an den Lauf angeschraubte Kolben einen Inhalt $=k$ Kubikmeter, sei r der Halbmesser des Laufes in Metern, a seine Länge im nämlichen Maasse; ferner werde das Ventil, welches den, die gepresste Luft enthaltenden Kolben abschliesst, während τ Sekunden geöffnet und es sei die Elastizität der eingeschlossenen Luft gleich dem $n$fachen Drucke der Atmosphäre (bei mittlerem Barometerstande, den wir voraussetzen); endlich sei das Gewicht der Kugel $=p$ Kilogr.

Während der τ ersten Sekunden wirken auf die Kugel einerseits der Druck der im Kolben eingeschlossenen Luft und anderseits die Reibung und der atmosphärische Druck.



Sei demnach in vorstehender Figur AB die Länge des Laufes (a mètr.), AC der Weg, den die Kugel während der τ ersten Sekunden durchläuft, X der Punkt, in dem sie sich am Ende der Zeit t ($<\tau$) befindet, $AX=x$ mètres. Der Inhalt von AX ist $=r^2\pi x$, demnach die im Kolben enthaltene Luft in den Raum $k+r^2\pi x$ ausgedehnt; ihre Spannung beträgt also noch $\frac{nk}{k+r^2\pi x}$ Atmosphären, also ist der Druck auf die Kugel $=\frac{mnkr^2\pi}{k+r^2\pi x}$, wenn m gleich dem Drucke der atmosphärischen Luft auf 1 Quadratmeter ($m=10330$ Kilogr. ungefähr). Man hat also

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\frac{mnkr^2\pi}{k+r^2\pi x}-b-mr^2\pi}{p}g, \tag{1}$$

wenn g die Beschleunigung der Schwere ($=9{,}8088$ mètres) bezeichnet. Hieraus folgt:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 p=mnkr^2\pi g\int_0^x \frac{dx}{k+r^2\pi x}-(b+mr^2\pi)gx,$$

$$\frac{1}{2}pv^2=mnkg\log\left(\frac{k+r^2\pi x}{k}\right)-(b+mr^2\pi)gx, \tag{2}$$

wenn v die Geschwindigkeit im Punkte X bedeutet.

Hieraus folgt:

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{a_1\log(1+b_1x)-c_1x},$$

wenn $a_1=\frac{2mnkg}{p}$, $b_1=\frac{r^2\pi}{k}$, $c_1=\frac{2(b+mr^2\pi)}{p}g$ ist, woraus folgt:

$$t=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a_1\log(1+b_1x)-c_1x}}. \tag{3}$$

Da dieses Integral nicht allgemein bestimmt werden kann, so begnügen wir uns mit einer Näherung, indem bx immer klein sein wird. Treibt man die Näherung bis zur vierten Potenz von x, so

kommt man auf elliptische Funktionen; wir wollen uns jedoch mit der zweiten Potenz von x begnügen und setzen

$$\log(1+b_1x)=b_1x-\frac{b_1^2x^2}{2},$$

so dass

$$t=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{a_1b_1x-\frac{a_1b_1^2}{2}x^2-c_1x}}=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(a_1b_1-c_1)x-\frac{a_1b_1^2}{2}x^2}},$$

worin $a_1b_1>c_1$ und $2(a_1b_1-c_1)>a_1b_1^2x$ sein muss, d. h.

$$mnr^2\pi>b+r^2m\pi \text{ und } 2(mnr^2\pi-b-mr^2\pi)>\frac{mnr^4\pi^2}{k}x.$$

Die erste Bedingung ist jedenfalls erfüllt, wenn Bewegung erfolgen soll, und die zweite zeigt, dass

$$x<\frac{2k(mnr^2\pi-b-mr^2\pi)}{mnr^4\pi^2}$$

sein wird, was immer der Fall sein wird, wenn

$$a<\frac{2k(mnr^2\pi-b-mr^2\pi)}{mnr^4\pi^2}$$

ist. Setzen wir diess voraus, so ist

$$t=\frac{2}{b_1}\sqrt{\frac{2}{a_1}}.\operatorname{arc}\left(\sin=\sqrt{\frac{a_1b_1^2x}{2(a_1b_1-c_1)}}\right)+\frac{2\varrho}{b_1}\pi\sqrt{\frac{2}{a_1}},$$

wenn ϱ irgend eine ganze, positive Zahl ist, und man dann für $\operatorname{arc}\left(\sin=\sqrt{\frac{a_1b_1^2x}{2(a_1b_1-c_1)}}\right)$ den kleinsten, positiven Werth nimmt. Von $x=0$ bis $x=\frac{2(a_1b_1-c_1)}{a_1b_1^2}$ ist $\varrho=0$, und da wir $x<\frac{2(a_1b_1-c_1)}{a_1b_1^2}$ voraussetzen, so ist

$$t=\frac{2}{b}\sqrt{\frac{2}{a_1}}.\operatorname{arc}\left(\sin=\sqrt{\frac{a_1b_1^2x}{2(a_1b_1-c_1)}}\right), \tag{4}$$

$$x=\frac{2(a_1b_1-c_1)}{a_1b_1^2}\sin^2\left(\frac{b_1t}{2}\sqrt{\frac{a_1}{2}}\right). \tag{5}$$

Demnach ist die Länge

$$AC=\frac{2(a_1b_1-c_1)}{a_1b_1^2}\sin^2\left(\frac{b_1\tau}{2}\sqrt{\frac{a_1}{2}}\right)=\varrho. \tag{6}$$

Fände sich $\varrho>a$, so hätte die Kugel den Lauf schon vor Ende der Zeit τ verlassen, und es wäre die Zeit τ', während welcher sie im Laufe gewesen wäre:

$$\tau' = \frac{2}{b_1}\sqrt{\frac{2}{a_1}}.\operatorname{arc}(\sin = \sqrt{\frac{a_1 b_1{}^2 a}{2(a_1 b_1 - c_1)}}),$$

und die Geschwindigkeit, mit welcher sie denselben verlassen:

$$\sqrt{\frac{2mnkg}{p}\log\left(\frac{k+r^2\pi a}{k}\right)-2(b+mr^2\pi)\frac{ga}{p}}.$$

Ist aber $\varrho < a$, so bewegt sich die Kugel noch ferner im Laufe. Ist nun am Ende der Zeit t (vom Verfluss der Zeit τ an gerechnet) die Kugel in Y und heisst $CY=y$, so findet sich, wie oben:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{g}{p}\left[\frac{mnkr^2\pi}{k+r^2\pi\varrho}\cdot\frac{\varrho}{\varrho+y}-b-mr^2\pi\right],$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\frac{p}{g}=\frac{mnkr^2\pi\varrho}{k+r^2\pi\varrho}\log\left(\frac{\varrho+y}{\varrho}\right)-(b+mr^2\pi)y, \qquad (7)$$

welche Formel die Geschwindigkeit im Punkte Y bestimmt. Setzt man hierin $y=a-\varrho$, so erhält man endlich die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel den Lauf verlässt, für die man findet:

$$\sqrt{\frac{2mnkr^2\pi\varrho g}{p(k+r^2\pi\varrho)}\log\left(\frac{a}{\varrho}\right)-\frac{2(b+mr^2\pi)}{p}g(a-\varrho)}, \qquad (8)$$

worin ϱ durch die Formel (6) bestimmt ist.

Diese Endgeschwindigkeit zu bestimmen, haben wir uns zur Aufgabe gesetzt.

XXXIX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Oskar Werner,
Schüler des polytechnischen Institutes zu Dresden.

Folgendes ist zu beweisen.

Für jedes beliebige p und positive ganze r besteht die Relation

$$1)\quad \frac{p}{p+2}\left[(-1)^{r-1}\cdot\frac{2.4.6....2r}{p(p-2)...(p-2r+2)}+1\right]$$

$$=1-\frac{2}{p-2}+\frac{2.4}{(p-2)(p-4)}-....(-1)^{r-1}\cdot\frac{2.4.6....(2r-2)}{(p-2)(p-4)...(p-2r+2)}.$$

(Fortsetzung folgt.)

XL.

Ueber die Identität der Pyramidal- und prismatischen Schnitte mit den Verwandtschaften der Collineation und Affinität.

Von

Herrn Simon Spitzer

zu Wien.

---

§. 1.

Möbius stellt in seinem barycentrischen Calcul zuerst das Princip der Collineation auf; er sagt darüber Folgendes: Das Wesen dieser neuen Verwandtschaft besteht darin, dass bei zwei ebenen oder körperlichen Räumen jedem Punkte des einen Raumes ein Punkt in dem andern Raume dergestalt entspricht, dass, wenn man in dem einen Raume eine beliebige Gerade zieht, von allen Punkten, welche von dieser Geraden getroffen werden, die entsprechenden Punkte in dem andern Raume gleichfalls durch eine Gerade verbunden werden können.

Aus dieser Erklärung leitet er die Eigenschaften dieser Figuren durch Rechnung ab. Andere vervollkommneten diesen Gegenstand theils durch analytische, theils durch geometrische Arbeiten, aber es herrschte darin kein eigentlicher, wahrer geometrischer Zusammenhang, es fehlte das Band, das sie inniger vereinigen sollte. Man hatte, um mich der Worte Steiner's zu bedienen, nur eine Sammlung von aus einander liegenden, wenn auch sehr scharfsinnigen Kunststücken, aber kein organisch zusammenhängendes Ganze zu Stande gebracht.

§. 2.

Ich habe versucht, den geometrischen Zusammenhang collinearverwandter Figuren zu erforschen; ob es mir gelungen, mögen Sachverständige entscheiden. — **Wenn man eine Pyramide durch Ebenen schneidet, so haben je zwei dadurch entstehende Schnitte eine solche Relation gegen einander, dass jedem Punkte des einen Schnitts ein Punkt**

des andern entspricht, dergestalt, dass wenn drei Punkte des einen Schnitts in gerader Linie liegen, die drei ihnen entsprechenden Punkte des andern Schnitts ebenfalls in gerader Linie enthalten sind; daher entspricht auch jeder Geraden des einen eine Gerade des andern Schnitts. Man nennt solche Systeme von Figuren, die diese Eigenschaft haben, nach Möbius, collinear-verwandte oder collineare Figuren.

§. 3.

Wird die Pyramide sammt ihren Schnitten auf irgend eine Ebene projicirt, so sind auch die Projectionen der Schnitte collinear verwandt, denn nach den Gesetzen der Projectionslehre entspricht jedem Punkte im Raume ein Punkt der Projection, und wenn im Raume drei Punkte in einer Geraden liegen, so liegen die Projectionen dieser drei Punkte auch in einer Geraden. Ja, sogar zwei Projectionen Eines Schnittes sind collinear-verwandt, denn die beiden Projectionen einer Geraden sind im Allgemeinen wieder Gerade, und jedem Punkte der einen Geraden entspricht ein Punkt der andern. Liegt ein Schnitt in einer projicirenden Ebene, so ist die Projection desselben eine Gerade, daher kann auch eine Gerade mit irgend einer Figur collinear-verwandt sein.

§. 4.

Man kann daher bei der Entwickelung der Gesetze der collinearen Figuren sowohl von den Schnitten der Pyramide als ihren Projectionen ausgehen, die bei den erstern gefundenen, so oft es möglich ist, auf letztere ausdehnen, und umgekehrt. Auf diese Art lernt man zugleich den innern Zusammenhang der räumlichen Grössen und ihrer Projectionen besser kennen.

§. 5.

Man nennt den Scheitel der Pyramide das Collineationscentrum, die Durchschnittslinie der Ebenen beider Systeme die Collineationsachse. Dieselben Benennungen gelten auch für ihre Projectionen. Hier kann der spezielle Fall eintreten, dass die Collineationsachse in einen Punkt übergeht.

§. 6.

Nach diesen Erklärungen wird man im Stande sein, zu irgend einer Geraden ab (Taf. IX. Fig. 1.) des Systems I. ihre entsprechende AB des Systems II. zu finden. Man lege nämlich durch O und ab eine Ebene; der Schnitt dieser mit der Ebene II. gibt die verlangte Gerade. Eben so kann man zu irgend einem Punkte c des Systems I. seinen entsprechenden Punkt C des Systems II. finden; man verbinde nur O mit c, und verlängere diesen Strahl so lange, bis er die Ebene II. im verlangten Punkte C schneidet.

§. 7.

Je zwei entsprechende Gerade zweier collinear-verwandten Figuren schneiden sich in der Collineationsachse; denn betrachten wir irgend zwei entsprechende Gerade, so liegen sie nach dem

rhergehenden in einer Ebene, sie müssen sich daher schneiden. r Durchschnittspunkt liegt aber, weil er der Geraden des ersten stems angehört, in der Ebene des ersten Systems, und weil er ch der Geraden des zweiten Systems angehört, in der Ebene des eiten Systems; er gehört also beiden Ebenen an, daher liegt im Durchschnitt beider, d. i. in der Collineationsachse. Es hneiden sich daher auch je zwei entsprechende Projectionen der raden in einer Geraden; was besonders für die Geometrie deiptive bemerkenswerth ist.

§. 8.

Daraus folgt: Ist in Taf. IX. Fig. 2. von zwei Figuren die ie derselben *ABCD*, die Collineationsachse *MN*, und ein der stern entsprechender Punkt *a* gegeben, so lässt sich mit Leichkeit die mit der ersten collinear-verwandte bloss mit Hülfe des neals construiren. Man verlängere nämlich *AD*, bis die Colliationsachse in 1 geschnitten wird, so ist 1 auch ein Punkt der nie *ad* der entsprechenden collinear-verwandten Figur. Verbint man 1 mit *a*, so ist *ad* die der *AD* entsprechende Gerade erlängert man dann *AB* bis zum Durchschnitt 2 mit der Colliationsachse, so ist 2 wieder ein Punkt der *ab*; verbindet man her 2 mit *a*, so ist *ab* die der *AB* entsprechende Gerade; vergert man *BC* bis 3, verbindet man 3 mit *b*, so erhält man *bc*. s. f.

§. 9.

Unmittelbar daraus folgen wieder eine Reihe merkwürdiger tze, von denen ich nur folgenden anführe: Drehen sich die iten eines *n*ecks um *n* feste Punkte, die in einer Geraden liegen, d bewegen sich $n-1$ Ecken desselben auf eben so vielen festen raden, welche sich in einem und demselben Punkte *O* durchhneiden, so bewegen sich auch die übrige Ecke und alle andern tsprechenden Punkte in andern festen Geraden, welche mit ien den Durchschnitt *O* gemein haben.

§. 10.

Unter allen Paaren entsprechender Geraden zeichnen sich zwei sonders aus, man nennt sie die Gegenachsen. Denkt man ch nämlich durch die Spitze *O* eine Ebene parallel zu einer r beiden Ebenen gelegt, so kann sie diese Ebene nicht schneiu, wohl aber die andere, zu der sie nicht parallel ist; und zwar einer Geraden parallel zur Collineationsachse. Die dem jedesligen Schnitte (Gegenachse) entsprechende Gerade liegt unendh entfernt.

§. 11.

Zieht man in einem Systeme mehrere parallele Gerade *ab*, *a'b'*, *b''*,.... (Taf. IX. Fig. 3.), legt dann durch jede derselben und ch das Collineationscentrum Ebenen, die sich in einer Geraden *B''* schneiden, die zu den parallelen Geraden parallel ist, und

sucht man den Durchschnitt B'' dieser Geraden mit der andern Ebene, so ist B'' (in der Perspektivlehre unter dem Namen Begegnungspunkt bekannt), da er nicht nur im Durchschnitte der Ebenen $A''ab$, $A''a'b'$, $A''a''b''$,...., sondern auch in der Ebene II. liegt, der Durchschnitt jener Geraden, die den parallelen Geraden ab, $a'b'$, $a''b''$,.... entsprechen. Aendern diese parallelen Geraden ihre Richtung, so ändert auch $A''B''$ ihre Richtung, sie bleibt aber immer in der Ebene $A''B''B'$. Man sieht daraus, dass der Ort der Durchschnittspunkte derjenigen Geraden im System II., welche parallelen Geraden im System I. entsprechen, die Gegenachse MN des Systems II. ist, oder auch, dass jeder Reihe paralleler Geraden in dem einen Systeme ein Punkt in der Gegenachse entspricht. Eben so ist der Ort der Durchschnittspunkte der Geraden im Systeme I., die parallelen Geraden im Systeme II. entsprechen, die Gegenachse des Systems I. Dieser Satz lässt sich auch sehr vortheilhaft für die Projectionen der Pyramidalschnitte übertragen.

§. 12.

Wir können die collinearen Figuren auch noch auf eine zweite Art betrachten. Es sei ABC (Taf. X. Fig. 4.) die Grundfläche und O der Scheitel einer Pyramide; denkt man sich diese Grundfläche ABC als fest, und die Spitze O der Pyramide als veränderlich, so werden dadurch nur immer andere und andere Pyramiden beschrieben. Schneidet man sie alle durch eine Ebene, so sind die dadurch entstehenden Figuren collinear-verwandt, denn es entspricht jedem Punkte m des einen Systems ein Punkt m' des andern; und diese waren eigentlich allgemeine Betrachtung der Geometer.

§. 13.

Wir wollen hier zuerst die allgemeinen Benennungen festsetzen, und dann einige Gesetze dieser Figuren entwickeln.

Der Durchschnitt der Schnittebene mit der Ebene ABC (Taf. X. Fig. 4.) ist die Collineationsachse, auf ihr schneiden sich alle entsprechenden Geraden, es möge der Punkt O' sich nach was immer für einem Gesetze bewegt haben, die Figuren sind einander wenigstens zu je zweien collinear-liegend, und haben daher einen Punkt (Collineationscentrum), wo sich die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte schneiden. Die Beweise dieser Sätze sind so einfach, dass ich sie ganz übergehe. Legt man durch O und O' Ebenen parallel zur Schnittebene, so erhält man im Durchschnitt dieser Ebenen mit der Ebene ABC die Gegenachse.

§. 14.

Bewegt sich der Punkt O' in einer Geraden, so haben alle Figuren nur Ein Collineationscentrum, die Punkte $aa'a''a'''$.... liegen in einer Geraden, eben so $bb'b''b'''$.... u. s. w., denn sowohl AO, AO', AO''.... liegen in einer Ebene, als auch a, a', a''...., daher der Durchschnitt beider in einer Geraden, die durch die gemeinschaftlichen Punkte $aa'a''$... beider Ebenen geht.

§. 15.

Hinsichtlich der besondern Lage des Collineationscentrums und der Collineationsachse können folgende Fälle eintreten:

1) Es kann das Collineationscentrum unendlich entfernt sein; dann geht die Pyramide in ein Prisma über, die Durchschnittsfiguren stehen in einfacheren Relationen, man sagt, sie seien affin, oder stehen in der Verwandtschaft der Affinität.

2) Es kann die Collineationsachse unendlich weit entfernt sein; dann sind die schneidenden Ebenen parallel, die Schnitte sind ähnlich, können aber auch congruent sein. Die Spitze der Pyramide oder ihre Projection nennt man hier Aehnlichkeitspunkt.

3) Es können die Collineationsachse und das Collineationscentrum unendlich entfernt sein, d. h. es wird ein Prisma von parallelen Ebenen geschnitten; die Durchschnittsfiguren sind dann nur congruent.

Aehnliche Fälle lassen sich auch bei der zweiten Betrachtungsweise anführen.

§. 16.

Wir haben bisher die collinearen Figuren in der Lage betrachtet, wie sie unmittelbar aus dem Pyramidalschnitt entstanden sind, oder in der Lage der Projectionen dieser ihrer Schnitte. Man nennt sie so eigentlich collinear-liegend. Denken wir uns nun die Figuren in einer solchen Lage, dass nicht mehr, wenn man je zwei entsprechende Punkte mit einander verbindet, sich alle Verbindungslinien in einem Punkte schneiden, so ist die Frage, wie findet man da zu jedem Punkte oder zu jeder Geraden des einen Systems den entsprechenden Punkt oder die entsprechende Gerade im andern, wie kann man die Figuren wieder in ihre ursprüngliche Lage bringen, oder hauptsächlich: welche Gesetze finden zwischen den Elementen beider Systeme statt? Ich will hier ein für allemal bemerken, dass die Gesetze, die ich hier aus einer Betrachtungsweise ableite, sich auch auf die andern anwenden lassen.

§. 17.

Es seien in Taf. IX. Fig. 5. $ABCD$ und $abcd$ vier einander entsprechende Punkte in entsprechenden Geraden beider Systeme liegend, so ist wegen des Strahlbüschels OA, OB, OC, OD, der von den zwei Geraden ad und AD geschnitten wird:

$$\frac{ab}{cb}:\frac{ad}{cd}=\frac{AB}{CB}:\frac{AD}{CD},$$

und diess ist das Gesetz, das zwischen je vier in einer Geraden liegenden, einander entsprechenden Punkten herrscht, und das, wie man sieht, auch dann noch stattfinden muss, wenn die beiden Systeme irgend eine andere Lage haben, denn es hängt bloss von den Abschnitten der Punkte $abcd$ und $ABCD$ ab.

§. 18.

Sind daher vier in gerader Linie liegende Punkte $ABCD$ (Taf. IX. Fig. 6.) des einen Systems und drei ihnen entsprechende abc des andern Systems gegeben, so kann man den vierten d finden; denn in obiger Proportion sind die drei ersten Glieder gegeben, und es sei das vierte unbekannte Glied $\frac{ad}{cd}=m$, so ist d vollkommen bestimmt. Durch Construction findet man ihn auf folgende Art.

Man ziehe zwei Gerade unter einem beliebigen Winkel, trage auf der einen die Punkte $A'B'C'D'$ und auf der andern die Punkte $a'b'c'$ auf, so dass $A'B'=AB$, $B'C'=BC$, $C'D'=CD$, $a'b'=ab$, $b'c'=bc$ ist, verbinde b' mit B', c' mit C', den Durchschnitt O mit D' verbunden, schneidet die $a'c'$ in d', den man dann auf der gegebenen Geraden aufträgt, so dass $cd=c'd'$ ist. Behufs des Beweises ziehe man noch OA', so hat man einen Strahlbüschel, der von den zwei Geraden $A'D'$ und $a'd'$ geschnitten wird; daher findet die oben aufgestellte Proportion statt. Für affine Figuren, wo die Strahlen aA, bB,.... parallel sind, muss sich noch nebstdem verhalten: $\frac{ab}{AB}=\frac{bc}{BC}=\frac{cd}{CD}=\ldots$ Man kann daher bei affinen Figuren aus drei in gerader Linie liegenden Punkten ABC des einen Systems und aus zwei ihnen entsprechenden ab des andern, den dritten Punkt c finden, und zwar durch Construction auf folgende Arten.

1) Man ziehe in Taf. IX. Fig. 7. α. wieder zwei Gerade unter einem beliebigen Winkel, trage auf dieselbe Art wie vorher die Punkte $A'B'C'a'b'$ auf, verbinde B' mit b' und ziehe durch C' eine Parallele zu $B'b'$, so ist c' der verlangte Punkt, oder:

2) Man ziehe in Taf. IX. Fig. 7. β. zwei parallele Gerade, trage wieder die Punkte $A'B'C'a'b'$ auf, verbinde A' mit a', B' mit b' und C' mit dem Durchschnitte O, so ist c' der verlangte Punkt.

Die Beweise beider Constructionen ergeben sich aus den Gesetzen der projectivischen Beziehungen ebener Strahlbüschel.

§. 19.

Schon aus diesen Constructionen ergeben sich die folgenden Sätze:

1) Sind zwei Gerade und in jeder derselben drei beliebige Punkte gegeben, so können diese Geraden immer als collineare Gerade und die drei Paare von Punkten als entsprechende collineare Punkte angesehen werden.

2) Sind zwei Gerade und in jeder derselben zwei beliebige Punkte gegeben, so können diese Geraden immer als affine Gerade und die zwei Paare von Punkten als entsprechende affine Punkte angesehen werden.

Denn nimmt man in der einen Geraden noch einen beliebigen Punkt an, so kann man den entsprechenden Punkt in der andern Geraden nach dem Vorhergehenden finden.

§. 20.

Es sind fünf Punkte *ABCDE* (Taf. X. Fig. 8.) und vier ihnen entsprechende Punkte *abcd* einer collinearen Figur gegeben, man soll den Punkt *e*, welcher dem Punkte *E* collinear ist, finden. Man bilde durch Verbindung der Punkte *ABCD* und *abcd* die beiden vollständigen Vierecke, ziehe die *AE*, die die *FB* in *M* schneidet, suche den dem Punkte *M* entsprechenden Punkt im andern Systeme (*m*), verbinde *a* mit *m*, so ist diese Verbindungslinie der Ort des Punktes *e*. Verbindet man nun z. B. auch *G* mit *E*, wodurch man *N* erhält, und sucht den entsprechenden *n*, so ist auch *gn* der Ort des Punktes *e*, daher ist *e* im Durchschnitt beider Oerter.

§. 21.

Es sind vier Punkte *ABCD* (Taf. X. Fig. 9.) und drei ihnen entsprechende Punkte *abc* einer affinen Figur gegeben, man soll den Punkt *d*, welcher dem Punkte *D* affin ist, finden. Man bilde durch Verbindung der vier Punkte *ABCD* das vollständige Viereck, so erhält man die zwei neuen Punkte *M* und *N*, suche die entsprechenden affinen Punkte *m* und *n* in den Geraden *ab* und *bc*, verbinde *m* mit *c* und *n* mit *a*, so ist im Durchschnitt beider der verlangte Punkt *d*.

Es können daher im Allgemeinen zwei beliebige Vierecke als collinear und zwei beliebige Dreiecke als affin angesehen werden.

§. 22.

Durch diese einfache Betrachtung der Collineation und Affinität der Figuren als Pyramidalschnitte und durch diese wenigen Sätze ist man im Stande, eine zahlreiche Anzahl von Aufgaben zu lösen, und überall den geistigen, geometrischen Zusammenhang mit der grössten Allgemeinheit zu vereinen. Sätze, die sonst lange Beweise bedurften, werden dadurch von selbst klar, das schönste, die Kegel- und Cylinderschnitte erscheinen nur als einzelne, spezielle Fälle. Wir wollen nun gleich versuchen, mehrere Aufgaben mit Hülfe unserer gewonnenen Sätze zu lösen.

1) Es sind zwei Systeme collinear-liegender Punkte gegeben, man soll die Gegenachsen beider Systeme construiren.

Um diese Aufgabe zu lösen, suche man zuerst die Collineationsachse; sie geht nach §. 7. durch die Durchschnittspunkte entsprechender Geraden; verlängert man daher in Taf. X. Fig. 10. *ab* und *AB*, *ac* und *AC*, so sind *M* sowohl als *N* Punkte derselben, daher *MN* die Collineationsachse. Die Gegenachsen liegen nun mit ihr parallel, und zwar in den Durchschnitten der, durch *O*, zu jeder der beiden Ebenen parallel gelegten Ebene: zieht man nun durch *O* z. B. zur *ab* und *ac* Parallelen, und verlängert sie so lange, bis sie die *AB* und *AC* schneiden, so erhält man die Gegenachse des Systems *ABC*. Eben so erhält man die Gegenachse des Systems *abc*.

2) Es ist eine Figur des einen Systems, die Collineationsachse, das Collineationscentrum und die Gegenachse des andern Systems gegeben. Man soll die mit der gegebenen Figur collinear-liegende Figur durch Construction finden. — Es sei *abcd* (Taf. IX. Fig. 3.) die gegebene Figur, $P\varphi$ die Collineationsachse und MN die Gegenachse der zu bestimmenden collinearen Figur. Wir entwickelten in §. 11. den Satz: Wenn man durch A'' eine Parallele zu irgend einer Geraden, z. B. *ab* zieht, bis sie die Gegenachse in B'' schneidet, so ist dieser Punkt B'' der geometrische Ort der Durchschnittspunkte jener Geraden im andern Systeme, die zu *ab* parallelen Geraden entsprechen. Wollen wir daher die der *ab* entsprechende Gerade im andern Systeme erhalten, so ziehen wir durch das Collineationscentrum eine zu *ab* parallele Gerade, verlängern dieselbe bis sie die Gegenachse in B'' schneidet, so ist B'' ein Punkt der zu suchenden Geraden. Die *ab* schneidet aber auch die Collineationsachse in einem Punkte, der ebenfalls der zu suchenden Geraden gehört, weil je zwei entsprechende Gerade sich in der Collineationsachse schneiden, es sind daher von der zu suchenden Geraden zwei Punkte bekannt, daher auch die Gerade. Fährt man so fort, so erhält man alle, den Geraden *ab*, *bd*, *dc* u. s. w. collinear liegenden Geraden, daher auch zugleich die collineare Figur.

3) Es sind zwei collineare Figuren gegeben, die nicht collinear liegen, man soll das Collineationscentrum und die Collineationsachse durch Construction bestimmen. Nehmen wir an, wir hätten bereits die Gegenachsen gefunden, ziehen wir dann aus einem Punkte B'' (Taf. IX. Fig. 3.) der einen Gegenachse zwei Strahlen $B''\alpha$, $B''\beta$, so werden die entsprechenden Geraden $a'b'$, $a''b''$ im andern Systeme einander parallel sein und von der Collineationsachse ein eben so grosses Stück $\alpha\beta$ abschneiden, als die zwei Strahlen abschnitten. Um daher unsere Aufgabe zu lösen, müssen wir zuerst die Gegenachsen construiren, das geschieht auf folgende Art: Es seien in Taf. X. Fig. 11. *ABCD* und *abcd* collinear-verwandt; ich ziehe in dem einen Systeme *ABCD* zwei Paar zu einander parallele Gerade MN, $M'N'$ und MP, $M'P'$, und bestimme in der collinearen Figur die entsprechenden Geraden (indem ich zuerst zu den fünf Punkten *ABCDM* und *abcd* den dem M entsprechenden m suche, dann eben so n, p, ...); in den Durchschnittspunkten R, S sind zwei Punkte der Gegenachse enthalten. Hat man auf diese Art die Gegenachsen der Figur *ABCD* (Taf. IX. Fig. 3.) bestimmt, so kann man das Stück $\alpha\beta$ leicht finden; man braucht nur die parallelen Geraden *ab*, $a'b'$ über die Gegenachse dieses Systems zu verlängern. Um noch $B''\alpha$ zu finden, denken wir uns die Ebene I. parallel zu sich selbst fortbewegt, oder bloss eine Gerade $P'\varphi'$ parallel zur Gegenachse gezogen, so sieht man, dass $\alpha\beta : \alpha'\beta' = \alpha B'' : \alpha' B''$, woraus man $\alpha B''$ finden kann. Trägt man $\alpha B''$ nun von B'' aus auf und zieht die Parallele zur Gegenachse, so erhält man die Collineationsachse. Sucht man im andern Systeme auch die Collineationsachse, legt dann beide Systeme über einander, dass sich beide Collineationsachsen decken, und zwar so, dass sich die gleichliegenden Geraden in einem Punkte derselben schneiden; so sind die Figuren collinear-liegend. Das Collineationscentrum findet man durch Verbindung entsprechender Punkte.

Ich will nur noch erwähnen, dass fast alle Sätze aus Steiner's systematischer Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander sich unmittelbar auf die collinear-verwandten Figuren anwenden lassen.

XLI.

Ueber einen allgemeinen Lehrsatz der Statik und über einige geometrische und statische Sätze von der Pyramide und den eckigen Körpern überhaupt.

Von
dem Herausgeber.

---

§. 1.

Ich will zuerst den folgenden Satz beweisen:

Lehrsatz.

Wenn beliebige Kräfte im Raume unter einander im Gleichgewichte sind, so sind immer auch deren Projectionen auf einer jeden beliebigen Ebene unter einander im Gleichgewichte.

Beweis.

Die gegebenen Kräfte seien

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ldots;$$

die Coordinaten ihrer Angriffspunkte in Beziehung auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem seien

$$x,\ y,\ z;\quad x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2;\quad x_3,\ y_3,\ z_3;\ldots;$$

und

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\quad \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\quad \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3;\ldots$$

seien die auf bekannte Weise genommenen Bestimmungswinkel ihrer Richtungen.

Ist nun

$$1)\quad AX+BY+CZ+D=0$$

die Gleichung einer beliebigen Ebene, und werden durch

$$\xi,\ \eta,\ \zeta;\ \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1;\ \xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2;\ \xi_3,\ \eta_3,\ \zeta_3;\ldots$$

die Coordinaten der Projectionen der Punkte

$$(xyz),\ (x_1y_1z_1),\ (x_2y_2z_2),\ (x_3y_3z_3),\ldots$$

auf dieser Ebene bezeichnet; so ist, wenn wir der Kürze wegen

$$2)\quad \left\{\begin{array}{l} \varDelta\ =Ax+By+Cz+D, \\ \varDelta_1=Ax_1+By_1+Cz_1+D, \\ \varDelta_2=Ax_2+By_2+Cz_2+D, \\ \varDelta_3=Ax_3+By_3+Cz_3+D, \\ \qquad\text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

setzen, nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie:

$$3)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi=x-\dfrac{A\varDelta}{A^2+B^2+C^2},\ \eta=y-\dfrac{B\varDelta}{A^2+B^2+C^2},\ \zeta=z-\dfrac{C\varDelta}{A^2+B^2+C^2}; \\ \xi_1=x_1-\dfrac{A\varDelta_1}{A^2+B^2+C^2},\ \eta_1=y_1-\dfrac{B\varDelta_1}{A^2+B^2+C^2},\ \zeta_1=z_1-\dfrac{C\varDelta_1}{A^2+B^2+C^2}; \\ \xi_2=x_2-\dfrac{A\varDelta_2}{A^2+B^2+C^2},\ \eta_2=y_2-\dfrac{B\varDelta_2}{A^2+B^2+C^2},\ \zeta_2=z_2-\dfrac{C\varDelta_2}{A^2+B^2+C^2}; \\ \xi_3=x_3-\dfrac{A\varDelta_3}{A^2+B^2+C^2},\ \eta_3=y_3-\dfrac{B\varDelta_3}{A^2+B^2+C^2},\ \zeta_3=z_3-\dfrac{C\varDelta_3}{A^2+B^2+C^2}; \\ \qquad\qquad\text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

Bezeichnen wir nun die Projectionen der Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ldots$$

auf der durch die Gleichung 1) charakterisirten Ebene respective durch

$$\Pi,\ \Pi_1,\ \Pi_2,\ \Pi_3,\ \Pi_4,\ldots$$

und die 90° nicht übersteigenden Neigungswinkel ihrer Richtungen gegen die in Rede stehende Ebene respective durch

$$i,\ i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4,\ldots;$$

so ist

$$4)\quad \Pi=P\cos i,\ \Pi_1=P_1\cos i_1,\ \Pi_2=P_2\cos i_2,\ \Pi_3=P_3\cos i_3,\ldots$$

Bezeichnen wir aber die auf gewöhnliche Weise genommenen Bestimmungswinkel der Richtungen der Kräfte

$$\Pi,\ \Pi_1,\ \Pi_2,\ \Pi_3,\ \Pi_4, \ldots.$$

lurch

$$\varphi,\ \psi,\ \chi;\ \varphi_1,\ \psi_1,\ \chi_1;\ \varphi_2,\ \psi_2,\ \chi_2;\ \varphi_3,\ \psi_3,\ \chi_3;\ldots;$$

so ist, wie ich in der Abhandlung Archiv. Thl. VI. Nr. XXXVIII. 23) und 24) gezeigt habe, wenn wie dort der Kürze wegen

$$5)\quad K=\sqrt{A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}$$

gesetzt wird:

$$6)\quad \begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{(A^2+B^2+C^2)\cos\alpha-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)A}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\psi=\dfrac{(A^2+B^2+C^2)\cos\beta-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)B}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\chi=\dfrac{(A^2+B^2+C^2)\cos\gamma-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)C}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{cases}$$

und

$$7)\quad \cos i=\frac{K}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

und ebenso für die andern Kräfte.

Also ist

$$\cos i\cos\varphi=\cos\alpha-\frac{A}{A^2+B^2+C^2}(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma),$$

$$\cos i\cos\psi=\cos\beta-\frac{B}{A^2+B^2+C^2}(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma),$$

$$\cos i\cos\chi=\cos\gamma-\frac{C}{A^2+B^2+C^2}(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)$$

und, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\begin{aligned} &\cos i(\xi\cos\psi-\eta\cos\varphi) \\ =&\frac{C}{A^2+B^2+C^2}\left\{\begin{array}{l} A(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B(z\cos\alpha-x\cos\gamma) \\ \qquad +C(x\cos\beta-y\cos\alpha)\end{array}\right\} \\ &-\frac{D}{A^2+B^2+C^2}(A\cos\beta-B\cos\alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cos i(\eta\cos\chi-\zeta\cos\psi) \\ =&\frac{A}{A^2+B^2+C^2}\left\{\begin{array}{l} A(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B(z\cos\alpha-x\cos\gamma) \\ \qquad +C(x\cos\beta-y\cos\alpha)\end{array}\right\} \\ &-\frac{D}{A^2+B^2+C^2}(B\cos\gamma-C\cos\beta), \end{aligned}$$

$$\cos i(\zeta\cos\varphi-\xi\cos\chi)$$
$$=\frac{B}{A^2+B^2+C^2}\left\{\begin{array}{r}A(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\\+C(x\cos\beta-y\cos\alpha)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{D}{A^2+B^2+C^2}(C\cos\alpha-A\cos\gamma).$$

Also ist offenbar in einer bekannten Bezeichnung

8)

$$\Sigma\Pi\cos\varphi=\Sigma P\cos\alpha-\frac{A}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha+B\Sigma P\cos\beta+C\Sigma P\cos\gamma),$$
$$\Sigma\Pi\cos\psi=\Sigma P\cos\beta-\frac{B}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha+B\Sigma P\cos\beta+C\Sigma P\cos\gamma),$$
$$\Sigma\Pi\cos\chi=\Sigma P\cos\gamma-\frac{C}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha+B\Sigma P\cos\beta+C\Sigma P\cos\gamma)$$

und

9)

$$\Sigma\Pi(\xi\cos\psi-\eta\cos\varphi)$$
$$=\frac{C}{A^2+B^2+C^2}\left\{\begin{array}{r}A\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\\+C\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{D}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\beta-B\Sigma P\cos\alpha),$$

$$\Sigma\Pi(\eta\cos\chi-\zeta\cos\psi)$$
$$=\frac{A}{A^2+B^2+C^2}\left\{\begin{array}{r}A\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\\+C\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{D}{A^2+B^2+C^2}(B\Sigma P\cos\gamma-C\Sigma P\cos\beta),$$

$$\Sigma\Pi(\zeta\cos\varphi-\xi\cos\chi)$$
$$=\frac{B}{A^2+B^2+C^2}\left\{\begin{array}{r}A\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\\+C\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{D}{A^2+B^2+C^2}(C\Sigma P\cos\alpha-A\Sigma P\cos\gamma).$$

Weil nun nach der Voraussetzung die Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ldots.$$

unter einander im Gleichgewichte sind, so ist nach den Grundlehren der Statik bekanntlich

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\ \Sigma P\cos\beta=0,\ \Sigma P\cos\gamma=0;$$
$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0,$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)=0,$$
$$\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0.$$

Also ist nach dem Obigen auch

$$\Sigma\Pi\cos\varphi=0,\ \Sigma\Pi\cos\psi=0,\ \Sigma\Pi\cos\chi=0;$$
$$\Sigma\Pi(\xi\cos\psi-\eta\cos\varphi)=0,$$
$$\Sigma\Pi(\eta\cos\chi-\zeta\cos\psi)=0,$$
$$\Sigma\Pi(\zeta\cos\varphi-\xi\cos\chi)=0;$$

und nach den Grundlehren der Statik sind folglich auch die Kräfte

$$\Pi,\ \Pi_1,\ \Pi_2,\ \Pi_3,\ \Pi_4,\ldots.$$

unter einander im Gleichgewichte, wie bewiesen werden sollte.

Wenn man die Projectionsebene als Ebene der xy annimmt, so erfordert der Beweis des obigen Satzes weniger Aufwand von Calcul wie vorher; derselbe ist jedoch hier absichtlich, namentlich auch des Folgenden wegen, in möglichst grosser Allgemeinheit geführt worden.

§. 2.

Für an einem und demselben Punkte wirkende Kräfte lässt sich nun aber auch der folgende Satz beweisen:

Lehrsatz.

Wenn an einem und demselben Punkte beliebig viele Kräfte wirken, und deren Projectionen auf zwei beliebigen sich schneidenden Ebenen, jedes dieser beiden Systeme für sich, unter einander im Gleichgewichte sind; so sind jederzeit die gegebenen Kräfte selbst unter einander im Gleichgewichte.

Beweis.

Wir wollen alle im vorhergehenden Paragraphen gebrauchten Bezeichnungen auch jetzt beibehalten, und nur annehmen, dass die Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ldots$$

sämmtlich an einem und demselben Punkte wirken sollen. Sind dann

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0$$

die Gleichungen der beiden sich schneidenden Ebenen, von denen oben im Satze die Rede gewesen ist; so ist nach §. 1. 8):

$$\Sigma\Pi\cos\varphi = \Sigma P\cos\alpha - \frac{A}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha + B\Sigma P\cos\beta + C\Sigma P\cos\gamma),$$

$$\Sigma\Pi\cos\psi = \Sigma P\cos\beta - \frac{B}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha + B\Sigma P\cos\beta + C\Sigma P\cos\gamma),$$

$$\Sigma\Pi\cos\chi = \Sigma P\cos\gamma - \frac{C}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha + B\Sigma P\cos\beta + C\Sigma P\cos\gamma);$$

und auf ganz ähnliche Art für die zweite Projectionsebene in einer leicht durch sich selbst verständlichen Bezeichnung:

$$\Sigma\Pi'\cos\varphi' = \Sigma P\cos\alpha - \frac{A'}{A'^2+B'^2+C'^2}(A'\Sigma P\cos\alpha + B'\Sigma P\cos\beta + C'\Sigma P\cos\gamma),$$

$$\Sigma\Pi'\cos\psi' = \Sigma P\cos\beta - \frac{B'}{A'^2+B'^2+C'^2}(A'\Sigma P\cos\alpha + B'\Sigma P\cos\beta + C'\Sigma P\cos\gamma),$$

$$\Sigma\Pi'\cos\chi' = \Sigma P\cos\gamma - \frac{C'}{A'^2+B'^2+C'^2}(A'\Sigma P\cos\alpha + B'\Sigma P\cos\beta + C'\Sigma P\cos\gamma).$$

Weil nun nach der Voraussetzung die Projectionen der gegebenen Kräfte auf einer jeden der beiden Projectionsebenen unter einander im Gleichgewichte sind: so ist nach den Grundlehren der Statik

$$\Sigma\Pi\cos\varphi = 0,\ \Sigma\Pi\cos\psi = 0,\ \Sigma\Pi\cos\chi = 0$$

und

$$\Sigma\Pi'\cos\varphi' = 0,\ \Sigma\Pi'\cos\psi' = 0,\ \Sigma\Pi'\cos\chi' = 0;$$

also nach dem Obigen

$$0 = \Sigma P\cos\alpha - \frac{A}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha + B\Sigma P\cos\beta + C\Sigma P\cos\gamma),$$

$$0 = \Sigma P\cos\beta - \frac{B}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha + B\Sigma P\cos\beta + C\Sigma P\cos\gamma),$$

$$0 = \Sigma P\cos\gamma - \frac{C}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha + B\Sigma P\cos\beta + C\Sigma P\cos\gamma)$$

und

$$0 = \Sigma P\cos\alpha - \frac{A'}{A'^2+B'^2+C'^2}(A'\Sigma P\cos\alpha + B'\Sigma P\cos\beta + C'\Sigma P\cos\gamma),$$

$$0 = \Sigma P\cos\beta - \frac{B'}{A'^2+B'^2+C'^2}(A'\Sigma P\cos\alpha + B'\Sigma P\cos\beta + C'\Sigma P\cos\gamma),$$

$$0 = \Sigma P\cos\gamma - \frac{C'}{A'^2+B'^2+C'^2}(A'\Sigma P\cos\alpha + B'\Sigma P\cos\beta + C'\Sigma P\cos\gamma);$$

woraus sich leicht die Gleichungen

$$A\Sigma P\cos\beta = B\Sigma P\cos\alpha,$$
$$B\Sigma P\cos\gamma = C\Sigma P\cos\beta,$$
$$C\Sigma P\cos\alpha = A\Sigma P\cos\gamma$$

und

$$A'\Sigma P\cos\beta = B'\Sigma P\cos\alpha,$$
$$B'\Sigma P\cos\gamma = C'\Sigma P\cos\beta,$$
$$C'\Sigma P\cos\alpha = A'\Sigma P\cos\gamma$$

ergeben. Nimmt man nun die erste der beiden durch die Gleichungen

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

charakterisirten Ebenen als Ebene der xy an, was offenbar verstattet ist; so ist

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 1$$

und folglich nach dem Obigen offenbar

$$\Sigma P\cos\alpha = 0,\ \Sigma P\cos\beta = 0;$$

also ferner nach dem Obigen

$$A'\Sigma P\cos\gamma = 0,\ B'\Sigma P\cos\gamma = 0.$$

Weil nun aber nach der Voraussetzung die beiden Projectionsebenen sich schneiden sollen, so kann offenbar nicht zugleich $A' = 0$, $B' = 0$ sein, und es ist also nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma P\cos\gamma = 0.$$

Daher ist jetzt

$$\Sigma P\cos\alpha = 0,\ \Sigma P\cos\beta = 0,\ \Sigma P\cos\gamma = 0;$$

und nach den Grundlehren der Statik sind folglich die an einem und demselben Punkte wirkenden Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4, \ldots .$$

unter einander im Gleichgewichte, wie bewiesen werden sollte.

§. 3.

Für auf eine ganz beliebige Weise im Raume wirkende Kräfte lässt sich ferner der folgende Satz beweisen:

Lehrsatz.

Wenn Kräfte auf eine beliebige Weise im Raume wirken und deren Projectionen auf drei sich in *einem*

Punkte schneidenden Ebenen, jedes dieser drei Systeme für sich, unter einander im Gleichgewichte sind; so sind jederzeit die gegebenen Kräfte selbst unter einander im Gleichgewichte.

Beweis.

Wenn die Gleichungen der drei sich in einem Punkte schneidenden Ebenen

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$
$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

sind; so gelangt man zuvörderst ganz auf dieselbe Art wie im vorhergehenden Paragraphen zu den drei folgenden Gleichungen:

$$\Sigma P\cos\alpha = 0,\ \Sigma P\cos\beta = 0,\ \Sigma P\cos\gamma = 0.$$

Weil nun aber nach der Voraussetzung die Projectionen der gegebenen Kräfte auf jeder der drei Projectionsebenen für sich unter einander im Gleichgewichte sind, so ist nach den Grundlehren der Statik bekanntlich

$$\Sigma\Pi(\xi\cos\psi - \eta\cos\varphi) = 0,$$
$$\Sigma\Pi(\eta\cos\chi - \zeta\cos\psi) = 0,$$
$$\Sigma\Pi(\zeta\cos\varphi - \xi\cos\chi) = 0;$$

sowie ferner in einer leicht durch sich selbst verständlichen Bezeichnung:

$$\Sigma\Pi'(\xi'\cos\psi' - \eta'\cos\varphi') = 0,$$
$$\Sigma\Pi'(\eta'\cos\chi' - \zeta'\cos\psi') = 0,$$
$$\Sigma\Pi'(\zeta'\cos\varphi' - \xi'\cos\chi') = 0$$

und

$$\Sigma\Pi''(\xi''\cos\psi'' - \eta''\cos\varphi'') = 0,$$
$$\Sigma\Pi''(\eta''\cos\chi'' - \zeta''\cos\psi'') = 0,$$
$$\Sigma\Pi''(\zeta''\cos\varphi'' - \xi''\cos\chi'') = 0.$$

Mittelst dieser Gleichungen und der vorher schon gefundenen Gleichungen

$$\Sigma P\cos\alpha = 0,\ \Sigma P\cos\beta = 0,\ \Sigma P\cos\gamma = 0$$

ergeben sich aber aus §. 1. 9) leicht die drei folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} A\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + B\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) \\ + C\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r} A'\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + B'\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) \\ + C'\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r} A''\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + B''\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) \\ + C''\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) \end{array}\right\} = 0.$$

Aus der ersten dieser drei Gleichungen folgt, wenn man wie n vorhergehenden Paragraphen

$$A=0,\ B=0,\ C=1$$

etzt, auf der Stelle

$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0,$$

nd die beiden letzten der drei vorhergehenden Gleichungen wer- en dadurch:

$$A'\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + B'\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0,$$
$$A''\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + B''\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0;$$

oraus sich ferner leicht

$$(A'B'' - B'A'')\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0,$$
$$(A'B'' - B'A'')\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0$$

rgiebt. Wäre nun

$$A'B'' - B'A'' = 0,$$

o würden die Durchschnittslinien der zweiten und dritten Projec- onsebene mit der ersten, deren Gleichungen

$$A'x + B'y + D' = 0 \text{ und } A''x + B''y + D'' = 0$$

nd, sich offenbar nicht schneiden, wie es doch unter der gemach- en Voraussetzung nothwendig erforderlich ist. Also ist nicht $'B'' - B'A'' = 0$, und nach dem Vorhergehenden ist folglich

$$\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0,$$
$$\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0.$$

Daher haben wir jetzt die sechs folgenden Gleichungen:

$$\Sigma P\cos\alpha = 0,\ \Sigma P\cos\beta = 0,\ \Sigma P\cos\gamma = 0;$$
$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0,$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0,$$
$$\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0;$$

us denen sich mittelst der bekannten Grundlehren der Statik auf er Stelle ergiebt, dass die gegebenen Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4, \ldots.$$

nter einander im Gleichgewichte sind, wie bewiesen werden sollte.

§. 4.

Aus §. 1. und §. 2. ergiebt sich nun unmittelbar der folgende atz:

Das Gleichgewicht beliebiger auf einen und denselben Punkt wirkender Kräfte wird dadurch vollständig bedingt, dass die Projectionen dieser Kräfte auf zwei beliebigen sich schneidenden Ebenen, jedes dieser beiden Systeme für sich, unter einander im Gleichgewichte sind.

Eben so ergiebt sich aus §. 1. und §. 3. der folgende Satz:

Das Gleichgewicht zwischen auf ganz beliebige Weise im Raume wirkenden Kräften wird dadurch vollständig bedingt, dass die Projectionen dieser Kräfte auf drei beliebigen sich in *einem* Punkte schneidenden Ebenen, jedes dieser drei Systeme für sich, unter einander im Gleichgewichte sind.

Von diesen Sätzen kann man öfters bei dem Beweise anderer Sätze mit Vortheil Gebrauch machen, wie im Folgenden an einem Beispiele gezeigt werden soll.

§. 5.

Wir wollen uns jetzt ein Dreieck $A_1A_2A_3$ im Raume denken und die Coordinaten seiner Ecken A_1, A_2, A_3 respective durch $x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ x_3, y_3, z_3$ bezeichnen; so sind bekanntlich die Coordinaten des Mittelpunkts der Seite AA_2:

$$\tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\ \tfrac{1}{2}(y_1+y_2),\ \tfrac{1}{2}(z_1+z_2).$$

Durch diesen Punkt lege man ein dem primitiven Systeme paralleles neues Coordinatensystem, so sind die Coordinaten der Ecke A_3 in Bezug auf dieses System nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$x_3-\tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\ y_3-\tfrac{1}{2}(y_1+y_2),\ z_3-\tfrac{1}{2}(z_1+z_2);$$

und nach einer bekannten Eigenschaft des Schwerpunkts des Dreiecks sind folglich die Coordinaten des Schwerpunkts des Dreiecks $A_1A_2A_3$ in Bezug auf das in Rede stehende neue Coordinatensystem offenbar

$$\tfrac{1}{3}\{x_3-\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)\},\ \tfrac{1}{3}\{y_3-\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)\},\ \tfrac{1}{3}\{z_3-\tfrac{1}{2}(z_1+z_2)\}.$$

Also sind die Coordinaten des Schwerpunkts des Dreiecks $A_1A_2A_3$ in Bezug auf das primitive Coordinatensystem nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)+\tfrac{1}{3}\{x_3-\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)\},\\ &\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)+\tfrac{1}{3}\{y_3-\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)\},\\ &\tfrac{1}{2}(z_1+z_2)+\tfrac{1}{3}\{z_3-\tfrac{1}{2}(z_1+z_2)\};\end{aligned}$$

d. i.

$$\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\ \tfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3),\ \tfrac{1}{3}(z_1+z_2+z_3);$$

was auch sonst schon bekannt ist.

§. 6.

Man habe jetzt eine beliebige $n$seitige Pyramide, deren Grundfläche und Spitze respective $A_1A_2A_3A_4 \ldots\ldots A_n$ und O sein mögen. Die Grundfläche nehme man als Ebene der xy an, und bezeichne, dies vorausgesetzt, die Coordinaten der Ecken

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots A_n$$

respective durch

$$x_1,\ y_1,\ 0;\ x_2,\ y_2,\ 0;\ x_3,\ y_3,\ 0;\ldots x_n,\ y_n,\ 0;$$

die Coordinaten der Spitze O aber durch ξ, η, ζ.

Wenn wir nun die Gleichung der Seitenfläche A_1A_2O durch

$$Ax+By+Cz+D=0$$

bezeichnen, so ist

$$\begin{aligned}
Ax_1+By_1+D&=0,\\
Ax_2+By_2+D&=0,\\
A\xi+B\eta+C\zeta+D&=0.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Subtraction

$$\begin{aligned}
A(x_1-x_2)+B(y_1-y_2)&=0,\\
A(x_1-\xi)+B(y_1-\eta)-C\zeta&=0
\end{aligned}$$

oder

$$x_1-x_2+(y_1-y_2)\frac{B}{A}=0,$$

$$x_1-\xi+(y_1-\eta)\frac{B}{A}-\zeta\frac{C}{A}=0;$$

folglich, wie man hieraus leicht findet:

$$\frac{B}{A}=-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2},\quad \frac{C}{A}=\frac{(x_1-\xi)(y_1-y_2)-(y_1-\eta)(x_1-x_2)}{(y_1-y_2)\zeta}.$$

Weil nun

$$A(x-\xi)+B(y-\eta)+C(z-\zeta)=0$$

oder

$$x-\xi+\frac{B}{A}(y-\eta)+\frac{C}{A}(z-\zeta)=0$$

ist, so ist

$$\left.\begin{array}{l}
(y_1-y_2)\zeta(x-\xi)-(x_1-x_2)\zeta(y-\eta)\\
-\{(x_1-x_2)(y_1-\eta)-(y_1-y_2)(x_1-\xi)\}(z-\zeta)
\end{array}\right\}=0$$

oder auch, wie man leicht findet,

$$\left.\begin{array}{c}(y_1-y_2)\zeta x-(x_1-x_2)\zeta y\\ -\{(x_1-x_2)(y_1-\eta)-(y_1-y_2)(x_1-\xi)\}z+(x_1y_2-x_2y_1)\zeta\end{array}\right\}=0,$$

oder endlich auch

$$\left.\begin{array}{c}(y_1-y_2)\zeta x-(x_1-x_2)\zeta y\\ -\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2\eta-\xi y_2)+(\xi y_1-x_1\eta)\}z+(x_1y_2-x_2y_1)\zeta\end{array}\right\}=0$$

die Gleichung der Ebene A_1A_2O.

Die Coordinaten des Schwerpunkts des Dreiecks A_1A_2O sind nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+\xi),\ \tfrac{1}{3}(y_1+y_2+\eta),\ \tfrac{1}{3}\zeta.$$

Die Gleichungen einer beliebigen, durch diesen Punkt gehenden Linie seien

$$x-\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+\xi)=M(z-\tfrac{1}{3}\zeta),$$
$$y-\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+\eta)=N(z-\tfrac{1}{3}\zeta).$$

Soll nun aber diese Linie auf der Ebene A_1A_2O, deren Gleichung vorher entwickelt worden ist, senkrecht stehen, so muss nach den Principien der analytischen Geometrie

$$M=-\frac{(y_1-y_2)\zeta}{(x_1-x_2)(y_1-\eta)-(y_1-y_2)(x_1-\xi)},$$
$$N=\frac{(x_1-x_2)\zeta}{(x_1-x_2)(y_1-\eta)-(y_1-y_2)(x_1-\xi)}$$

sein, und die Gleichungen der in dem Schwerpunkte des Dreiecks A_1A_2O auf dessen Ebene senkrecht stehenden geraden Linie sind folglich nach dem Obigen:

$$\begin{array}{c}x-\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+\xi)\\ =-\dfrac{(y_1-y_2)\zeta}{(x_1-x_2)(y_1-\eta)-(y_1-y_2)(x_1-\xi)}(z-\tfrac{1}{3}\zeta),\end{array}$$

$$\begin{array}{c}y-\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+\eta)\\ =\dfrac{(x_1-x_2)\zeta}{(x_1-x_2)(y_1-\eta)-(y_1-y_2)(x_1-\xi)}(z-\tfrac{1}{3}\zeta).\end{array}$$

Folglich ist die Gleichung der Projection dieser Linie auf der Ebene der xy, d. i. auf der Grundfläche unserer Pyramide:

$$\frac{y-\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+\eta)}{x-\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+\xi)}=-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2},$$

oder

$$y-\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+\eta)=-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\{x-\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+\xi)\}.$$

Hiernach sind also überhaupt die Gleichungen der Projectionen der in den Schwerpunkten der Seitenflächen

$$A_1A_2O,\ A_2A_3O,\ A_3A_4O, \ldots A_{n-1}A_nO,\ A_nA_1O$$

rer Pyramide auf den Ebenen dieser Seitenflächen senkrecht enden geraden Linien auf der Grundfläche der Pyramide retive:

$$y-\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+\eta)=-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\{x-\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+\xi)\},$$

$$y-\tfrac{1}{3}(y_2+y_3+\eta)=-\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}\{x-\tfrac{1}{3}(x_2+x_3+\xi)\},$$

$$y-\tfrac{1}{3}(y_3+y_4+\eta)=-\frac{x_3-x_4}{y_3-y_4}\{x-\tfrac{1}{3}(x_3+x_4+\xi)\},$$

u. s. w.

$$y-\tfrac{1}{3}(y_{n-1}+y_n+\eta)=-\frac{x_{n-1}-x_n}{y_{n-1}-y_n}\{x-\tfrac{1}{3}(x_{n-1}+x_n+\xi)\},$$

$$y-\tfrac{1}{3}(y_n+y_1+\eta)=-\frac{x_n-x_1}{y_n-y_1}\{x-\tfrac{1}{3}(x_n+x_1+\xi)\}.$$

mmen wir nun die Coordinaten der Durchschnittspunkte der

1sten und 2ten, 2ten und 3ten, ..., $(n-1)$sten und $n$ten, $n$ten und 1sten

ction; so erhalten wir, wenn der Kürze wegen

$$\begin{aligned}F_1= &\ (y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)\\ &+y_1(x_2-x_3)(x_2+x_3+\xi)\\ &+y_2(x_3-x_1)(x_3+x_1+\xi)\\ &+y_3(x_1-x_2)(x_1+x_2+\xi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_2= &\ (y_2-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_2)\\ &+y_2(x_3-x_4)(x_3+x_4+\xi)\\ &+y_3(x_4-x_2)(x_4+x_2+\xi)\\ &+y_4(x_2-x_3)(x_2+x_3+\xi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_3= &\ (y_3-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_3)\\ &+y_3(x_4-x_5)(x_4+x_5+\xi)\\ &+y_4(x_5-x_3)(x_5+x_3+\xi)\\ &+y_5(x_3-x_4)(x_3+x_4+\xi),\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}F_{n-1}= &\ (y_{n-1}-y_n)(y_n-y_1)(y_1-y_{n-1})\\ &+y_{n-1}(x_n-x_1)(x_n+x_1+\xi)\\ &+y_n(x_1-x_{n-1})(x_1+x_{n-1}+\xi)\\ &+y_1(x_{n-1}-x_n)(x_{n-1}+x_n+\xi),\end{aligned}$$

$$F_n = (y_n - y_1)(y_1 - y_2)(y_2 - y_n)$$
$$+ y_n(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + \xi)$$
$$+ y_1(x_2 - x_n)(x_2 + x_n + \xi)$$
$$+ y_2(x_n - x_1)(x_n + x_1 + \xi);$$

ferner

$$G_1 = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$
$$+ x_1(y_2 - y_3)(y_2 + y_3 + \eta)$$
$$+ x_2(y_3 - y_1)(y_3 + y_1 + \eta)$$
$$+ x_3(y_1 - y_2)(y_1 + y_2 + \eta),$$

$$G_2 = (x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_2)$$
$$+ x_2(y_3 - y_4)(y_3 + y_4 + \eta)$$
$$+ x_3(y_4 - y_2)(y_4 + y_2 + \eta)$$
$$+ x_4(y_2 - y_3)(y_2 + y_3 + \eta),$$

$$G_3 = (x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_3)$$
$$+ x_3(y_4 - y_5)(y_4 + y_5 + \eta)$$
$$+ x_4(y_5 - y_3)(y_5 + y_3 + \eta)$$
$$+ x_5(y_3 - y_4)(y_3 + y_4 + \eta),$$

u. s. w.

$$G_{n-1} = (x_{n-1} - x_n)(x_n - x_1)(x_1 - x_{n-1})$$
$$+ x_{n-1}(y_n - y_1)(y_n + y_1 + \eta)$$
$$+ x_n(y_1 - y_{n-1})(y_1 + y_{n-1} + \eta)$$
$$+ x_1(y_{n-1} - y_n)(y_{n-1} + y_n + \eta),$$

$$G_n = (x_n - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_n)$$
$$+ x_n(y_1 - y_2)(y_1 + y_2 + \eta)$$
$$+ x_1(y_2 - y_n)(y_2 + y_n + \eta)$$
$$+ x_2(y_n - y_1)(y_n + y_1 + \eta);$$

und

$$H_1 = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$
$$= -y_1(x_2 - x_3) - y_2(x_3 - x_1) - y_3(x_1 - x_2),$$
$$H_2 = x_2(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_2 - y_3)$$
$$= -y_2(x_3 - x_4) - y_3(x_4 - x_2) - y_4(x_2 - x_3),$$
$$H_3 = x_3(y_4 - y_5) + x_4(y_5 - y_3) + x_5(y_3 - y_4)$$
$$= -y_3(x_4 - x_5) - y_4(x_5 - x_3) - y_5(x_3 - x_4),$$

u. s. w.

$$H_{n-1} = x_{n-1}(y_n - y_1) + x_n(y_1 - y_{n-1}) + x_1(y_{n-1} - y_n)$$
$$= -y_{n-1}(x_n - x_1) - y_n(x_1 - x_{n-1}) - y_1(x_{n-1} - x_n).$$

$$H_n = x_n(y_1-y_2)+x_1(y_2-y_n)+x_2(y_n-y_1)$$
$$= -y_n(x_1-x_2)-y_1(x_2-x_n)-y_2(x_n-x_1)$$

wird, für diese Coordinaten die folgenden Ausdrücke:

$$-\frac{F_1}{H_1},\ \frac{G_1}{H_1};$$
$$-\frac{F_2}{H_2},\ \frac{G_2}{H_2};$$
$$-\frac{F_3}{H_3},\ \frac{G_3}{H_3};$$

u s. w.

$$-\frac{F_{n-1}}{H_{n-1}},\ \frac{G_{n-1}}{H_{n-1}};$$
$$-\frac{F_n}{H_n},\ \frac{G_n}{H_n}.$$

r die dreiseitige Pyramide, d. i. für $n=3$, ist:

$$\begin{aligned}
F_1 = {} & (y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)\\
& + y_1(x_2-x_3)(x_2+x_3+\xi)\\
& + y_2(x_3-x_1)(x_3+x_1+\xi)\\
& + y_3(x_1-x_2)(x_1+x_2+\xi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2 = {} & (y_2-y_3)(y_3-y_1)(y_1-y_2)\\
& + y_2(x_3-x_1)(x_3+x_1+\xi)\\
& + y_3(x_1-x_2)(x_1+x_2+\xi)\\
& + y_1(x_2-x_3)(x_2+x_3+\xi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3 = {} & (y_3-y_1)(y_1-y_2)(y_2-y_3)\\
& + y_3(x_1-x_2)(x_1+x_2+\xi)\\
& + y_1(x_2-x_3)(x_2+x_3+\xi)\\
& + y_2(x_3-x_1)(x_3+x_1+\xi);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1 = {} & (x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1\\
& + x_1(y_2-y_3)(y_2+y_3+\eta)\\
& + x_2(y_3-y_1)(y_3+y_1+\eta)\\
& + x_3(y_1-y_2)(y_1+y_2+\eta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2 = {} & (x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1-x_2)\\
& + x_2(y_3-y_1)(y_3+y_1+\eta)\\
& + x_3(y_1-y_2)(y_1+y_2+\eta)\\
& + x_1(y_2-y_3)(y_2+y_3+\eta),
\end{aligned}$$

$$G_3 = (x_3-x_1)(x_1-x_2)(x_2-x_3)$$
$$+x_3(y_1-y_2)(y_1+y_2+\eta)$$
$$+x_1(y_2-y_3)(y_2+y_3+\eta)$$
$$+x_2(y_3-y_1)(y_3+y_1+\eta);$$

und

$$H_1 = x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)$$
$$=-y_1(x_2-x_3)-y_2(x_3-x_1)-y_3(x_1-x_2),$$
$$H_2 = x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)+x_1(y_2-y_3)$$
$$=-y_2(x_3-x_1)-y_3(x_1-x_2)-y_1(x_2-x_3),$$
$$H_3 = x_3(y_1-y_2)+x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)$$
$$=-y_3(x_1-x_2)-y_1(x_2-x_3)-y_2(x_3-x_1).$$

Also ist in diesem Falle offenbar

$$F_1=F_2=F_3,$$
$$G_1=G_2=G_3,$$
$$H_1=H_2=H_3;$$

und es ergiebt sich daher jetzt der folgende merkwürdige Satz von der dreiseitigen Pyramide oder dem Tetraeder:

Die Projectionen der auf drei Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide oder eines Tetraeders in deren Schwerpunkten senkrecht stehenden geraden Linien auf der vierten Seitenfläche schneiden sich jederzeit in einem und demselben Punkte.

Dass sich die vier auf die Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide oder eines Tetraeders in deren Schwerpunkten errichteten Perpendikel, — im Allgemeinen wenigstens, — nicht selbst in einem und demselben Punkte schneiden, lässt sich aus den im Obigen entwickelten Formeln und Gleichungen leicht ableiten.

Wenn man die obige, hier absichtlich in etwas grösserer Allgemeinheit geführte Rechnung gleich vom Anfange an bloss auf den besondern Fall der dreiseitigen Pyramide einschränkt, so wird dieselbe kürzer und einfacher.

§. 7.

Wir wollen uns jetzt vier auf den Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide $A_1A_2A_3A_4$ in deren Schwerpunkten senkrecht stehende Kräfte denken, und annehmen, dass diese Kräfte sämmtlich nach dem äussern — (oder auch nach dem innern) — Raume der Pyramide hin wirken. Die auf den Seitenflächen

$$A_2A_3A_4,\ A_1A_3A_4,\ A_1A_2A_4,\ A_1A_2A_3$$

senkrecht stehenden Kräfte seien respective

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4.$$

Bezeichnen wir die spitzen Neigungswinkel der Seitenflächen

$$A_2A_3A_4,\ A_1A_3A_4,\ A_1A_2A_4$$

gegen die Seitenfläche $A_1A_2A_3$ respective durch

$$i_1,\ i_2,\ i_3;$$

so sind die auf den Seiten

$$A_2A_3,\ A_1A_3,\ A_1A_2$$

des Dreiecks $A_1A_2A_3$ senkrecht stehenden Projectionen der Kräfte P_1, P_2, P_3 auf der Seitenfläche $A_1A_2A_3$ offenbar respective

$$P_1 \sin i_1,\ P_2 \sin i_2,\ P_3 \sin i_3$$

und die Projection der vierten Kraft P_4 auf derselben Seitenfläche verschwindet. Bezeichnen wir ferner die Höhe der Ecke A_4 über der Seitenfläche $A_1A_2A_3$ durch H_4, so ist offenbar

$$\Delta A_2A_3A_4 = \tfrac{1}{2} A_2A_3 \cdot \frac{H_4}{\sin i_1} = \frac{A_2A_3 \cdot H_4}{2 \sin i_1},$$

$$\Delta A_1A_3A_4 = \tfrac{1}{2} A_1A_3 \cdot \frac{H_4}{\sin i_2} = \frac{A_1A_3 \cdot H_4}{2 \sin i_2},$$

$$\Delta A_1A_2A_4 = \tfrac{1}{2} A_1A_2 \cdot \frac{H_4}{\sin i_3} = \frac{A_1A_2 \cdot H_4}{2 \sin i_3};$$

und wenn wir daher jetzt annehmen, dass die vier auf den Seitenflächen der Pyramide senkrecht stehenden Kräfte sich unter einander wie die Seitenflächen, auf denen sie senkrecht stehen, verhalten; so ist

$$P_1 : P_2 : P_3 = \frac{A_2A_3}{\sin i_1} : \frac{A_1A_3}{\sin i_2} : \frac{A_1A_2}{\sin i_3},$$

also

$$P_1 \sin i_1 : P_2 \sin i_2 : P_3 \sin i_3 = A_2A_3 : A_1A_3 : A_1A_2,$$

d. h. die drei Projectionen

$$P_1 \sin i_1,\ P_2 \sin i_2,\ P_3 \sin i_3$$

auf der Seitenfläche $A_1A_2A_3$, deren Richtungen auf den Seiten

$$A_2A_3,\ A_1A_3,\ A_1A_2$$

des Dreiecks $A_1A_2A_3$ senkrecht stehen und nach dem vorhergehenden Paragraphen sich in einem und demselben Punkte schneiden, verhalten sich unter einander wie die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$, auf denen sie senkrecht stehen.

Wenn aber drei Kräfte in der Ebene eines Dreiecks, deren tungen auf den Seiten des Dreiecks senkrecht stehen und in einem und demselben Punkte schneiden, sich wie die Sei-

ten des Dreiecks, auf denen sie senkrecht stehen, unter einander verhalten und sämmtlich nach dem äussern — (oder nach dem innern) — Raume des Dreiecks hin gerichtet sind, so sind diese drei Kräfte jederzeit unter einander im Gleichgewichte. Ist nämlich in Taf. X. Fig. 12. ABC das gegebene Dreieck, auf dessen Seiten BC, AC, AB die sich in dem Punkte O schneidenden Richtungen der Kräfte P_a, P_b, P_c senkrecht stehen, so ist nach der Voraussetzung

$$P_a:P_b:P_c = BC:AC:AB = a:b:c;$$

also, weil bekanntlich

$$a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C$$

ist:

$$P_a:P_b:P_c = \sin A:\sin B:\sin C.$$

Bezeichnet man nun aber die von den Richtungen der Kräfte P_b, P_c; P_a, P_c; P_a, P_b eingeschlossenen Winkel respective durch α, β, γ; so ist

$$A+\alpha=180^0,\ B+\beta=180^0,\ C+\gamma=180^0$$

und folglich

$$\sin A=\sin\alpha,\ \sin B=\sin\beta,\ \sin C=\sin\gamma;$$

also nach dem Obigen

$$P_a:P_b:P_c = \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma.$$

Bezeichnet man aber die von der über den Punkt O hinaus verlängerten Richtung der Kraft P_a mit den Richtungen der Kräfte P_b und P_c eingeschlossenen Winkel durch ψ und φ, so ist

$$\beta+\varphi=180^0,\ \gamma+\psi=180^0;$$

also $\sin\beta=\sin\varphi$, $\sin\gamma=\sin\psi$; und folglich nach dem Vorhergehenden

$$P_a:P_b:P_c = \sin\alpha:\sin\varphi:\sin\psi.$$

Macht man nun $P_b=OB_1$, $P_c=OC_1$ und zieht durch B_1 eine Parallele mit OC_1, welche die gerade Linie, in der die Richtung der Kraft P_a liegt, in A' schneiden mag, durch C_1 eine Parallele mit OB_1, welche die gerade Linie, in der die Richtung der Kraft P_a liegt, in A'' schneiden mag; so ist nach den Principien der Trigonometrie

$$OA':OB_1 = \sin\alpha:\sin\varphi,$$
$$OA'':OC_1 = \sin\alpha:\sin\psi.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$OB_1=P_b=\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}P_a,\ OC_1=P_c=\frac{\sin\psi}{\sin\alpha}P_a;$$

also

$$OA' : \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} P_a = \sin\alpha : \sin\varphi,$$

$$OA'' : \frac{\sin\psi}{\sin\alpha} P_a = \sin\alpha : \sin\psi;$$

folglich

$$OA' = OA'' = P_a.$$

Daher fallen die Punkte A' und A'' in einen Punkt, den wir durch A_1 bezeichnen wollen, zusammen, und es ist $OA_1 = P_a$. Weil nun $OA_1 = P_a$ die durch den Punkt O gehende Diagonale des mit $OB_1 = P_b$ und $OC_1 = P_c$ als Seiten beschriebenen Parallelogramms ist, so folgt aus dem Satze von dem Parallelogramme der Kräfte unmittelbar, dass die drei Kräfte P_a, P_b, P_c unter einander im Gleichgewichte sind, wie behauptet wurde.

Nimmt man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich auf völlig unzweideutige Weise, dass die Projectionen der vier auf den Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide oder eines Tetraeders in deren Schwerpunkten senkrecht stehenden, sämmtlich nach dem äussern — (oder auch nach dem innern) — Raume der Pyramide hin gerichteten, und sich wie die Seitenflächen, auf denen sie senkrecht stehen, unter einander verhaltenden Kräfte auf jeder der vier Seitenflächen der Pyramide unter einander im Gleichgewichte sind, woraus sich mittelst des in §. 3. bewiesenen Satzes unmittelbar ergiebt, dass die vier in Rede stehenden Kräfte jederzeit selbst unter einander im Gleichgewichte sind. Also hat man den folgenden

Lehrsatz.

Die vier auf den Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide oder eines Tetraeders in deren Schwerpunkten senkrecht stehenden, sämmtlich nach dem äussern oder sämmtlich nach dem innern Raume der Pyramide hin gerichteten, und sich wie die Seitenflächen der Pyramide, auf denen sie senkrecht stehen, unter einander verhaltenden Kräfte sind jederzeit unter einander im Gleichgewichte. *)

§. 8.

Da sich eine jede Pyramide in lauter dreiseitige Pyramiden zerlegen lässt, so ergiebt sich zuvörderst mittelst ganz leichter Schlüsse und der bekannten Grundeigenschaften des Schwerpunkts auf der Stelle, dass der im vorhergehenden Paragraphen bewiesene Satz von der dreiseitigen Pyramide überhaupt für jede Pyra-

---

*) Dieser Satz rührt von Gergonne her und ist von demselben in den Annales de mathématiques pures et appliquées. T. X. mitgetheilt worden.

mide von ganz beliebiger Seitenzahl gilt. Weil man aber ferner sich jedes Polyeder aus lauter in einer gemeinschaftlichen Spitze zusammenstossenden Pyramiden bestehend denken kann, so ergiebt sich auch auf der Stelle, dass der in Rede stehende Satz ganz allgemein für jedes beliebige Polyeder gilt. Man hat hierbei nur zu beachten, dass je zwei auf derselben, zwei Pyramiden angehörenden Seitenfläche senkrecht stehende einander gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte sich gegenseitig aufheben, woraus dann alles Uebrige ferner ganz von selbst und durch die leichtesten Schlüsse folgt, was weiter auszuführen füglich dem Leser überlassen werden kann.

XLII.

Ueber eine in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommende analytische Aufgabe.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Bei der Untersuchung über die Wahrscheinlichkeit a posteriori wird man bekanntlich zu der Aufgabe geführt, den Gränzwerth zu finden, welchem der Ausdruck

$$\frac{1}{k}\left\{\delta^m(1-\delta)^n+(2\delta)^m(1-2\delta)^n+(3\delta)^m(1-3\delta)^n+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots+(\overline{k-1}\delta)^n(1-\overline{k-1}\delta)^n\right\}$$

worin $\delta=\frac{1}{k}$ ist, so nahe kommen kann als man es verlangt, sobald man die ganze positive Zahl k unausgesetzt wachsen, also δ unbegränzt abnehmen lässt. Sind nämlich v und w die einfachen Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzten Ereignisse A und B, von denen bei $m+n$ Versuchen A $m$mal und B $n$mal eingetreten ist, so haben wir Cv^mw^n als Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereigniss des $m$maligen Vorkommens von A und des $n$maligen von B, wobei C den Binomialkoeffizienten $(m+n)_m = (m+n)_n$ bezeichnet. Ist nun v a priori nicht bekannt, so steht ihm noch der Spielraum von 0 bis 1 offen, und man kann also,

wenn man sich die Einheit in k gleiche Theile getheilt denkt und $\frac{1}{k}=\delta$ setzt, für v der Reihe nach

$$\delta,\ 2\delta,\ 3\delta, \ldots. \overline{k-1}\,\delta$$

nehmen, woraus wegen $v+w=1$, also $w=1-v$, folgt, dass für das fragliche zusammengesetzte Ereigniss die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten

$$C\delta^m(1-\delta)^n,\ C(2\delta)^m(1-2\delta)^n,\ C(3\delta)^m(1-3\delta)^n, \ldots.$$
$$C(\overline{k-1}\,\delta)^m(1-\overline{k-1}\,\delta)^n$$

statt finden können. Diess giebt als mittlere Wahrscheinlichkeit

$$\frac{C}{k-1}\left\{\begin{array}{l}\delta^m(1-\delta)^n+(2\delta)^m(1-2\delta)^n+(3\delta)^m(1-3\delta)^n+\ldots. \\ \qquad\qquad \ldots.+(\overline{k-1}\,\delta)^m(1-\overline{k-1}\,\delta)^n\end{array}\right\}$$

Soll aber v **jeden** zwischen 0 und 1 liegenden Werth annehmen können, so dürfen wir es nicht blos sprungweis $=\delta,\ 2\delta,\ 3\delta$ etc. setzen, sondern wir müssen es **stetig** von 0 bis 1 gehen lassen, d. h. wir müssen die Intervalle jener Sprünge unter jede noch so kleine Grösse hinab vermindern. Da in diesem Falle k ins Unendliche wächst, so können wir statt $\frac{C}{k-1}$ auch $\frac{C}{k}$ schreiben, und da C von k nicht abhängt, so reduzirt sich jetzt die Aufsuchung der mittleren Wahrscheinlichkeit auf die anfangs genannte Aufgabe. Dieselbe ist sehr leicht zu lösen, wenn man das Theorem

$$\text{Lim}\,\delta\{f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots.+f(a+\overline{k-1}\,\delta)\}$$
$$=\int_a^b f(x)\partial x,\ \text{ für } \delta=\frac{b-a}{k}$$

voraussetzen will, weil sich dann die gesuchte Gränze auf den Werth des Integrales

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\partial x$$

reduzirt, der ohne Schwierigkeit entwickelt werden kann; ist man aber beim Vortrage der Wahrscheinlichkeitsrechnung genöthigt, auf den Gebrauch der Integralrechnung zu verzichten, so entsteht die Frage, wie man auf elementarem Wege den numerischen Betrag jener Gränze auffinden könne. Hier scheint nun **Condorcet** der einzige zu sein, der die Frage beantwortet hat, aber leider auf eine im höchsten Grade unbefriedigende Weise *), und diess veranlasste

*) Ist $(h\delta)^m(1-h\delta)^n$ irgend eines der Glieder der eingeklammerten Reihe und zur Abkürzung $h\delta=z$, so setzt **Condorcet** voraus, dass die Summe der $h-1$ vorhergehenden Glieder auf die Form

$$Az^{m+1}(1-z)^n+Bz^{m+2}(1-z)^{n-1}+Cz^{m+3}(1-z)^{n-2}+\ldots.$$

mich ursprünglich für meine Vorträge die folgenden Betracht[u]
auszuführen, die auch sonst vielleicht einiges Interesse habe[n]

I.

Versuchen wir zunächst die Gränze zu bestimmen, we[lcher]
sich der Quotient

$$\frac{1^m + 2^m + 3^m + \ldots + h^m}{(h+1)^{m+1}}$$

nähert, wenn wir die ganze positive Zahl h ins Unendliche
aus wachsen, das ebenfalls positive und ganze m aber con[stant]
lassen.

Da $1^m = 1$, $2^m = (1+1)^m$, $3^m = (1+2)^m, \ldots$ ist, so haben
unter Anwendung des Binomialtheoremes für ganze positive E[xpo]nenten

$$\begin{aligned}
1^m &= 1,\\
2^m &= 1 + m_1 . 1 + m_2 . 1^2 + m_3 . 1^3 + \ldots + m_m . 1^m,\\
3^m &= 1 + m_1 . 2 + m_2 . 2^2 + m_3 . 2^3 + \ldots + m_m . 2^m,\\
4^m &= 1 + m_1 . 3 + m_2 . 3^2 + m_3 . 3^3 + \ldots + m_m . 3^m,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
(h+1)^m &= 1 + m_1 . h + m_2 . h^2 + m_3 . h^3 + \ldots + m_m . h^m.
\end{aligned}$$

Addirt man Alles mit der Bemerkung, dass $m_m = 1$ ist, so [f]
sich beiderseits die Summe $1^m + 2^m + \ldots + h^m$; bezeichnet [man]
noch $1^n + 2^n + \ldots + h^n$ mit S_n, so bleibt

$$(h+1)^m = h + 1 + m_1 S_1 + m_2 S_2 + \ldots + m_{m-1} S_{m-1},$$

oder $m+1$ für m gesetzt:

$$(h+1)^{m+1} = h + 1 + \frac{m+1}{1} S_1 + \frac{(m+1)m}{1.2} S_2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} S_3 + \ldots$$
$$+ (m+1) S_m$$

woraus folgt

$$S_m = \frac{(h+1)^{m+1} - (h+1)}{m+1} - \left\{ \begin{aligned} & S_1 + \tfrac{1}{2} m_1 S_2 + \tfrac{1}{3} m_2 S_3 + \ldots \\ & \ldots + \frac{1}{m-1} m_{m-2} S_{m-1} \end{aligned} \right\}. \quad \text{(1)}$$

---

worin A, B, C etc. unbestimmte Koeffizienten bedeuten, gebracht wer[den]
könne (Lacroix traité élément. du calcul des probabilités, troisième édit[ion]
page 153.). Solche ganz unmotivirte und aus der Luft gegriffene Hyp[o]thesen dürfen sich aber heut zu Tage nicht mehr im Gebiete einer „[ex]akten“ Wissenschaft blicken lassen.

a die in der Parenthese stehenden Grössen sämmtlich positiv nd, so folgt hieraus unmittelbar

$$S_m < \frac{1}{m+1}\Big\{(h+1)^{m+1}-(h+1)\Big\}. \qquad (2)$$

erner ist offenbar

$$\begin{aligned} S_n &= 1^n+2^n+3^n+\ldots+h^n \\ &< h^n+h^n+h^n+\ldots+h^n, \end{aligned}$$

i.

$$S_n < h.h^n \text{ oder } S_n < h^{n+1};$$

lglich

$$S_1+\tfrac{1}{2}m_1 S_2+\tfrac{1}{3}m_2 S_3+\ldots\ldots+\frac{1}{m-1}m_{m-2}S_{m-1}$$

$$< h^2+\tfrac{1}{2}m_1 h^3+\tfrac{1}{3}m_2 h^4+\ldots+\frac{1}{m-1}m_{m-2}h^m.$$

nter den Koeffizienten $1,\ \tfrac{1}{2}m_1,\ \tfrac{1}{3}m_2,\ldots\ldots\ \frac{1}{m-1}m_{m-2}$ ist aber wiss einer der grösste; setzen wir den Werth desselben, der heissen möge, statt aller anderen, so ist nach dem Vorigen n so mehr

$$S_1+\tfrac{1}{2}m_1 S_2+\tfrac{1}{3}m_2 S_3+\ldots\ldots+\frac{1}{m-1}m_{m-2}S_{m-1}$$
$$< \mu(h^2+h^3+h^4+\ldots+h^m),$$

i.

$$< \mu h^2(1+h+h^2+\ldots+h^{m-2})$$

er

$$< \mu h^2\frac{h^{m-1}-1}{h-1}.$$

tzen wir diess statt der eingeklammerten Reihe in No. (1), so btrahiren wir zuviel, es bleibt demnach zu wenig übrig und o ist

$$S_m > \frac{1}{m+1}\{(h+1)^{m+1}-(h+1)\}-\frac{\mu}{h-1}\{h^{m+1}-h^2\}. \qquad (3)$$

us den Ungleichungen (2) und (3) ergiebt sich nun durch Division mit $(h+1)^{m+1}$

$$\frac{S_m}{(h+1)^{m+1}} < \frac{1}{m+1}\Big\{1-\frac{1}{(h+1)^m}\Big\}, \qquad (4)$$

$$\frac{S_m}{(h+1)^{m+1}} > \frac{1}{m+1}\Big\{1-\frac{1}{(h+1)^m}\Big\}-\frac{\mu}{h-1}\Big\{\Big(\frac{h}{h+1}\Big)^{m+1}-\frac{h^2}{(h+1)^{m+1}}\Big\} \qquad (5)$$

Die Differenz der Grössen, zwischen denen $S_m:(h+1)^{m+1}$ liegt, nämlich

$$\frac{\mu}{h-1}\left\{\left(\frac{h}{h+1}\right)^{m+1}-\frac{h^2}{(h+1)^{m+1}}\right\}$$

lässt sich aber für beständig wachsende h unter jeden beliebigen Grad der Kleinheit herabbringen; denn es ist

$$\mathrm{Lim}\left(\frac{h}{h+1}\right)^{m+1}=\mathrm{Lim}\left(1-\frac{1}{h+1}\right)^{m+1}=1^{m+1}=1,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Lim}\frac{h^2}{(h+1)^{m+1}}&=0 \text{ für } m>1,\\ &=1 \text{ für } m=1;\end{aligned}$$

und also, da wir m nicht kleiner als die Einheit nehmen, der Gränzwerth der fraglichen Differenz

$$=\mathrm{Lim}\frac{\mu}{h-1}\{1-0\} \text{ oder } =\mathrm{Lim}\frac{\mu}{h-1}\{1-1\},$$

d. i. in jedem Falle $=0$, weil μ seinen Werth nicht ändert, wenn auch h wächst. Die Grössen rechts in (4) und (5) rücken also einander immer näher und nähern sich einer und der nämlichen Gränze. Ihr gemeinschaftlicher Gränzwerth ist dann auch der von $S_m:(h+1)^{m+1}$, weil diese Grösse nicht ausserhalb jener Werthe fallen kann. So finden wir nun

$$\mathrm{Lim}\frac{S_m}{(h+1)^{m+1}}=\frac{1}{m+1}$$

oder

$$\mathrm{Lim}\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots.+h^m}{(h+1)^{m+1}}=\frac{1}{m+1}. \tag{6}$$

Da

$$\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots.+h^m}{h^{m+1}}=\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots.+h^m}{(h+1)^{m+1}}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{m+1}$$

ist, so folgt hieraus noch

$$\mathrm{Lim}\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots.+h^m}{h^{m+1}}=\frac{1}{m+1}. \tag{7}$$

Das auf diese Weise gewonnene Lemma können wir nun sogleich zur Lösung unserer ursprünglichen Aufgabe benutzen.

II.

Verwandelt man jedes Glied des Ausdrucks

$$\delta^m(1-\delta)^n+(2\delta)^m(1-2\delta)^n+(3\delta)^m(1-3\delta)^n+\ldots$$
$$\ldots+(\overline{k-1}\,\delta)^m(1-\overline{k-1}\,\delta)$$

ach dem Binomialtheoreme für ganze positive Exponenten in eine Reihe, so nimmt derselbe die Form an:

$$\begin{array}{l}
n_0\delta^m-n_1\delta^{m+1}+n_2\delta^{m+2}-n_3\delta^{m+3}+\ldots.\\
+n_0 2^m\delta^m-n_1 2^{m+1}\delta^{m+1}+n_2 2^{m+2}\delta^{m+2}-n_3 2^{m+3}\delta^{m+3}+\ldots.\\
+n_0 3^m\delta^m-n_1 3^{m+1}\delta^{m+1}+n_2 3^{m+2}\delta^{m+2}-n_3 3^{m+3}\delta^{m+3}+\ldots.\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+n_0(k-1)^m\delta^m-n_1(k-1)^{m+1}\delta^{m+1}+n_2(k-1)^{m+2}\delta^{m+2}-\ldots.,
\end{array}$$

d. i. bei Addition in vertikaler Richtung

$$\begin{array}{l}
n_0\delta^m\{1^m+2^m+3^m+\ldots.+(k-1)^m\}\\
-n_1\delta^{m+1}\{1^{m+1}+2^{m+1}+3^{m+1}+\ldots.+(k-1)^{m+1}\}\\
+n_2\delta^{m+2}\{1^{m+2}+2^{m+2}+3^{m+2}+\ldots.+(k-1)^{m+2}\}\\
-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Setzt man noch $\delta=\frac{1}{k}$ und dividirt mit k, so wird

$$\frac{1}{k}\left\{\begin{array}{l}\delta^m(1-\delta)^n+(2\delta)^m(1-2\delta)^n+(3\delta)^m(1-3\delta)^n+\ldots.\\ \qquad\ldots.+(\overline{k-1}\delta)^m(1-\overline{k-1}\delta)^n\end{array}\right\} \tag{8}$$

$$\begin{array}{l}
=n_0\dfrac{1^m+2^m+3^m+\ldots.+(k-1)^m}{k^{m+1}}\\
-n_1\dfrac{1^{m+1}+2^{m+1}+\ldots.+(k-1)^{m+1}}{k^{m+2}}\\
+n_2\dfrac{1^{m+2}+2^{m+2}+\ldots.+(k-1)^{m+2}}{k^{m+3}}\\
-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Lassen wir nun k ins Unendliche wachsen, so ergiebt sich der Gränzwerth jedes auf der rechten Seite stehenden Gliedes nach Formel (6), indem man $k=h-1$ setzt, wo nun h ebenfalls unausgesetzt zunehmen muss; die Reihe rechts geht dabei in die folgende über:

$$\frac{n_0}{m+1}-\frac{n_1}{m+2}+\frac{n_2}{m+3}-\ldots.\pm\frac{n_n}{m+n+1}, \tag{9}$$

welche nun den gesuchten Gränzwerth darstellt.

Es lässt sich aber noch mehr thun; man kann nämlich diese Reihe und sogar die allgemeinere

$$\frac{n_0}{a}-\frac{n_1}{a+1}+\frac{n_2}{a+2}-\ldots\ldots\pm\frac{n_n}{a+n}, \tag{10}$$

worin a eine beliebige Grösse ist, auf folgende Weise summiren. Es heisse T_n diese Summe, so ist durch Multiplikation mit $1+\frac{a}{n}$

$$\left.\begin{aligned}&(1+\frac{a}{n})\,T_n\\&=\frac{n_0}{a}-\frac{n_1}{a+1}+\frac{n_2}{a+2}-\frac{n_3}{a+3}+\dots\\&+\frac{n_0}{n}-\frac{a}{a+1}\cdot\frac{n_1}{n}+\frac{a}{a+2}\cdot\frac{n_2}{n}-\frac{a}{a+3}\cdot\frac{n_3}{n}+\dots\end{aligned}\right\}.$$

Hier lässt sich die zweite Horizontalreihe rechts auch so schre

$$\frac{n_0}{n}-(1-\frac{1}{a+1})\cdot\frac{n_1}{n}+(1-\frac{2}{a+2})\cdot\frac{n_2}{n}-(1-\frac{3}{a+3})\cdot\frac{n_3}{n}+\dots$$

$$=\frac{n_0-n_1+n_2-n_3+\dots}{n}$$

$$+\frac{1}{a+1}\cdot\frac{n_1}{n}-\frac{1}{a+2}\cdot\frac{2n_2}{n}+\frac{1}{a+3}\cdot\frac{3n_3}{n}-\dots$$

$$=\frac{(n-1)_0}{a+1}-\frac{(n-1)_1}{a+2}+\frac{(n-1)_2}{a+3}-\dots,$$

weil $n_0-n_1+n_2-\dots=0$ und immer $\frac{pn_p}{n}=(n-1)_p$ ist. So wird nach No. (11)

$$(1+\frac{a}{n})\,T_n$$

$$=\frac{n_0}{a}-\frac{n_1}{a+1}+\frac{n_2}{a+2}-\frac{n_3}{a+3}+\dots$$

$$+\frac{(n-1)_0}{a+1}-\frac{(n-1)_1}{a+2}+\frac{(n-1)_2}{a+3}-\dots$$

Nimmt man die unter einander stehenden Grössen zusam und berücksichtigt, dass immer

$$m_{p-1}+m_p=(m+1)_p,\ \text{also}\ (m+1)_p-m_{p-1}=m_p,$$

oder

$$n_p-(n-1)_{p-1}=(n-1)_p$$

ist, so wird

$$(1+\frac{a}{n})\,T_n$$

$$=\frac{(n-1)_0}{a}-\frac{(n-1)_1}{a+1}+\frac{(n-2)_2}{a+2}-\frac{(n-1)_3}{a+3}+\dots,$$

d. i. nach No. (10)

$$(1+\frac{a}{n})\,T_n=T_{n-1}\ \text{oder}\ T_n=\frac{n}{a+n}\,T_{n-1}.$$

Mittelst dieser Reduktionsformel findet man leicht

$$T_n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots.2.1}{(a+n)(a+n-1)\dots.(a+1)} T_0,$$

d weil nach (10) $T_0 = \frac{1}{a}$ ist, vermöge der Bedeutung von T_n:

$$\frac{n_0}{a} - \frac{n_1}{a+1} + \frac{n_2}{a+2} - \dots \pm \frac{n_n}{a+n} = \frac{1.2.3\dots.n}{a(a+1)(a+2)\dots.(a+n)}.$$

Nimmt man $a = m+1$, so erhält man die Summe der Reihe in), und da diese den Gränzwerth der rechten Seite von (8) darstellt, wird jetzt für $\delta = \frac{1}{k}$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Lim} \frac{1}{k}\{\delta^m(1-\delta)^n + (2\delta)^m(1-2\delta)^n + (3\delta)^m(1-3\delta)^n - \dots \\ \dots + (\overline{k-1}\delta)^m(1-\overline{k-1}\delta)^n\} \\ = \frac{1.2.3\dots.n}{(m+1)(m+2)\dots.(m+n+1)} \end{aligned}\right\}, \quad (12)$$

omit unsere Aufgabe vollständig gelöst ist.

XLIII.

Allgemeine Reductionsformel für gewisse bestimmte Integrale.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty F[(ax - \frac{b}{x})^2]\partial x, \quad (1)$$

rin a und b ein paar wesentlich positive von Null verschiedene össen bedeuten mögen, lässt sich auf folgende Weise umwanln. Zuerst hat man identisch

$$1=\frac{1}{2a}\left[1+\frac{ax-\frac{b}{x}}{\sqrt{4ab+(ax-\frac{b}{x})^2}}\right](a+\frac{b}{x^2}),$$

wovon man sich leicht durch die Bemerkung überzeugt, dass

$$4ab+(ax-\frac{b}{x})^2=(ax+\frac{b}{x})^2$$

ist; setzt man daher unter dem Integralzeichen jenen der Einheit gleichgeltenden Faktor zu, so nimmt das Integral folgende Form an:

$$\frac{1}{2a}\int_0^\infty F[(ax-\frac{b}{x})^2]\left\{1+\frac{ax-\frac{b}{x}}{\sqrt{4ab+(ax-\frac{b}{x})^2}}\right\}(a+\frac{b}{x^2})\partial x. \quad (2)$$

Führt man eine neue Veränderliche y der Art ein, dass $ax-\frac{b}{x}=y$ ist, so folgt

$$(a+\frac{b}{x^2})\partial x=\partial y,$$

und wenn x die Werthe $x=\infty$ und $x=0$ angenommen hat, so ist entsprechend $y=+\infty$ und $y=-\infty$ geworden. Demnach geht das Integral unter No. (2) in das folgende über:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^\infty F(y^2)\left\{1+\frac{y}{\sqrt{4ab+y^2}}\right\}\partial y\\ =&\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^\infty F(y^2)\partial y+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^\infty F(y^2)\frac{y}{\sqrt{4ab+y^2}}\partial y.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Denkt man sich jedes dieser Integrale in zwei andere von $y=-\infty$ bis $y=0$ und von $y=0$ bis $y=\infty$ zerlegt, so bemerkt man gleich, dass

$$\int_{-\infty}^0 F(y^2)\partial y=\int_0^\infty F(y^2)\partial y$$

sein muss, weil die Funktion $F(y^2)$ für negative y die nämliche ist, wie für positive y. Hieraus folgt noch

$$\int_{-\infty}^\infty F(y^2)\partial y=2\int_0^\infty F(y^2)\partial y. \quad (4)$$

Da ferner die Funktion

$$F(y^2)\frac{y}{\sqrt{4ab+y^2}}$$

die Eigenschaft hat: $\varphi(-y)=-\varphi(+y)$, so folgt leicht

$$\int_{-\infty}^{0} F(y^2)\frac{y}{\sqrt{4ab+y^2}}\partial y = -\int_{0}^{\infty} F(y^2)\frac{y}{\sqrt{4ab+y^2}}\partial y,$$

und hieraus wieder

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(y^2)\frac{y}{\sqrt{4ab+y^2}}\partial y = 0. \qquad (5)$$

Durch Substitution der in (4) und (5) gefundenen Resultate reduzirt sich unser Integral in (3) auf

$$\frac{1}{a}\int_{0}^{\infty} F(y^2)\,\partial y.$$

Vergleichen wir jetzt die erste Form des Integrales in (1) mit dieser, so haben wir die Gleichung

$$\int_{0}^{\infty} F[(ax-\frac{b}{x})^2]\,\partial x = \frac{1}{a}\int_{0}^{\infty} F(y^2)\,\partial y.$$

Setzen wir noch

$$F(z) = f(2ab+z),$$

so folgt

$$F[(ax-\frac{b}{x})^2] = f(2ab+(ax-\frac{b}{x})^2) = f(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}),$$
$$F(y^2) = f(2ab+y^2);$$

und mithin erhalten wir zuletzt

$$\int_{0}^{\infty} f(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2})\,\partial x = \frac{1}{a}\int_{0}^{\infty} f(2ab+y^2)\partial y. \qquad (6)$$

Da das Integral auf der rechten Seite offenbar viel einfacher als das auf der linken ist, so kann die vorstehende Gleichung als Reduktionsformel dienen und lässt in dieser Beziehung manche interessante Anwendungen zu, von denen ich hier besonders eine näher betrachten will.

Sei $f(z) = e^{-z}$, so wird

$$\int_{0}^{\infty} e^{-(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2})}\partial x = \frac{1}{a}\int_{0}^{\infty} e^{-(2ab+y^2)}\,\partial y$$
$$= \frac{1}{a}e^{-2ab}\int_{0}^{\infty} e^{-y^2}\,\partial y.$$

Der Werth des Integrales rechts ist aber bekanntlich $=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *) und folglich haben wir jetzt

---

*) Archiv. Thl. V. S. 90.

$$\int_0^\infty e^{-\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)}\partial x=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2ab}. \tag{7}$$

Dieses Integral lässt sich wieder benutzen, um sehr rasch den Werth von

$$\int_0^\infty \frac{\cos\beta u\,\partial u}{\alpha^2+u^2} \tag{8}$$

zu finden. Man hat nämlich immer

$$\frac{1}{k}=\int_0^\infty e^{-kz}\partial z,$$

also, wenn man $k=\alpha^2+u^2$ und $z=x^2$ setzt:

$$\frac{1}{\alpha^2+u^2}=2\int_0^\infty xe^{-(\alpha^2+u^2)x^2}\partial x.$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks in No. (8) ergiebt sich

$$\int_0^\infty \cos\beta u\,\partial u.\frac{1}{\alpha^2+u^2}=2\int_0^\infty \cos\beta u\,\partial u\int_0^\infty xe^{-(\alpha^2+u^2)x^2}\partial x$$

$$=2\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\beta u.x.e^{-\alpha^2x^2}.e^{-u^2x^2}\partial u\,\partial x.$$

Kehren wir die Reihenfolge der Integrationen um, indem wir erst nach u und dann nach x integriren, so ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos\beta u\,\partial u}{\alpha^2+u^2}=2\int_0^\infty xe^{-\alpha^2x^2}\partial x\int_0^\infty \cos\beta u\, e^{-x^2u^2}\partial u.$$

Hier lässt sich der Werth des nach u genommenen Integrales mit Hülfe der bekannten Formel

$$\int_0^\infty \cos\beta u\, e^{-\gamma^2u^2}\partial u=\frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma}e^{-\left(\frac{\beta}{2\gamma}\right)^2}$$

leicht angeben, indem man x für γ setzt. Es wird so

$$\int_0^\infty \frac{\cos\beta u\,\partial u}{\alpha^2+u^2}=2\int_0^\infty xe^{-\alpha^2x^2}\partial x.\frac{\sqrt{\pi}}{2x}e^{-\left(\frac{\beta}{2x}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-\left(\alpha^2x^2+\frac{\beta^2}{4x^2}\right)}\partial x,$$

d. i. nach Formel (7) für $a=\alpha$, $b=\frac{\beta}{2}$:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\beta u\,\partial u}{\alpha^2+u^2}=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}. \tag{9}$$

Durch partielle Differenziation dieser Gleichung nach β ergiebt sich noch

$$\int_0^{\infty} \frac{u \sin \beta u \, \partial u}{\alpha^2 + u^2} = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta} \qquad (10)$$

l diess sind die beiden Formeln, welche so oft in der Theorie bestimmten Integrale gebraucht werden.

XLIV.

uid in Analysi Mathematica valeant gna illa x^y, $\mathrm{Log}_b(x)$, $\mathrm{Sin}\, x$, $\mathrm{Cos}\, x$, $\mathrm{Arcsin}\, x$, $\mathrm{Arccos}\, x$, disquisitio.

Auctore Dr. E. G. Björling,
d Acad. Upsal. Docens Math., ad Gymn. Aros. Lector Math. design.

(Ex Actis Acad. Scient. Stockholm. anno 1845.)

Illustr. Cauchy signorum, de quibus heic quaeritur, pleraque tis dumtaxat ipsarum x et y et „Baseos" b valoribus ex Anai esse tollenda statuit, nempe

signum x^y, quoties pars realis ipsius x negativa sit, nisi eodem tempore y realis et quidem valore numerico integro fuerit aut $=0$;

sign. $\mathrm{Log}_b(x)$, non solum 1°) quoties pars realis ipsius x negativa sit, sed etiam 2°) quantitate x quâlibet, dum pars realis Baseos b negativa est;

ue signa

$\left.\begin{matrix}\mathrm{Arcsin}\, x \\ \mathrm{Arccos}\, x\end{matrix}\right\}$, quoties x realis numerice > 1 fuerit.

Signi illius x^y damnandi caussa duplex haec edita est *). Om-

*) Cauchy, Anal. Algébr. nec non Exerc. de Mathém. T. I. (1826) 2. — Quo licet in loco utroque realis tantummodo considerata sit y, ae tamen plane apparet signo x^y, dum y realis est, damnato abrogatum quoque esse signum pro y imaginariâ: — id quod praeterea ex eo con-, quod Cauchy, ubi in „Leç. du Calc. Differ. (Leç. XI.)" signum x^y pro y imaginariâ definitum sistit, solas eas x, quibus positiva at pars realis, commemorat.

nium scilicet, quas complectitur universale illud signum $((x))^y$, quantitatum nulla — dum pars realis ipsius x negativa est, nec simul y quantitas realis numerice integra aut 0 — digna quae peculiari quodam signo distinguatur visa est. Nec id solum; sed si forte admissum foret hoc signum, etiamsi pars realis ipsius x negativa esset, et quidem ita ut significationem illius pro hoc casu ex definitione ipsius $((x))^y$ aequali modo ac significationem ejusdem pro parte reali x positivâ deduci placuisset; non posset fieri quin ancipitis huic signo x^y in casu, cujus heic mentio est, adsignati sensûs rei merito judicarentur Geometrae.

Tum signi $l(x)$ ideoque ipsius etiam $\mathrm{Log}_b(x)$ — dum pars realis ipsius x negativa est, etiamsi Basis b realis ac positiva fuerit — damnandi caussa duplex fuit eadem, quam modo citavimus *). Quibus autem adductus rationibus princeps ille Geometer signum hoc $\mathrm{Log}_b(x)$ — quaequae sit x quantitas, dum pars realis Baseos b negativa est — interdixerit Analysi, id quidem in opere praeclaro „Leçons du Calc. Différentiel" (Leç. XI.) fuit explicatum. In eo scilicet, ut plane apparet, positae sunt hae rationes, quod jam antea signum b^y pro negativâ ipsius b parte reali fuerat abrogatum.

Quae tandem fuerit Cauchy perill[i] caussa signorum Arcsin x et Arccos x (x reali numerice >1) excludendorum, his fere verbis obiter explicari licet. Postquam in „Leç. du Calc. Differ." (Leç. XI.) ambo, quae in signis Arcsin $((x))$ et Arccos $((x))$ comprehenduntur, quantitatum agmina exhibuerat Auctor, deinde ostendit agminibus hisce — dum imaginaria est $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ (α et β realibus, β haud $=0$) — suam utrique inesse quantitatem praecipue notandam et quidem ita comparatam, ut, si ponatur x realis ($=\alpha$) et numerice $\overline{\overline{<}}\,1$, in $\left\{\begin{matrix}\mathrm{Arcsin}\,\alpha\\ \mathrm{Arccos}\,\alpha\end{matrix}\right\}$ abeat. His demum quantitatibus praecipue notandis signa Arcsin x et Arccos x addicenda esse censet. Quo pacto comparatis aequationibus

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{Arcsin}\,x=\mathfrak{P}\pm\mathfrak{Q}\sqrt{-1}\\ \mathrm{Arccos}\,x=\mathfrak{P}_1\pm\mathfrak{Q}_1\sqrt{-1}\end{matrix}\right\}\text{ prout }\beta\text{ positiva est aut negativa quantitas,}$$

[$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}_1$ certas denot. quantitates reales],

Cauchy admonet, si in eis ponatur $\beta=0$ (ideoque x realis $=\alpha$), fieri ut $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}_1$ in 0 abeant atque $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}_1$ in Arcsin α et Arccos α, quoties α numer. $\overline{\overline{<}}\,1$ sit, at vero dum α numerice >1 ponitur, fieri ut expressionum $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}_1$ suus cuique cedat valor quidam haud $=0$: — quo ex eventu fatali sufficientem sibi datam esse censet rationem excludendorum in hoc casu ex Analysi signorum Arcsin x et Arccos x. Scilicet in hoc casu ($\beta=0$, α numer. >1) „l'expression $\pm\mathfrak{Q}$," ait, „admettant non plus une seule valeur, mais deux valeurs égales et de signes contraires, le second membre" (aequationum, de quibus

---

*) Vid. locum modo cit. operis Exerc. de mathém.

heic quaeritur, utriusque) „cesse d'être complètement déterminé. On doit donc *alors* s'abstenir d'employer la notation Arcsin x“ (pag. 126. Leç. sur le Calc. différ.) et „la notation Arccos x“ (pag. 128. ibid.). *)

Verumenimvero quis est qui non videat, quanti sit discriminis ex Analysi vel unicum, nisi aliter fieri nequit, tollere signum! Certe nobis quidem hac ipsâ circumspectione commotis in mentem venit, ut rem datâ occasione diligentiori cuidam examini subjiceremus. Quo facto ut primum nobis fuerat exploratum interdictis, quorum supra mentionem fecimus, haudquaquam opus esse Analysi, id nobis curae habuimus, ut rem omnibus liberatam dubiis exposituri essemus. Quem tamen in finem, non omnino potuimus, quin ad ipsa principia doctrinae quantitatum Imaginariarum regressuri essemus, lacunas expleturi nonnullas et quae hisce principiis hucusque indefinita quodammodo relicta erant, eademque profecto haud minimi momenti **), perfecte determinaturi. Unde factum est, ut, quae in manibus est, disquisitioni propositum fuerit principia doctrinae Quantitatum Matheseos Analyticae (realium aeque ac imaginariarum) apto rerum ordine et quidem adeo certe ut, quid in genere valeant signa illa in titulo conscripta, perfecte constat, breviter exponere.

Quae cum ita sint, ante omnia juvat referre neutiquam nobis in mentem venisse, ut postquam ea, quae a Cauchy inde tanto cum studio artificioque singulari exstructa fuerint, demoliti fuissemus, nos quidem fundamento cuipiam novo novum superstruere aedificium conaturi essemus. E contrario id nobis habemus propositum, ut incolumi quod disposuit Cauchy aedificio adponamus pro virium modulo novi aliquantulum fundamenti, cui postea superstruatur (si fors ita ferat) alia quaedam domus priori ab latere adjungenda, — vel potius omissis ambagibus: Salvis usque definitionibus Cauchyanis signorum, de quibus agitur, ubicumque iis uti per illustr. Cauchy hucusque licitum fuerit, nos postquam rationibus rite subductis invenimus nihil omnino impedire, quominus caeteris etiam in casibus conservata haec signa ad usum Analyseos insignem vertantur, id nobis hoc tempore injunximus negotium ut, quibus haec signa his ipsis in casibus jure vindicentur quantitatibus, breviter (quoad fieri poterit) ac perspicue exponatur.

---

*) Admonere heic juvat, Illustr. Cauchy, quamquam hoc loco signa illa Arcsin x et Arccos x abroganda esse censet, antea tamen alio quodam loco (Anal. Algébr. pag. 326. et 327.) eadem haec signa et quidem eo ipso in casu, cujus supra mentionem fecimus, Analysi concessisse adhibenda. Verumtamen significationem, quâ praedita tunc stiterat haec signa, male sibi constare haud latet. Forsitan haec ipsa est incuria, cui debeatur quod postea promulgavit magnus ille Geometra interdictum: — cujus praeterea (ut infra patebit) in lacunâ quadam argumentationis residet culpa.

**) Etenim fieri non potest, quin his ipsis lacunis rationibusque sibi haud perfecte constantibus tribuenda sit culpa eorum, quae supra commemoravimus, interdictorum.

Cui licet expositioni haud omnibus opus fuerit sigillatim perducendis, quae rem spectent, ratiociniis atque argumentis; tamen, ut ne abrumperetur inepte filum orationis, non potuimus quin cunctas plerisque in locis sibi proprias majoris certe momenti formulas, earumdemque licet permultas ex scriptis illustr. Cauchy jam perbene notas, adponendas curaremus. Praeterea vel maximi interfuit, ut cuique Sectioni, quaenam definitiones Analyseos legesque antepositae illi postularentur, nominatim foret praescriptum, eum videlicet in finem ut salvis, quae in praecedentibus Analyseos partibus statutae fuissent, legibus novas heic omni absque controversiâ et ambiguitate addi liceret. *)

Quid in Analysi valeant signa illa

$$\left\{\begin{matrix} \mathrm{Tang}\,x,\ \mathrm{Cot}\,x,\ \mathrm{Sec}\,x,\ \mathrm{Cosec}\,x \\ \mathrm{Arctg}\,x,\ \mathrm{Arccot}\,x,\ \mathrm{Arcsec}\,x,\ \mathrm{Arccosec}\,x \end{matrix}\right\}$$

definire, id quidem iis, quae dissertationi huic proposita sunt, intimo sane cohaeret nexu: nec possumus quin hoc loco fateamur iis, quae de „functionibus hisce compositis" tradidit Cauchy, haud pauca (eademque majoris ad rem momenti) habere nos adjicienda; sed haec tamen et alia, ne justo prolixior evadat dissertatio, in aliud tempus differenda censemus.

---

*) Ex eo tamen (ut facile patet) minime consequitur, opinari nos in systemate Analyseos oportere notiones, quae heic inferuntur, iis, quae antepositae esse postulantur, immediate succedere. Sic ex. gr. nil impedit, quominus perfecte definiatur signum illud x^y, y reali (x reali aeque ac imaginariâ), etiamsi nulla prorsus huic Sectioni praemissa foret doctrinae serierum infinitarum particula, — id quod reverâ sic fieri posse commonstrant §§. 1. et 2. Cap. I. subsequentis —; ex eo tamen minime consequitur negare nos ea, quae in hisce §§is. occurrunt, doctrinae illi serierum (realibus certe terminis), Cauchy ipso auctore (Anal. Algébr. Chap. VIII.), jure esse postponenda.

CAPUT I^mum.

Quid in Analysi valeat signum

(I) . . . . x^y.

Quid valeat hoc signum x reali quâlibet eodemque tempore y uantitate reali tali, cui cedat valor numericus integer aut 0, nec on x Numerum (quantitatem positivam) denotante atque y realem quamlibet, id cognitum heic jure postulatur. De caetero ut raecise definiatur locus, quo nos heic positos esse fingamus, inicare juvat in §is. 1. et 2. subsequentibus postulari:

1^0) quatuor illas operationes Arithmeticas, realibus applicatas uantitatibus, una cum iis, quae ad radices Numerorum positivas orumque Potentias (Exponente reali quâlibet) pertineant;

2) elementa Trigonometriae planae (vid. Cauchy, Anal. Algébr. Not. I. pag. 425—435. unâ cum „Préliminaires" ibid. ag. 11—13.).

§. 1.

De Quantitatibus in genere prolegomena.

1. „Quantitas realis" nobis erit „Numerus (quant. ositiva) aut negativa quant. aut zéro." — „Quantitas n genere" vel „Quantitas Analytica" vel etiam verbo „Quantitas" expressionem complectitur quamcunque formae $+\beta\sqrt{-1}$ (α et β realibus); ipsi α nomen cedit „pars realis uantitatis" „β Coëfficiens ipsius $\sqrt{-1}$."

Imaginaria vocatur quantitas, cui Coëfficiens ipsius $\sqrt{-1}$ aud 0 sit; e contrario formula unaquaeque $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, cui $\beta=0$ it, soli α aequivalere ideoque realis esse quantitas censetur.

Notio illa „Modulus quantitatis" satis cognita est. Ex efinitione ipsa „quantitatum aequalium" rectâ consequitur) fieri non posse, quin moduli quantitatum aequalium equales ipsi sint, et 2^0) eam solam $=0$ esse quantitatem, cui modulus $=0$ cedat. Tum ex ipsa definitione notionm „Summae", „Differentiae", „Producti (Dignitatis)" „Quoti" patet, quid valeat signum

(I) . . . . x^y seu $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^y$,

m, x quantitate quâlibet, y realis est quantitas vare numerico integro ($=\pm m$), scilicet

$$x^m = xxx\ldots.(m \text{ factoribus}),\ x^{-m} = \frac{1}{x^m},$$

nec non dum $y=0$ est (certe nisi simul $x=0$ fuerit) *), scilicet

$$x^0 = 1.$$

2. Quoniam (ut satis constat) quantitatem $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ quamlibet (modulo $=\varrho$ posito) formulâ illâ

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varrho(\operatorname{Cos}\theta + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\theta)$$

exprimi licet, θ realem denotante quantitatem, quamviscumque eligi placuerit ex iis, quarum Sinus et Cosinus formulis illis

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \varrho\operatorname{Cos}\theta = \alpha, \\ \varrho\operatorname{Sin}\theta = \beta \end{cases}$$

satisfaciant; patet

1°) dum α positiva est, licere „Argumentum" θ cooptari $\tau = \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}$, ideoque tunc loco ipsius $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ substitui istam

$$(2') \quad \ldots\ldots \quad \varrho(\operatorname{Cos}\tau + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\tau);$$

2°) dum α negativa est, licere θ cooptari $\tau + \pi$, ideoque tunc loco ipsius $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ substitui

$$(2'') \quad \varrho[\operatorname{Cos}(\tau+\pi) + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}(\tau+\pi)] \text{ seu } -\varrho(\operatorname{Cos}\tau + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\tau);$$

atque 3°) dum $\alpha=0$ est (ideoque quantitas ipsa formae $\beta\sqrt{-1}$) licere loco illius ex arbitrio substitui vel (2′) vel (2″), eo quidem pacto ut litterâ illâ τ intelligatur $\pm\frac{\pi}{2}$ priori in casu, posteriori autem $\mp\frac{\pi}{2}$, prout positiva est β aut negativa. Licebit igitur contendere ambas illas aequationes

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \pm\varrho(\operatorname{Cos}\tau + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\tau),$$

(quarum illa positivis α quibuscumque, negativis haec, valet),

---

*) Quod attinet ad signum illud 0^y (y datâ quantitate generis cujuscumque), hoc loco (ne gutta supersit dubitationis) semel omnino indicare juvabit, quoniam hoc signum in Analysi nusquam occurrit, nisi ubi limes, in quem convergat x^y quantitate x ipsâ (tunc temporis propositâ) in 0 convergente, significetur, nos in sequentibus — ubicumque de signo x^y erit quaestio (certe excepto casu illo unico $y=1$) — verba illa „certe nisi $x=0$ fuerit" subintellecta velle: cujus praeterea reservationis memoriam quibus decet locis revocandam curabimus.

etiamsi $\alpha=0$ fuerit, permanere legitimas eo quidem pacto ut litterâ illâ τ tunc limes ipse, in quem $\mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}$ valore ipsius α numerico indefinite decrescente convergit, intelligatur, quippe quoniam, tendente α in zéro ex plaga positivâ, $\pm\frac{\pi}{2}$ ipsi sunt limites hujus $\mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}$ (prout positiva est β aut negativa) et quidem vice versâ $\mp\frac{\pi}{2}$ tendente α in 0 ex plaga negativâ.

Ex his porro consequitur — quaequae sint α et β quantitates reales (certe nisi ambae $=0$) — fore ut, p realem denotante quantitatem valore numerico integro aut 0, semper valeat

$$(4) \;\ldots\; x^p = (\alpha + \beta\sqrt{-1})^p = \varrho^p(\mathrm{Cos}\,p\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,p\theta),$$

θ realem denotante, quamviscumque eligi placuerit ex iis, quarum Sinus et Cosinus aequationibus (3) seu conditioni huic

$$(5) \;.\;.\;.\; \alpha + \beta\sqrt{-1} = \varrho(\mathrm{Cos}\,\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\theta)$$

satisfaciant; eamque ipsam ob rem contendi licere, prout α positiva est aut negativa, valere

$$(4') \ldots\ldots x^p = (\alpha + \beta\sqrt{-1})^p = (\pm\varrho)^p\,(\mathrm{Cos}\,p\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,p\tau),$$

ambasque simul aequationes hasce, dum $\alpha=0$ est, eo quidem pacto ut litterâ illâ τ tunc limes ipse, in quem $\mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}$ valore ipsius α numerico indefinite decrescente convergit, intelligatur, ideoque $\pm\frac{\pi}{2}$ in superiori, at in inferiori $\mp\frac{\pi}{2}$, prout positiva est aut negativa β.

§. 2.

De Radicibus et Potentiis (Exponente reali) quantitatis cujuscumque.

Obs. Quantitas ipsa haud $=0$ esse supponitur. (Vid. Not. pag. 388.)

1. Si convenit (ut reverâ fert consuetudo) signo $((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}}$, breviter $((x))^{\frac{1}{n}}$ seu $\sqrt[n]{x}$, eam intelligi formulam generalem, quae in se cunctas simul continet ipsius x Radices n^{ti} ordinis (n numero integro),

tum signo $((x))^{\frac{m}{n}}$ eam, quae in se m^{tam} Dignitatem (m numer. int.) uniuscujusque harum Radicum continet,

et signo $((x))^{-\frac{m}{n}}$ intelligi $\dfrac{1}{((x))^{\frac{m}{n}}}$;

probari licet, μ breviter denotante quantitatem realem formae $-\frac{m}{n}$ (m et n num. int.), semper haberi

$$(6) \quad . \; . \; . \; . \quad ((x))^\mu = \varrho^\mu (\operatorname{Cos} \mu\theta + \sqrt{-1} \operatorname{Sin} \mu\theta)\, ((1))^\mu,$$

θ denotante (ut supra) atque

$$(7) \quad . \; . \; . \; . \quad ((1))^\mu = \operatorname{Cos} 2k\mu\pi \pm \sqrt{-1} \operatorname{Sin} 2k\mu\pi,$$

valore ipsius k, praeterquam quod numerus erit integer aut determinato relicto, sed tamen pro certo statui licet tributi $2k$ ex ordine omnibus, qui inter 0 et n (inclusive) versantur merorum parium valoribus (0 inclus.) reverâ exinde cunc quorum capax sit membrum illud (7) posterius, comparatos valores. Et quidem si fuerit $\frac{m}{n}$, i. e. valor ipsius μ numer fractio irreductibilis (m et n inter se primi, $n > 1$); cuncti h lores sunt numero n, eodemque in casu

$$(8) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad ((1))^{\pm\frac{m}{n}} = ((1))^{\frac{1}{n}} = ((1^m))^{\frac{1}{n}}.$$

Ne ipsâ quidem positione singulari valoris ipsius μ num integri aequationes istae (6) et (7) irritae evadunt; praeter hoc casu, ut ex aequat. (4) patet, $((x))^\mu$ in ipsam x^μ abit. demque si convenit signo $((x))^0$ — (cui equidem signo in An nullus hucusque fuit sensus tributus) — eam intelligi formulam quam membrum (6) posterius posito $\mu=0$ abit, ideoque $((x))^0 = x^0$; exinde jam nobis venia consequitur statuendi veras pe nere aequationes illas (6) et (7), quaequae sit μ quanti realis ac rationalis.

Quod ad singularem illam positionem $x=-1$ attinet, lic est unâ cum eâ, quam dat aequatio (6),

$$(9) \; . \; . \; . \; . \; ((-1))^\mu = (\operatorname{Cos} \mu\pi + \sqrt{-1} \operatorname{Sin} \mu\pi)((1))^\mu,$$

hanc usitare aequationem

$$(9') \; .... \; ((-1))^\mu = \operatorname{Cos}(2k+1)\mu\pi \pm \sqrt{-1} \operatorname{Sin}(2k+1)\mu\pi$$

ex eâque cunctos (numero n, ubi plurimum) elicere valores tribu successive ipsi $(2k+1)$ omnes, qui inter 0 et n (inclusive) ve tur, numerorum imparium valores. Et quidem si fuerit $\frac{m}{n}$ (ipsius μ numericus) fractio irreductibilis, cuncti hi n valores di sunt eodemque in casu

$$(10) \quad . \; . \; . \; . \quad ((-1))^{\pm\frac{m}{n}} = (([-1]^m))^{\frac{1}{n}}.$$

Dato jam unicuique earum, quae in signo $((x))^\mu$ — „Exp nente“ μ reali ac rationali — comprehenduntur, quantitatum mine „μ-Potentiae ipsius x“, ex aequat. (6) lex habet

otabilis ista: **Cunctas si vis comparare quantitatis cujusum μ-potentias, sufficiet ut earum unica quaelibet in -potentias unitatis ex ordine omnes multiplicetur,** eu (ut eam aliter pronuntiari licet): Unica μ-potentiarum quantatis x quâlibet per $((1))^\mu$ multiplicatâ, quid valeat generale illud gnum $((x))^\mu$ habebis. *)

2. In aequatione generali (6), uti supra est monitum, θ quambet assumi licet quantitatum realium, quarum Sin. et Cos. legi (5) itisfaciunt. Eorum tamen, quae sequuntur, vel maximi interest jam ad formam, quae aequationi huic (6) illato ibi τ (i. e. Arctg $\frac{\beta}{\alpha}$) ontingat, probe attendatur.

Dum α **positiva est,** quoniam tunc θ cooptari licet τ ipsum . 1.), aequationi (6) inde forma contingit ista

$$(6') \quad ((x))^\mu = \varrho^\mu(\operatorname{Cos}\mu\tau + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\tau)((1))^\mu$$
$$= ((\varrho))^\mu(\operatorname{Cos}\mu\tau + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\tau);$$

um vero α **negativa est,** quoniam tunc θ cooptari licet $\tau + \pi$,

$$((x))^\mu = \varrho^\mu[\operatorname{Cos}\mu(\tau+\pi) + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu(\tau+\pi)]((1))^\mu$$
$$= \varrho^\mu(\operatorname{Cos}\mu\tau + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\tau)((-1))^\mu$$
$$= ((-\varrho))^\mu(\operatorname{Cos}\mu\tau + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\tau);$$

*) Binae quaelibet μ-potentiarum ipsius x ex membro (6) posteriori seu formulâ

$$\varrho^\mu(\operatorname{Cos}\mu\theta + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\theta)[\operatorname{Cos}2k\mu\pi \pm \sqrt{-1}\operatorname{Sin}2k\mu\pi]$$

omparantur, aptum si tribueris ipsi k valorem singularem. Sit k' talis (quem acuerit potissimum). Contendo jam fore ut una vel altera formularum

$$\varrho^\mu(\operatorname{Cos}\mu\theta + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\theta)[\operatorname{Cos}2k'\mu\pi \pm \sqrt{-1}\operatorname{Sin}2k'\mu\pi],$$

r $((1))^\mu$ multiplicata, productura sit $((x))^\mu$. Id quod reverâ patet ex eo, od loco utriusque ambarum harum

$$\varrho^\mu(\operatorname{Cos}\mu\theta + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\theta)[\operatorname{Cos}2k'\mu\pi \pm \sqrt{-1}\operatorname{Sin}2k'\mu\pi]((1))^\mu$$

(quod idem valet) harum

$$\varrho^\mu[\operatorname{Cos}\mu(\theta \pm 2k\pi) + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu(\theta \pm 2k\pi)]((1))^\mu,$$

1. ipsâ $2k\pi$ eodem signo utrobique affectâ, substitui licet

$$\varrho^\mu(\operatorname{Cos}\mu\theta + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\theta)((1))^\mu,$$

uippe quoniam littera θ (uti supra est monitum) designatum volumus arcum m potissimum placuerit eligi ex iis, quorum Sin. et Cos. ipsi (5) tisfaciunt.

atque dum $\alpha=0$ **est**, quoniam tunc θ cooptari licet ex arbitrio vel τ vel $\tau+\pi$ (eo quidem pacto, quod in §. 1. erat commemoratum), una harum (6′) et (6″) valet aeque ac altera, eo quidem pacto, ut litterâ τ tunc limes ipse, in quem Arctg $\frac{\beta}{\alpha}$ valore ipsius α numerico indefinite decrescente convergit, intelligatur, — h. e. $\pm$ in aequat. (6′), at $\mp\frac{\pi}{2}$ in (6″), prout positiva sit aut negativa β.

Cunctos si quis voluerit elicere valores diversos, quorum capax sit membrum aequat. (6′) et (6″) unumquodque, sufficiet (uti supra est monitum) ut ipsi $2k$ in

$$(7)\quad .\ .\ .\ .\quad ((1))^\mu = \mathrm{Cos}\,2k\mu\pi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,2k\mu\pi$$

successive omnium, qui inter 0 et denominatorem valoris μ numerici (inclus.) versantur, numerorum parium valores tribuantur, atque ipsi $2k+1$ in

$$(9')\quad .\ .\ .\quad ((-1))^\mu = \mathrm{Cos}\,(2k+1)\mu\pi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,(2k+1)\mu\pi$$

success. omnium, qui eosdem intra limites versantur, numerorum imparium valores tribuantur.

3. **De Potentiis Principalibus.** Ex μ-potentiis quantitatis x unam prae caeteris et quidem notâ illâ $(x)^\mu$ seu x^μ insigniri juvabit. Cuinam potissimum tribuatur hoc signum, decreturos nos omnium primo meminisse oportet, quisnam illi sensus in singularibus partium Analyseos praecedentium casibus jam fuerit tributus, scilicet

1⁰) x **Numerum** denotante, signum x^μ illi ipsi Numero, qui μ-potentiam hujus x conficit, fuit reservatum;

2⁰) x quantitate quâlibet, dum ipsi μ valor contigit numericus **integer** aut 0, signo x^μ

si fuerit α **positiva**, reservata erat aequatio

$$(11)\quad .\ .\ .\ .\ .\quad x^\mu = \varrho^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau),$$

sin vero α **negativa**, aequatio

$$\begin{aligned}(11')\ .\ .\ .\ x^\mu &= \varrho^\mu[\mathrm{Cos}\,\mu(\tau+\pi) + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu(\tau+\pi)]\\ &= \varrho^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau)(-1)^\mu\\ &= (-\varrho)^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau),\end{aligned}$$

scilicet

$$(-1)^\mu = \mathrm{Cos}\,\mu\pi + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi,$$

atque, **si** $\alpha=0$ **fuerit**, una harum aeque ac altera aequatio (eo, quod supra dicebatur, pacto), seu breviter

11″) .... $(\beta\sqrt{-1})^\mu = (\sqrt{\beta^2})^\mu(\mathrm{Cos}\frac{\mu\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\frac{\mu\pi}{2})$,

ut positiva erat β aut negativa.

Quorum cum ea, quae ad quantitatem x parte reali ud negativâ instructam attinent, in lege isthac

12) . . . . $x^\mu = \varrho^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau)$,

licet τ — dum $\alpha = 0$ est — denotante $\pm\frac{\pi}{2}$, prout β positiva est t negativa, continentur; jam patet omnino, quo concilietur defiio signi x^μ (dum pars realis ipsius x haud negativa t), pro μ reali quâlibet eâdemque rationali, in ipsâ (12) adquicere jure optimo licere.

Quod ad x parte reali negativâ instructam attinet, oniam in hoc casu praeter (11′) nullâ adstricti sumus lege praelente, patet, quo concilietur huic casui definitio signi x^μ geneis, licere in ipsâ hac (11′) adquiescere.

Quae jam definitae sunt ambae x^μ, ut ex membro aequationum) et (6″) secundo constat, eae sunt μ-potentiae ipsius x, quae sitioni $k=0$ in expressione (7) ipsius $((1))^\mu$ generali debentur. e ipsae sunt, quarum utrique nomen „μ-potentia ipsius x ncipalis" seu „valor ipsius $((x))^\mu$ principalis" — (ala nempe, dum α haud negativa est, altera dum α positiva) — que erit reservatum. Itaque, μ quâlibet reali ac rationali, habentur

13) . . . $\begin{cases} 1^\mu = 1, \\ (-1)^\mu = \mathrm{Cos}\,\mu\pi + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi; \end{cases}$

ue in genere, prout α haud negativa est aut negativa,

14) . . . $x^\mu = (\pm\varrho)^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau)$,

icet

15) .... $(-\varrho)^\mu = \varrho^\mu(-1)^\mu = \varrho^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\pi + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi)$,

quidem pacto ut, dum $\alpha = 0$ est, litterâ illâ τ tunc limes ipse, uem $\mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}$ valore ipsius α numerico indefinite decrescente congit, intelligatur (i. e. $\pm\frac{\pi}{2}$, prout β positiva est aut negativa), bo igitur

16) .... $(\beta\sqrt{-1})^\mu = (\sqrt{\beta^2})^\mu(\mathrm{Cos}\frac{\mu\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\frac{\mu\pi}{2})$,

ut positiva est aut negativa β.

Observ. Dolendum sane esse videtur quod de x^μ heic, ubi μ reali ac rationali quâcumque ageretur, non idem plane, ac

ubi antea de μ numerice integrâ (0 inclusive) illata erat mentio licuerit contendi: valere (inquam) ambas illas (14), prout α positiva fuerit aut negativa, atque pro $\alpha = 0$ unam aeque ac alteram eo, quod supra dicebatur, pacto ut litterâ τ in hoc casu limes intelligeretur ipse, in quem Arctg $\frac{\beta}{\alpha}$ valore ipsius α numerico indefinite decrescente convergat, h. e. $\pm\frac{\pi}{2}$ in superiori (14) at vice versâ $\mp\frac{\pi}{2}$ in inferiori, prout positiva fuerit aut negativa β. Quam scilicet si temere pronuntiavissemus assertionem, id jure (dum β negativa est) nobis vitio esset vertendum, quod uno signo eodemque $(\beta\sqrt{-1})^\mu$ duabus — certe nisi μ forte integra numerice aut 0 fuisset — disparibus hisce

$$(\sqrt{\beta^2})^\mu(\mathrm{Cos}\frac{\mu\pi}{2} - \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\frac{\mu\pi}{2})$$

et

$$(-\sqrt{\beta^2})^\mu(\mathrm{Cos}\frac{\mu\pi}{2} + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\frac{\mu\pi}{2})$$

$$\text{i. e. } (\sqrt{\beta^2})^\mu(\mathrm{Cos}\frac{3\mu\pi}{2} + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\frac{3\mu\pi}{2})$$

tributo confusionem nos sane graviorem Analysi induxissemus.

Quid autem? Quandoquidem, ut ex verbis novissimis plane apparet, quantitatum illarum x^μ seu $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^\mu$ suum utraque in limitem convergit, decrescente valore ipsius α numerico indefinite, certe dum β negativa est nec μ valore numerico integro aut 0; nonne rei melius fuisset consultum, si, quemadmodum de signo 0^y in nota pag. 388., sic quoque de signo ipso $(\beta\sqrt{-1})^\mu$ statuissemus fore (inquam) ut in Analysi nusquam adhiberetur hoc signum, nisi quo limes umquam significaretur ipse, in quem imaginaria ea, cujus tunc mentio sit, quantitas x^μ parte suâ reali in 0 decrescente indefinite convergat? (quo ex statuto id nobis praeterea commodi esset profectum, ut in sequentibus nullâ opus foret signi $(\beta\sqrt{-1})^\mu$ mentione speciali). Verumenimvero tali quodam decreto Analysi vel pessime fore consultum, ex eo solo patet, quod in Analysi saepenumero fit ut haec formula $\beta\sqrt{-1}$ separatam denotat suique quasi juris quantitatem (ideoque non tunc temporis limitem modo, in quem unum vel alterum genus quantitatum $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, valore numerico ipsius α indefinite decrescente, convergat): ex quo consequitur Analyseos non minoris interesse, ut notio illa „potentia ipsius $\beta\sqrt{-1}$ principalis" [seu quid valeat signum $(\beta\sqrt{-1})^\mu$] definiatur, quam ut certa sit stabilisque vis signi ipsius $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^\mu$, sive positiva sit sive negativa quantitas α.

Quum jam in eo eramus heic supra, ut definiretur hoc signum $(\beta\sqrt{-1})^\mu$ — [vid. aequationem (16)] —; nullâ ex antecedentibus praeter aequationem (11″), eandemque non nisi de μ numerice integra aut 0 constitutam, adstricti eramus lege praecedente. Re

gitur ipsâ id solum nobis fuisse relictum negotium videbatur, ut egem hanc (11″) μ quâlibet reali ac rationali ratam esse deferemus, praesertim quum tali ex edito id insuper commodi redundavit, ut aequationum illarum (14) altera certe, scilicet

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu=\varrho^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\tau+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau),$$

legitima exinde non solum pro α positivâ sed pro α haud negativa reddita sit.

(De hac re plura in Not. I. sub finem Dissertationis.)

Ex aequationibus (6′) et (6″) cum (14) collatis perspicitur omni in casu haberi

$$(17)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad ((x))^\mu=x^\mu((1))^\mu,$$

id quod praeterea jam cognitum erat ex ea, quae in fine art. 1. praeced. exposita fuerat, lege.

Et quidem ex (14) patet haberi, dum α negativa est, semper

$$(18)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad x^\mu=(-x)^\mu(-1)^\mu,$$

nec tamen semper, dum α haud negativa est.

Nota.

Eo in casu, quo sit „Exponens“ illa μ fractio, cui cedat Numerator unitas ($\mu=\frac{1}{n}$, n num. int.), potentiae illi principali $x^{\frac{1}{n}}$ hoc quoque signum $\sqrt[n]{x}$ nomenque „Radix ex quantitate x $n$ti gradûs principalis“ reservata erunt.

Nosmet hoc modo definitâ significatione notulae $\sqrt[n]{x}$, scilicet

$$\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}},$$

a, quae de hac notulâ in partibus Analyseos praecedentibus (scil. dum x Numerus est nec non -1) statuta sunt, neutiquam laedere patet ex aequat. (14) et (15). Radix ex Numero quodam principalis (ut apparet) ipsa est ea, cui nomen in Elementis cessit „Radix numeri positiva.“

4. Quibus peractis jam constat, quid in Analysi valeat signum

$$x^\mu,$$

certe dum, x quantitate quâlibet, μ realis est atque rationalis. Irrationali μ nullus omnino in praecedentibus, excepto casu illo singulari $\beta=0$ et α positivâ, tributus fuit sensus. Licet igitur hinc, omni absque praecedentium noxâ, signum illud x^μ in hoc etiam casu (μ irrationali) membro secundo aequationum (11) et (11′) — ipsius (14) — aequivalens statuere, quippe quoniam hoc adiso aequat. ipsa (11) identica, dum $\beta=0$ ponitur, evadit. Quo facto jam, quid valeat signum

(1) . . . . x^y,

quaequae sit y quantitas realis, perfecte est det natum.

Monere juvat hoc loco nihil sane impedire, quominus a illa (6) ideoque etiam aequ. (6′) et (6″) hoc etiam in casu (tionali) ratae sistantur, quippe quoniam tali μ quantitate si $((x))^\mu$ in Analysi nondum tributus fuit sensus.

Omnibus jam eis, quae de Potentiis quantitatum hu statuta fuerunt, principiis in unum collatis memorabile hoc ratur

Theorema.

Siquidem, $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ quantitate quâlibet (haud $=0$), α et β realibus,

p realis sit numerice integra aut 0,

μ realis quaelibet,

ϱ modulus $=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$,

θ realis, quam potissimum placuerit eli iis, quarum Sin. et Cos. aequationi (5) s faciunt,

$\tau=\text{Arctg}\,\frac{\beta}{\alpha}$;

semper obtinet

$$\text{(I)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad x^p \text{ seu } (\varrho[\text{Cos}\,\theta+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\theta])^p = \varrho^p(\text{Cos}\,p\theta+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,p\theta),$$

$$\text{(II)} \quad . \; . \; . \quad ((x))^\mu \text{ seu } ((\varrho[\text{Cos}\,\theta+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\theta]))^\mu = \varrho^\mu(\text{Cos}\,\mu\theta+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\theta)((1))^\mu = ((\varrho))^\mu(\text{Cos}\,\mu\theta+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\theta);$$

nec non semper, prout α positiva est aut negativa,

$$\text{(III)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad x^p=(\pm\varrho[\text{Cos}\,\tau+\sqrt{-1}\text{Sin}\,\tau])^p = (\pm\varrho)^p(\text{Cos}\,p\tau+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,p\tau),$$

$$\text{(IV)} \quad . \; . \; . \; . \quad ((x))^\mu=((\pm\varrho[\text{Cos}\,\tau+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\tau]))^\mu = ((\pm\varrho))^\mu(\text{Cos}\,\mu\tau+\sqrt{-1}\text{Sin}\,\mu\tau),$$

et quidem, dum $\alpha=0$ est, superiori aeque ac infer uti licet signo, eo quidem pacto ut litterâ τ tunc lim intelligatur ipse, in quem Arctg $\frac{\beta}{\alpha}$ valore ipsius α n merico decrescente indefinite convergat, h. e. $\pm\frac{\pi}{2}$, du

superiori uteris signo, at $\mp\frac{\pi}{2}$ dum inferiori, prout positiva est aut negativa β;

tum semper aequatio obtinet

$$\text{(V)} \quad . \; . \; . \; . \quad x^\mu = (\pm\varrho[\mathrm{Cos}\,\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\tau])^\mu$$
$$= (\pm\varrho)^\mu (\mathrm{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau),$$

eâ quidem subjectâ conditione ut superiori utaris signo, dum α positiva est aut zéro (quo in casu novissimo litterâ illâ τ limites $\pm\frac{\pi}{2}$, prout β positiva est aut negativa, intelligantur), inferiori autem dum negativa est α; scilicet

$$\text{(VI)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad ((\varrho))^\mu = \varrho^\mu ((1))^\mu,$$

$$\text{(VII)} \quad . \; . \; . \quad ((-\varrho))^\mu = (-\varrho)^\mu ((1))^\mu = \varrho^\mu ((-1))^\mu,$$

$$\text{(VIII)} \quad (-\varrho)^\mu = \varrho^\mu (-1)^\mu = \varrho^\mu (\mathrm{Cos}\,\mu\pi + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi);$$

porro

$$\text{(IX)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad ((x))^\mu = x^\mu ((1))^\mu:$$

adeo ut, cunctas si vis obtinere quantitatis cujusdam μ-potentias, sufficiat ut principalem illius μ-potentiam per omnes ex ordine μ-potentias unitatis multiplices; denique, dum α negativa est,

$$\text{(X)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad x^\mu = (-x)^\mu (-1)^\mu.$$

De caetero meminisse juvabit, non solum esse

$$\text{(XI)} \quad . \; . \; . \quad ((1))^\mu = \mathrm{Cos}\,2k\mu\pi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,2k\mu\pi,$$

$$\text{(XII)} \quad ((-1))^\mu = (-1)^\mu ((1))^\mu = (\mathrm{Cos}\,\mu\pi + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi)((1))^\mu,$$

$$\text{(XII')} \quad . \; . \; . \quad = \mathrm{Cos}\,(2k+1)\mu\pi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,(2k+1)\mu\pi,$$

in quibus k (indeterm.) breviter „numerum int. aut 0“ denotat;

sed etiam fore ut, dum μ rationalis est quantitas $= +$ aut $-\frac{m}{n}$ (m et n numeri int.), pro certo statui liceat tributis ipsi $2k$ in (XI) successive omnibus, qui inter 0 et n (inclusive) versantur, numerorum parium (0 inclus.) atque ipsi $2k+1$ in (XII') successive omnibus, qui eosdem inter limites versantur, numerorum imparium valoribus reverâ cunctos (et quidem numero n, ubi plurimos), quorum capaces sunt $((1))^\mu$ et $((-1))^\mu$, valores ex membr. poster. (XI) et (XII') esse comparatos;

tandemque, ubi fuerit $\frac{m}{n}$ fractio irreductibilis (m et n inter se primi, $n > 1$), cunctos hos utriusque $((1))^{\mu}$ et $((-1))^{\mu}$ valores ipso esse numero n, eodemque in casu

$$\text{(XIII)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad ((1))^{\pm\frac{m}{n}} = ((1))^{\frac{1}{n}},$$

$$\text{(XIV)} \quad . \; . \; . \; . \quad ((-1))^{\pm\frac{m}{n}} = (([-1]^{m}))^{\frac{1}{n}}.$$

Corollarium.

De Radicibus quantitatum realium. Theoremati convenienter praecedenti totidem sunt quantitatis cujuscumque (realis aeque ac imaginariae) n^{ti} ordinis Radices, quot contineat „Index" (numerus ordinis n) unitates; praeterea aequatio illa (IX) indicat, cunctas si placeat n^{ti} ordinis radices quantitatis comparare, sufficere ut radix ipsa principalis (ejusdem ordinis) per omnes successive unitatis radices n^{ti} ordinis multiplicetur. Itaque, dum A Numerum quemdam denotat, habentur

$$\text{(IX}') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{n}{\mathbb{V}}A = ((1))^{\frac{1}{n}} . \sqrt[n]{A} \\ \text{et} \\ \overset{n}{\mathbb{V}}-A = ((1))^{\frac{1}{n}} . \sqrt[n]{-A}, \end{array} \right.$$

id quod jam insuper (VI) et (VII) indicabant.

Sin vero placet ambas hasce $\overset{n}{\mathbb{V}} \pm A$ ipsâ $\sqrt[n]{A}$ (h. e. radice principali ex valore numerico quantitatis $\pm A$ seu, quam vocant, Arithmeticâ ipsius A radice vel potius eo ipso Numero, qui radicem n^{ti} ordinis ex A conficit) expressas habere; aequationes illae (VI) et (VII) suppeditant

$$\text{(IX}'') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{n}{\mathbb{V}}A = ((1))^{\frac{1}{n}} . \sqrt[n]{A} \\ \text{et} \\ \overset{n}{\mathbb{V}}-A = ((-1))^{\frac{1}{n}} . \sqrt[n]{A}, \end{array} \right.$$

quas equidem his fere verbis interpretari licet: Cunctas si placeat comparare n^{ti} ord. radices ex quantitate reali, sufficit ut Arithmetica n^{ti} ord. radix ex valore quantitatis numerico per omnes successive ejusdem ordinis radices ex unitate positivâ aut negativâ, prout quantitas ipsa proposita positiva est aut negativa, multiplicetur. Praeterea hae ipsae sunt aequationes novissimae, ex quibus rectâ consequitur lex illa notissima, in omnibus inquam n^{ti} ord. radicibus ex numero A unicam $\sqrt[n]{A}$, dum n impar est, at duas $\pm\sqrt[n]{A}$ n pari, esse reales: ex negativâ autem quantitate $(-A)$ unicam $-\sqrt[n]{A}$, dum n impar est, at n pari ne unam quidem, esse realem.

Nota. Probe est notandum numquam fieri ut $\sqrt[n]{-A} = -\sqrt[n]{A}$ sit (dum $n > 1$): illa, utpote quae principalem ipsius $-A$ conficit radicem, semper imaginaria est quantitas, scilicet

$$\sqrt[n]{-A} = \sqrt[n]{A} . \sqrt[n]{-1} = \sqrt[n]{A} . (\mathrm{Cos}\frac{\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{n}):$$

haec autem semper realis. *)

---

*) Fieri quidem potest ut graviter ferenda, primo saltem intuitu, videatur licentia realem, dum exsistit, quantitatis negativae radicem denominatione „radicis principalis" signoque $\sqrt[n]{}$ simplici fraudandi: seu (quo uno omnia complectamur verbo) temere forsan videbitur ac praepropere actum, quod in μ-potentiis quantitatis x (parte reali negativâ) non ea potissimum ornata fuerit denominatione „principalis" signoque illo x^μ, ea (inquam) quae realis ipsa evadit, dum x realis est et μ formâ $\frac{1}{n}$, n impari (scil. n pari nulla earum, quae in $\sqrt[n]{\!\sqrt{-A}}$ continentur, realis est). Verumtamen ex eo, quod μ-potentiae ipsius x (parte reali negativâ) omnes datae sunt formulâ

$$((x))^\mu = \varrho^\mu (\mathrm{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau)[\mathrm{Cos}(2k+1)\mu\pi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,(2k+1)\mu\pi],$$

patet quod diximus offendiculum aliter evitari non posse, nisi x^μ cooptaretur ea, cujus $(2k+1)\mu$ integro sit valore numerico — dum ita fieri poterit. Quod vero $2k+1$ talis nunquam exsistit, nisi forte fuerit μ rationalis ac valore numerico fractionis cui cedat imparis numeri denominator, propterea patet omnino arbitrio nihil aliud esse relictum, quam ut vel signo x^μ complures et quidem aliae aliis μ-valoribus propriae subjiciantur notiones — (id quod reverà si foret admissum, periculum est ne ex hoc ipso in Cauchyanum illud induceremur consilium signi hujus x^μ, parte reali ipsius x negativâ, ex Analysi prorsus tollendi) — vel etiam eâ, quam nos supra inivimus, ratione (quamvis primo forsan conspectu speciem quamdam prae se ferat offensionis) definiatur hoc signum. Utrum eligatur potissimum, id facile constat ratione habitâ emolumenti, quod Analysi contingat ex definitione ita comparatâ, ut in omnem μ quadret (realem immo non minus ac imaginariam). Nec id solum; alia est quaedam insuper, eademque ad hunc usque diem (quod jure licet mirari) neglecta, gravissimi sane ad rem dirimendam momenti ratio ea, quam indicant leges illae in num. 2°). 3°) et 4°) §i. 5. relatae: quippe quibus inopinatum fere arctissimumque, quo inter se cohaerent vinculo societatis ambo quantitatum genera ea, quae nos heic signis illis x^μ (quin immo $x^{\mu+\nu\sqrt{-1}}$) et lx — negativa sit x quà partem realem nec ne — intelligenda statuimus, est indicatum. Quâ demum perspectâ societate primo quidem patet, quemadmodum in quantitatibus signo $l((x))$ comprehensis nullam omnino signo lx notandam realem (dum x negativâ est parte reali) deprehendi licebit, sic quoque, dum in eo res agitur ut ex agmine quantitatum $((x))^\mu$ eligatur x^μ, id sane levioris esse momenti quod forte inter $((x))^\mu$ illas quaepiam exsistat, cui pro μ-valore quodam speciali forma cedat realis; tum vero deinceps haud praeterit, si ratione illâ forsitan praeoptatâ determinaretur x^μ (pro x quà partem realem negativâ), profecto fore ut incassum abiret quod modo diximus vinculum societatis una cum omnibus, quae ex mirâ hac conjunctione pendent, legibus Analysi vere salutaribus.

Praeterea jure licet contendere jam signo ipso $-\sqrt[n]{A}$ effectum esse, ut reali illi $n$ti ordinis radici ex $(-A)$ satis contigerit remunerationis.

5. **Idiomata potentiarum principalium praecipua.** Ex aequatione (I) theorematis praecedentis rectâ consequitur fore ut, cujusvis sint generis quantitates x, x_1, x_2, ... x_n, si modo reales fuerint ac numerice integrae aut 0 istae p, p_1, p_2, ... p_n, ratae sint quae sequuntur leges (quarum praeterea auctoritas, dum x, x_1, ... x_n Numeros denotant, ex Elementis jam cognita est):

$$\left\{\begin{array}{l} x^p \, . \, x^{p_1} \, . \, x^{p_2} \dots . \, x^{p_n} = x^{p+p_1+p_2+\dots+p_n}, \text{ nec non } \dfrac{x^{p_1}}{x^p} = x^{p_1-p}, \\ \left.\begin{array}{l} \qquad (x^p)^{p_1} = x^{pp_1} \\ \text{ideoque etiam } = (x^{p_1})^p, \end{array}\right\} \\ x^p \, . \, x_1{}^p \, . \, x_2{}^p \dots . \, x_n{}^p = (x x_1 x_2 \dots . x_n)^p \text{ atque } \dfrac{x_1{}^p}{x^p} = \left(\dfrac{x_1}{x}\right)^p . \end{array}\right.$$

Sin vero reales equidem at ceteroquin indeterminatae relictae supponantur Exponentes μ, $\underset{1}{\mu}$, $\underset{2}{\mu}$, ... $\underset{n}{\mu}$; non nisi certis subjectis conditionibus leges valent eaedem (quamvis sit quoque in genere iis uti liceat, ut satis constat, dum **Numeri** sunt x, x_1, ... x_n).

1°) **Haec tamen aequatio**

$$(19) \quad \dots . \quad x^\mu \, . \, x^{\underset{1}{\mu}} \, . \, x^{\underset{2}{\mu}} \dots . \, x^{\underset{n}{\mu}} = x^{\mu+\underset{1}{\mu}+\underset{2}{\mu}+\dots+\underset{n}{\mu}}$$

numquam non valet, ideoque non minus aequatio

$$(20) \quad \dots \dots \quad \frac{x^{\underset{1}{\mu}}}{x^\mu} = x^{\underset{1}{\mu}-\mu}$$

atque in specie haecce

$$(20') \quad \dots \dots \quad \frac{1}{x^\mu} = x^{-\mu}.$$

Demonstr. Nam, parte reali ipsius x haud negativâ, aequatio (V) dat

$$x^\mu x^{\underset{1}{\mu}} \dots x^{\underset{n}{\mu}} = \varrho^{\mu+\underset{1}{\mu}+\dots+\underset{n}{\mu}} \{\mathrm{Cos}(\mu+\underset{1}{\mu}+\dots+\underset{n}{\mu})\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}(\mu+\underset{1}{\mu}+\dots+\underset{n}{\mu})\tau\}$$
$$= x^{\mu+\underset{1}{\mu}+\dots+\underset{n}{\mu}}.$$

Et quidem, negativâ ipsius x parte reali, aequ. (V) cum (VIII) conjuncta dat

$$x^\mu x^{\underset{1}{\mu}} \dots . \, x^{\underset{n}{\mu}}$$

$$= \varrho^{\mu+\underset{1}{\mu}+\dots+\underset{n}{\mu}} . \left.\begin{array}{l} \{\cos(\mu+\underset{1}{\mu}+\dots+\underset{n}{\mu})\tau \\ \quad + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}(\mu+\underset{1}{\mu}+\dots+\underset{n}{\mu})\tau \end{array}\right\} . (-1)^\mu (-1)^{\underset{1}{\mu}} \dots . (-1)^{\underset{n}{\mu}};$$

i. e. quoniam ex (13), ut patet, $(-1)^{\mu}(-1)^{\mu_1}\dots(-1)^{\mu_n}=(-1)^{\mu+\mu_1+\dots+\mu_n}$ est,

$$=x^{\mu+\mu_1+\dots+\mu_n}.$$

Q. E. D.

2°) Aequatio illa

$$(21) \quad \dots\dots\dots \quad (x^{\mu})^{\mu_1} = x^{\mu\mu_1}$$

valet (μ et μ_1 quibuscumque) certe quoties, parte reali ipsius x haud negativâ, productum illud $\mu\tau$ limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat (τ denotante, uti assolet).

Demonstr. Est enim in hoc casu (parte reali x haud negativâ), secundum (V),

$$x^{\mu}=\varrho^{\mu}(\mathrm{Cos}\,\mu\tau+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau),$$

nec non, quoniam heic $\mu\tau$ limitibus illis $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excederet, eâdem ex (V)

$$(x^{\mu})^{\mu_1}=\varrho^{\mu\mu_1}(\mathrm{Cos}\,\mu\mu_1\tau+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\mu_1\tau)=x^{\mu\mu_1}.$$

Q. E. D.

Nec minus valet ista aequatio, quoties, parte reali ipsius x negativâ, productum illud $\mu(\tau+\pi)$ limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat. Nam parte reali x negativâ ex aequ. (V) et (VIII) habetur

$$x^{\mu}=\varrho^{\mu}[\mathrm{Cos}\,\mu(\tau+\pi)+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu(\tau+\pi)],$$

nec non, quoniam heic $\mu(\tau+\pi)$ limitibus illis $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excederet, eâdem ex (V)

$$(x^{\mu})^{\mu_1}=\varrho^{\mu\mu_1}[\mathrm{Cos}\,\mu\mu_1(\tau+\pi)+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\mu_1(\tau+\pi)],$$

quae quidem in hoc casu (negativâ ipsius x parte reali) reverâ valorem conficit ipsius $x^{\mu\mu_1}$, secundum (V) et (VIII). — **Q. E. D.**

Quibusnam praeterea in casibus rata sit nec ne aequatio illa (21), μ et μ_1 realibus indeterminatis relictis, id opus non heic est exponi: quippe quod, ubi forte sit opus, perfacili semper negotio licet discerni. De caetero in § 4. sequenti (pag. 411.) universalem magis ac vere notandum casuum, in quibus valeat ista aequatio, characterem in medio proferendum curabimus. Quadrati hoc idem in aequationem

$$(22) \quad \dots\dots \quad (x^{\mu})^{\mu_1}=(x^{\mu_1})^{\mu},$$

quae quidem certe (ut ex modo allatis patet) vim habet legiti
1°) quoties, parte reali x haud negativâ, illorum
$\mu\tau$ neutrum limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ excedat, atque 2°) quoties,
gativâ ipsius x parte reali, productorum $\mu(\tau+\pi)$ et $\mu($
neutrum limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ excedat.

3°) Aequatio illa

(23) . . . . . $x^\mu x_1^\mu \ldots. x_n^\mu = (x x_1 \ldots. x_n)^\mu$

valet (μ quâlibet) certe quoties, realibus ipsar
$x, x_1, \ldots. x_n$ partibus haud negativis, summa illa

(24) . . . . $\tau + \tau_1 + \ldots. + \tau_n$

limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat: — ubi videlicet

$$\tau = \mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\alpha},\ \tau_1 = \mathrm{Arctg}\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \ldots.\ \tau_n = \mathrm{Arctg}\frac{\beta_n}{\alpha_n};$$

atque

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},\ x_1 = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}, \ldots x_n = \alpha_n + \beta_n\sqrt{-1}.$$

Demonstr. Quod enim partes reales omnium $x, x_1, \ldots$
haud negativae sint, ideoque ($\varrho, \varrho_1, \ldots. \varrho_n$ modulos denotantibus

$$x = \varrho(\mathrm{Cos}\,\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\tau),\ x_1 = \varrho_1(\mathrm{Cos}\,\tau_1 + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\tau_1), \ldots.$$
$$\ldots.\ x_n = \varrho_n(\mathrm{Cos}\,\tau_n + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\tau_n),$$

propterea secundum (V) habetur

$$x^\mu x_1^\mu \ldots. x_n^\mu = (\varrho\varrho_1 \ldots \varrho_n)^\mu \{\mathrm{Cos}\,\mu(\tau+\tau_1+\ldots+\tau_n) + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu(\tau+\tau_1+\ldots$$

i. e.

$$= (x x_1 \ldots. x_n)^\mu,$$

quippe quoniam summa illa (24) limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedere
sita erat.

Q. E. D.

Quod ad specialem illam

(23') . . . . $x^\mu x_1^\mu = (x x_1)^\mu$

attinet, facile patet satisfactum eâ esse conditioni heic supra
positae, quoties, realibus ipsarum x et x_1 partibus hau
negativis, pars ipsa realis producti $x x_1$ haud negati

sit. *) — Est alius insuper casus singularis, quo valet ista (23′) is inquam ubi, parte reali x positivâ, x_1 ipsa $=-1$ fuerit: etenim tunc secundum (X) habetur

$$(23'') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad x^\mu . (-1)^\mu = (-x)^\mu .$$

Quibusnam praeterea casibus rata sit nec ne aequatio illa (23), μ indeterminatâ relictâ, id opus non heic est exponi: quippe quod, ubi forte sit opus, perfacili semper negotio licet discerni. De caetero in §. 4. sequenti (pag. 412.) universalem magis ac vero notandum casuum, quibus valeat ista aequatio, characterem in medio proferendum curabimus.

4⁰) Aequatio illa

$$(25) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{x_1{}^\mu}{x^\mu} = \left(\frac{x_1}{x}\right)^\mu$$

valet (μ quâlibet), certe quoties haud negativae sint partes reales tum utriusque x et x_1 tum Quoti ipsius $\frac{x_1}{x}$. Etenim si ita fuerit, ex (23′) habetur $x^\mu \left(\frac{x_1}{x}\right)^\mu = x_1{}^\mu$.

Exinde consequitur, aequationem illam

$$(25') \; . \; . \; . \; \left(\frac{1}{x}\right)^\mu = \frac{1}{x^\mu} \text{ ideoque } = x^{-\mu} \text{ secundum } (20')$$

valere (μ quâlibet), quoties haud negativa sit pars realis ipsius x. E contrario ista aequatio, dum negativa est pars realis ipsius x, neutiquam valet (nisi forte μ numerice integra aut 0 fuerit): tunc enim habetur

$$\left(\frac{1}{x}\right)^\mu = \left(-\frac{1}{x}\right)^\mu (-1)^\mu, \text{ secund. (X);}$$

at vero

$$x^{-\mu} = (-x)^{-\mu} (-1)^{-\mu}, \text{ secund. (X);}$$

i. e.

$$= \left(-\frac{1}{x}\right)^\mu (-1)^{-\mu},$$

quoniam heic $-x$ positivâ est parte reali; et quidem inaequales sunt $(-1)^\mu$ et $(-1)^{-\mu}$, nisi forte $\operatorname{Sin} \mu\pi = 0$ fuerit.

---

*) Tunc enim fieri non potest ut summa $\tau + \tau_1$ limitibus illis $\pm\frac{\pi}{2}$ excedat, quippe quoniam extra hos limites nullus omnino arcus exsistit, qui, summae quidem duarum quarumdam τ et τ_1 limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedentium, cosinus cedat haud negativus.

§. 3.
De signo A^y, A numero, y-valore quolibet.

Observ. Postulantur abhinc, praeter ea quae in hac Dissertatione jam sunt pertractata, sequentia nota: 1⁰) Doctrina logarithmorum (realium) Numerorum primaque doctrinae serierum infinitarum (terminis realibus) principia ea, quae in Anal. Algébr. Chap. VI. exposuit Cauchy, — (itaque, ut paucis complectar, summa operis illius Anal. Algébr. Chap. I—VI.) — adjectâ functionum illarum Sin x et Cos x evolutione secundum dignitates ipsius x (realis) *), atque 2⁰) Chap. VIII. §§. 1—4 **) operis ejusdem nec non ex Chap. IX. (de seriebus terminorum imaginariorum) ea, quae paginae 289 nominatimque his verbis „Cela posé si l'on &c." ***) praecedunt.

Quid in Analysi valeat hoc signum

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^y,$$

quaeque sit x quantitas (realis, inquam, aut imaginaria), modo sit y realis, ex praecedentibus jam constat. Reliquum est ut inveniatur, quisnam huic signo in genere, i. e. talis qui Exponenti y cuilibet $= \mu + \nu\sqrt{-1}$ (μ et ν realibus) quadret, potissimum tribuatur sensus. Eandem heic persecuturis viam, quâ in partibus Analyseos praecedentibus perventum fuit ad sensum signi x^y pro y reali determinandum, nobis primo quidem injunctum est negotium ut signum hoc $x^{\mu+\nu\sqrt{-1}}$, dum x Numerus est $= A$, seu breviter signum

---

*) Cauchy, ut satis constat, hanc rem in doctrina demum summationis serierum terminis imaginariis instructarum collocavit. Quae si necessaria esset dilatio, ex eâ re solâ (ut facile patet) id nobis impedimenti moraeque foret oblatum, ut ea quae jam reliqua sunt signa (x^y illud in genere, caeteraque) definiri eorumque idiomata explicari non omnino liceret, nisi viam persecuturi, quam Cauchy munivit, praemissa postularemus fere omnia, quae in Anal. Alg. Chap. IX. §. 2. post pag. 289. sequuntur, eamque ipsam ob caussam §um. illum 5. Chap. VIII. ibid. — At vero quandoquidem functionum illarum Sin x et Cos x (x reali) secundum dignitates ipsius x explicandarum legem facili negotio, vi quidem problematis in pag. 114. Anal. Algébr. propositi, sanciri licet (cui tamen rei hoc loco tempus impendere satis foret ineptum); nos quidem, hac re ipsi Chap. VI. Anal. Algébr. vindicatâ, jam nunc morâ disjectâ nil impedit quominus ad signa, de quibus agitur [x^y, $\mathrm{Log}_b(x)$, Sin x etc.] complete definienda progrediamur.

**) Nos tamen ea, quae modo supra in art. 5. §i nostri 2di allata sunt, in locum paginarum 243—246. §i 1. Chap. VIII. substituenda esse censere, per se patet.

***) Quod ad ea quae his verbis succedentia §um 2um Chap. IX. conficiunt (summationem, inquam, serierum quarumdam terminis imaginariis instructarum), nec non (qui iis postulatur praemissus) §um ipsum 2um Chap. VIII. attinet, tantum abest ut praemittenda necesse sint haec omnia iis, quae ad signa de quibus heic agitur definienda eorumque explicanda idiomata pertineant (id quod jam modo supra monuimus), ut potius in systemate ipso Analyseos postponenda esse haec omnia iis, quae opusculum hoc nostrum constituunt, jure esse concedendum videatur.

(26) . . . . $A^{\mu+\nu\sqrt{-1}}$ seu A^y;

determinemus. Quâ tamen in re satis cognitâ paucis tantummodo heic opus est verbis.

Non solum jure licitum sed ex analogiâ etiam praefinitum esse apparet, ut y-valore quolibet statuatur definitio

$$(27) \quad . \; . \; . \; A^y = 1 + \frac{ylA}{1} + \frac{(ylA)^2}{1.2} + \frac{(ylA)^3}{1.2.3} + \&c.$$

ideoque in specie, e denot. Basin systematis Neperiani,

$$(27') \quad . \; . \; . \; e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \&c.;$$

vi quarum, y-valore quolibet, habetur relatio

$$(28) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; A^y = e^{ylA}.$$

Porro, quae ex his consequitur, aequatio

$$(29) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; e^y . e^{y_1} = e^{y+y_1}$$

nec non latior ista

$$(30) \quad . \; . \; . \; . \; A^y . A^{y_1} \ldots . A^{y_n} = A^{y+y_1+\ldots+y_n}$$

quoniam ratae sunt valoribus ipsarum y, y_1, ... y_n quibuscumque (realibus aeque ac imaginariis), exinde rectâ facillimoque usque negotio; vi quidem legis illius functionum $\sin x$ et $\cos x$ (x reali) secundum dignitates ipsius x explicandarum, deducitur notissima illa formae finitae relatio

$$(31) \quad . \; . \; . \; e^{\mu+\nu\sqrt{-1}} = e^{\mu}(\cos \nu + \sqrt{-1} \sin \nu)$$

nec non latior ista

$$(32) \quad . \; . \; . \; A^{\mu+\nu\sqrt{-1}} = A^{\mu}(\cos[\nu lA] + \sqrt{-1} \sin[\nu lA]);$$

quâ ex novissimâ demum patet omnino Numeris A, A_1, ... A_n valere istam

$$(33) \quad . \; . \; . \; A^y . A_1{}^y \ldots . A_n{}^y = (AA_1 \ldots A_n)^y,$$

quaequae sit y quantitas realis aut imaginaria.

Nota.

Ex eo ipso quod aequatio (31), θ quâlibet reali, suppeditat

$$e^{\theta\sqrt{-1}} = \cos\theta + \sqrt{-1} \sin\theta,$$

it efficitur, ut, loco aequationum Theorematis illius in §. 2. relati, breviores eamque ipsam ob caussam usui plerumque commodiores substitui liceat hasce:

$$(34) \quad . \quad . \quad . \quad x^p \text{ seu } (\varrho e^{\theta\sqrt{-1}})^p = \varrho^p e^{p\theta\sqrt{-1}},$$

$$(35) \quad . \quad . \quad ((x))^\mu \text{ seu } ((\varrho e^{\theta\sqrt{-1}}))^\mu = \varrho^\mu e^{\mu\theta\sqrt{-1}} ((1))^\mu$$
$$= ((\varrho))^\mu e^{\mu\theta\sqrt{-1}},$$

tum, prout positiva est aut negativa α,

$$(34') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^p = (\pm \varrho e^{\tau\sqrt{-1}})^p = (\pm \varrho)^p e^{p\tau\sqrt{-1}},$$

$$(35') \quad . \quad . \quad . \quad ((x))^\mu = ((\pm \varrho e^{\tau\sqrt{-1}}))^\mu = ((\pm \varrho))^\mu e^{\mu\tau\sqrt{-1}},$$

atque, pro $\alpha = 0$, superius aut inferius ex arbitrio signum (pa illo solito); porro, prout α haud negativa est aut negati potentiae principali

$$(36) \quad . \quad . \quad . \quad x^\mu = (\pm \varrho e^{\tau\sqrt{-1}})^\mu = (\pm \varrho)^\mu e^{\mu\tau\sqrt{-1}};$$

tandemque

$$(37) \; ((1))^\mu = e^{\pm 2k\mu\pi\sqrt{-1}} \text{ atque } ((-1))^\mu = (-1)^\mu ((1))^\mu = e^{\pm(2k+1)\mu\pi\sqrt{\cdot}}$$

$$(38) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (-1)^\mu = e^{\mu\pi\sqrt{-1}} = (e^{\pi\sqrt{-1}})^\mu.$$

§. 4.

1. Antequam ea, quae notulae illi (I) latissimo sensu accep (i. e. tali, qui ad x- et y-valores quoscumque pertineat) terminandae inserviant, adgredimur, id nobis injunctum est ne tium ut, quae proxime antecedentibus intimo conjuncta sunt ne praecipua

De Logarithmis Quantitatum Naturalibus

principia praemittantur.

Problema. Invenire quantitates eas z univers quibus conditioni huic

$$(39) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad e^z = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

(e Basin denotante systematis logarithmorum naturalium, α quantitates reales) fiat satis; seu, quod idem valet (ϱ modul $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ denotante ac θ quantitatem realem, quam potissim eligi placuerit, cujus Sin. et Cos. ipsi (5) satisfaciant): Inven quantitatis eas z universas, quibus conditioni satis huic

$$(39') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad e^z = \varrho(\text{Cos}\,\theta + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\theta).$$

Tali (si exsistat) quantitati unicuique forma cedat necesse haec $u + v\sqrt{-1}$ (u et v realibus), ideoque loco aequationis simae hanc licet substitui:

$$e^{u+v\sqrt{-1}}=\varrho(\mathrm{Cos}\,\theta+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\theta),$$

i. e.

$$e^{u}(\mathrm{Cos}\,v+\sqrt{-1}\sin v)=\varrho(\mathrm{Cos}\,\theta+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\theta)$$

seu

$$(40)\quad \ldots\ldots\ldots \begin{cases} e^{u}=\varrho,\ \text{i. e. } u=l\varrho, \\ v \text{ formâ } \theta\pm 2k\pi. \end{cases}$$

Quarum ex priori (40) jam primo quidem patet, si quantitas illa proposita $\alpha+\beta\sqrt{-1}=0$ fuisset, nullam omnino exsistere quantitatem (finitam) z, quâ fiat satis problemati. At ceteroquin semper — ut facillimum est expertu — problemati reverâ fit satis unâquâque quantitatum in formula

$$(41)\quad \ldots\ldots \quad z=l\varrho+(\theta\pm 2k\pi)\sqrt{-1},$$

quemvis placuerit ipsi k tribuere numeri integri (0 inclus.) valorem, comprehensarum.

Quantitatum, quibus aequationi (39) fiat satis, unaquaeque appellabitur „e-logarithmus quidam (item logarithmus naturalis) ipsius $\alpha+\beta\sqrt{-1}$" *): et quidem formula ea universalis, quae in se cunctos hos continet ipsius $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ seu x (breviter) logarithmos, signo illo $l((x))$ intelligenda erit. Unde aequatio illa

$$(42)\quad \ldots\ldots \quad l((x))=l\varrho+(\theta\pm 2k\pi)\sqrt{-1},$$

θ denotante (uti supra est monitum).

Ex. gr. Quoniam, dum x est 1, θ cooptari licet 0, atque, dum x est -1, θ cooptari licet π;

ex aequatione (42) patet esse

$$(43)\quad \ldots\ldots \quad l((1))=\pm 2k\pi\sqrt{-1},$$

imaginariis omnibus unico $=0$ excepto,

$$l((-1))=\pi\sqrt{-1}+l((1))=\pm(2k+1)\pi\sqrt{-1},$$

imaginariis omnibus.

Licebit igitur, loco aequationis (42), hac uti

$$(42')\ \ldots\ \ l((x))=l\varrho+l((1))+\theta\sqrt{-1}=l((\varrho))+\theta\sqrt{-1},$$

quae quidem indicat, cunctos quantitatis cujusdam e-loga-

*) Nosmet hac definitione nullo modo ea, quae in partibus Analyseos praecedentibus de logarithmis Numerorum naturalibus statuta sunt, laedere plane apparet.

Loco vocabuli „e-logarithmus" explicatius dicitur „logarithmus ex systemate baseos e."

rithmos eo modo comparari licere, ut eorum uni quem potissimum eligi placuerit — addatur $l((1))$ i. dantur successive e-logarithmi omnes unitatis.

Nota. Es his patet, μ reali quâlibet (x haud zéro), se obtinere

$$(45) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad e^{\mu l((x))} = ((x))^{\mu}.$$

Nam

$$e^{\mu l((x))} = e^{\mu [l\varrho + (\theta \pm 2k\pi)\sqrt{-1}]} = \varrho^{\mu} . e^{\mu(\theta \pm 2k\pi)\sqrt{-1}},$$
$$= ((x))^{\mu}, \text{ secundum (35).}$$

2. Dum α positiva est, quoniam tunc θ cooptari li (§. 1. art. 2.), aequationi (42′) inde forma contingit ista

$$(46) \ \ldots . \ l((x)) = l\varrho + l((1)) + \tau\sqrt{-1} = l((\varrho)) + \tau\sqrt{-1};$$

dum α negativa est, quoniam tunc θ cooptari licet $\tau + \pi$,

$$(46') \quad . \quad . \quad . \quad l((x)) = l\varrho + l((1)) + (\tau + \pi)\sqrt{-1}$$
$$= l\varrho + l((-1)) + \tau\sqrt{-1} = l((-\varrho)) + \tau\sqrt{}$$

atque, dum $\alpha = 0$ est, una valet aeque ac altera aequatio, quidem pacto ut litterâ τ tunc limes ipse, in quem $\mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}$ v ipsius α numerico indefinite decrescente convergit, intelligatur, $\pm\frac{\pi}{2}$ in (46), at $\mp\frac{\pi}{2}$ in (46′), prout positiva est aut negativa

„Principali ipsius $l((x))$ valore“ seu „e-logarit quantitatis x principali“ eum ipsum intelligi juvabit, secundo membro aequationis (46) convenienter, dum α posi est aut zéro, et secundo membro aequationis (46′) dum n tiva est α, positioni $k=0$ in expressione (43) ipsius $l((1))$ rali debetur. Principali huic logarithmo signum illud $l(x)$ se erit reservatum. *) Habentur itaque

$$(47) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} l(1) = 0, \\ l(-1) = \pi\sqrt{-1}; \end{cases}$$

atque in genere, dum α haud negativa est,

$$(48) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad lx = l\varrho + \tau\sqrt{-1},$$

---

*) Nosmet hoc modo definitâ significatione notulae lx (x-valore q libet) reverâ eum, quem huic signo pro x = Numero A in Elementis vindicarunt, sensum in integro reliquisse, id satis patet ex eo quod aequ (48), quae significationem hujus lx pro x omni qua partem real positivâ indicat, in hoc casu singulari identica evadit. Principal igitur Numeri cujusdam e-logarithmus is ipse est, cui in Elemen nomen cessit „e-logarithmus numeri.“

scilicet, si $\alpha=0$, litterâ τ intelligatur (ut supra),

dum vera α negativa

$$(48') \ldots\; lx = l\varrho + (\tau+\pi)\sqrt{-1} = l\varrho + l(-1) + \tau\sqrt{-1}$$
$$= l(-\varrho) + \tau\sqrt{-1};$$

verbo: semper obtinet aequatio

$$(49) \qquad lx = l(\pm\varrho) + \tau\sqrt{-1},$$

scilicet $-\varrho$, dum α negativa est, alioquin $+\varrho$. Ideoque, secundum (46) et (46'), omni in casu habetur

$$(50) \qquad l((x)) = lx + l((1)),$$

id quod praeterea jam cognitum erat ex verbis aequationem (42') proxime insequentibus.

Et quidem ex (49) patet haberi, dum α negativa est, semper

$$(51) \qquad lx = l(-x) + l(-1),$$

nec tamen semper alioquin.

Nota 1. Aequatio (50) indicat positivae cuique quantitati unicum esse e-logarithmum, principalem inquam, realem; negativae autem ne unum quidem.

Nota 2. Ex aequ. (49) patet, μ reali quâlibet (x haud zéro), semper obtinere

$$(52) \qquad e^{\mu lx} = x^{\mu}.$$

Nam (49) dat

$$e^{\mu lx} = e^{\mu[l(\pm\varrho)+\tau\sqrt{-1}]},$$

scilicet, dum α haud negativa est,

$$= e^{\mu(l\varrho+\tau\sqrt{-1})} = \varrho^{\mu} e^{\mu\tau\sqrt{-1}} = x^{\mu} \text{ secund. (36)},$$

atque, dum negativa est α,

$$= e^{\mu(l\varrho+\overline{\tau+\pi}\sqrt{-1})} = \varrho^{\mu} e^{\mu(\pi+\tau)\sqrt{-1}} = x^{\mu} \text{ secund. (36)}.$$

Nota 3. Jamque ex aequ. (52), quippe quâ indicatur esse μlx unus e-logarithmorum ipsius x^{μ}, consequitur, vi legis illius infra aequat. (42') expositae, esse

$$(53) \qquad l((x^{\mu})) = \mu lx + l((1)).$$

Quae licet aequatio cum aequatione (50) — juxta quam habetur $l((x))^{\mu} = l(x^{\mu}) + l((1))$ — conjuncta arguat semper esse

$$l(x^{\mu}) + l((1)) = \mu lx + l((1)),$$

ex hac tamen cavendum est ne falsa ea ducatur conclusio, si
que in genere esse

$$l(x^\mu) \text{ principalem } = \mu l x.$$

Ubi demum $\mu l x$ principalem ipsius x^μ logarithmum confici
infra erit explicatum. Aequatione illâ (53) id constat solum
quantitatum omnium ex parte alterâ suam cuique ex alterâ
aequivalere.

3. Idiomata e-logarithmorum principalium pr
pua. Quae logarithmis (realibus) Numerorum x, x_1,....
pria sunt solitisque his comprehensa aequationibus

$$\left\{\begin{aligned} l(x^\mu) &= \mu l x, \ (\mu \text{ reali}), \\ l(x)+l(x_1)+....+l(x_n) &= l(x x_1 .... x_n); \\ l(x_1)-l(x) &= l\left(\frac{x_1}{x}\right); \end{aligned}\right.$$

idiomata non nisi certis subjectis conditionibus, dum ipsis x,
....x_n sensus quantitatum quarumcumque subjicitur, in
manent.

1°) De aequatione illâ

$$(55) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad l(x^\mu) = \mu l x$$

ea ipsa, quae in 2°) pag. 401. de aequatione

$$(21) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (x^\mu)^{\mu_1} = x^{\mu\mu_1},$$

pronuntiari licebit.

Demonstr. Semper equidem $\mu l x$ unum conficit ex e-log
mis ipsius x^μ, secund. (52). Contendimus autem hoc loco con
eam ambobus, de quibus agitur, in casibus principalem ipsum
rithmum $l(x^\mu)$.

Logarithmus ipsius x^μ principalis, juxta definitionem, es

$$(56) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad l(x^\mu) = l(\pm R) + T\sqrt{-1},$$

denotante R modulum ipsius x^μ atque

$$T = \text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{\text{Coëff. ipsius } \sqrt{-1} \text{ in } x^\mu}{\text{parte ejusd. } x^\mu \text{ reali}}\right);$$

et quidem, ab alterâ parte,

$$(57) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mu l x = \mu . [l(\pm \varrho) + \tau\sqrt{-1}].$$

Quod autem, secundum (36), habetur

$$x^\mu = (\pm \varrho)^\mu e^{\mu\tau\sqrt{-1}},$$

scilicet

$$= \varrho^\mu e^{\mu\tau\sqrt{-1}}, \ \alpha \text{ haud negativâ},$$

et quidem

$$=\varrho^\mu e^{\mu(\tau+\pi)\sqrt{-1}},\ \alpha \text{ negativâ};$$

propterea priori in casu (α haud negativâ), quoties $\mu\tau$ limitibus illis $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat, obtinet ista

$$l(x^\mu) = l(\varrho^\mu) + \mu\tau\sqrt{-1} = \mu lx \text{ casûs hujusce},$$

nec minus posteriori (α negativâ), quoties $\mu(\tau+\pi)$ hisce $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat (ex quo consequitur esse partem ipsius x^μ realem haud negativam), ista

$$l(x^\mu) = l(\varrho^\mu) + \mu(\tau+\pi)\sqrt{-1} = \mu[l(-\varrho) + \tau\sqrt{-1}] = \mu lx$$

casûs hujusce.

Q. E. D.

Quibusnam praeterea casibus rata sit ista aequatio (55), id (ubi forte sit opus) perfacili semper negotio, collatis quidem inter se aequationibus (56) et (57), licebit discerni.

Nota. Id certe constat, quoties

(55) . . . . $l(x^\mu) = \mu lx$

sit, toties hanc etiam obtinere aequationem

(21) . . . . $(x^\mu)^\mu_1 = x^{\mu\mu}$.

Nam semper habetur

$$(x^\mu)^\mu_1 = e^{\mu l(x^\mu)}_1, \text{ secund. (52)},$$

ideoque

$$= e^{\mu\mu lx}_1, \text{ quoties rata sit (55)};$$

quae autem ipsa $e^{\mu\mu lx}_1$ numquam non $= x^{\mu\mu}_1$ est, secundum (52).

2°) De aequatione illâ

(58) . . . $l(x) + l(x_1) + \dots + l(x_n) = l(xx_1\dots x_n)$

ea ipsa, quae in 3°) pag. 402. de aequatione

(23) . . . . . $x^\mu x_1{}^\mu \dots x_n{}^\mu = (xx_1\dots x_n)^\mu$,

pronuntiari licebit.

Demonstr. Semper equidem summa $l(x) + l(x_1) + \dots + l(x_n)$ unum conficit ex e-logarithmis producti $(xx_1\dots x_n)$, quippe quoniam haec $e^{l(x)+l(x_1)+\dots+l(x_n)}$ semper $= xx_1\dots x_n$ est, secund. (30). Contendimus autem hoc loco summam istam casu, de quo agitur, ipsum conficere logarithmum principalem $l(xx_1\dots x_n)$.

Logarithmus ipsius $(xx_1\dots x_n)$ principalis, juxta definitionem, est

$$(59) \quad . \; . \; . \quad l(xx_1 \ldots x_n) = l(\pm R) + T\sqrt{-1},$$

denotante R modulum producti $xx_1 \ldots x_n$ atque

$$T = \text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{\text{Coëff. ipsius } \sqrt{-1} \text{ ibid.}}{\text{parte reali ibid.}}\right);$$

et quidem, ab altera parte,

$$(60) \; l(x) + l(x_1) + \ldots + l(x_n) = l(\pm \varrho) + l(\pm \varrho_1) + \ldots + l(\pm \varrho_n) \\ + (\tau + \tau_1 + \ldots + \tau_n)\sqrt{-1}.$$

Quae autem ambae reverâ, dum haud negativae sunt partes omnium $x, x_1, \ldots x_n$ reales eamque ob caussam

$$l(x) + l(x_1) + \ldots + l(x_n) = l((\varrho\varrho_1 \ldots \varrho_n) + (\tau + \tau_1 + \ldots + \tau_n)\sqrt{-1}$$

atque

$$l(xx_1 \ldots x_n) = l[\varrho\varrho_1 \ldots \varrho_n \cdot e^{(\tau + \tau_1 + \ldots + \tau_n)\sqrt{-1}}],$$

aequales sunt, quoties summa illa $\tau + \tau_1 + \ldots + \tau_n$ limitibus $\pm \frac{\pi}{2}$ haud excesserit.

Q. E. D.

Quod ad **s p e c i a l e m** illam

$$(58') \quad . \; . \; . \; . \; . \quad l(x) + l(x_1) = l(xx_1)$$

attinet, facile patet in eam quadrare, quae in pag. 402. de aequat.

$$(23') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad x^\mu x_1{}^\mu = (xx_1)^\mu$$

pronuntiebantur edicta: ne hoc quidem excepto, quod **p o s i t i v â   i p s i u s** x **p a r t e   r e a l i** rata sit non secus aequatio

$$(58'') \quad . \; . \; . \; . \; . \quad l(x) + l(-1) = l(-x) \; *)$$

ac ista

$$(23'') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad x^\mu(-1)^\mu = (-x)^\mu.$$

Quibusnam praeterea casibus rata sit aequ. (58), id (ubi forte sit opus) perfacili semper negotio, collatis inter se aequationibus (59) et (60), discerni licebit.

N o t a. Id certe constat, quoties

$$(58) \quad . \; . \; . \; . \quad l(x) + l(x_1) + \ldots + l(x_n) = l(xx_1 \ldots x_n)$$

sit, toties hanc etiam obtinere aequationem

---

*) Id quod jam ipsa indicavit aequatio (51).

(23) . . . . $x^{\mu} x_1^{\mu} \ldots x_n^{\mu} = (x x_1 \ldots x_n)^{\mu}$.

Nam semper habetur

$$x^{\mu} x_1^{\mu} \ldots x_n^{\mu} = e^{\mu(lx + lx_1 + \ldots + lx_n)}, \text{ secund. (52)},$$

ideoque

$$= e^{\mu l(x x_1 \ldots x_n)}, \text{ quoties rata sit (58)},$$

quae autem ipsa $e^{\mu l(x x_1 \ldots x_n)}$ numquam non $= (x x_1 \ldots x_n)^{\mu}$ est, secund. (52).

3°) De aequatione illâ

(61) . . . . . $l(x_1) - l(x) = l\left(\frac{x_1}{x}\right)$

ea ipsa, quae in 4°) pag. 403. de aequatione

$$\frac{x_1^{\mu}}{x^{\mu}} = \left(\frac{x_1}{x}\right)^{\mu},$$

pronuntiari licebit.

Nam hoc ipso in casu (partibus ipsarum x, x_1 et $\frac{x_1}{x}$ haud negativis), secundum (58′), habetur $l(x) + l\left(\frac{x_1}{x}\right) = l(x_1)$.

Exinde consequitur, aequationem

(61′) . . . . $l\left(\frac{1}{x}\right) = -lx$,

non secus ac istam

(25′) . . . . $\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu} = x^{-\mu}$,

valere, quoties haud negativa sit pars realis ipsius x. Neutiquam vero, dum negativa est x quâ partem realem, valere eandem patet ex eo quod tali in casu sit

$$lx = l\varrho + \tau\sqrt{-1} + \pi\sqrt{-1},$$

at vero

$$l\left(\frac{1}{x}\right) = -(l\varrho + \tau\sqrt{-1}) + \pi\sqrt{-1}.$$

Nota. Id certe constat, quoties rata sit (61), ipsam quoque obtinere aequ. (25).

Nam semper habetur

$$\frac{x_1^{\mu}}{x^{\mu}} = \frac{e^{\mu l x_1}}{e^{\mu l x}}, \text{ secund. (52)},$$

seu

$$= e^{\mu(lx_1 - lx)} \text{ secund. (30)},$$

ideoque

$= e^{\mu l\left(\frac{x_1}{x}\right)}$, quoties rata sit (61),

quae autem ipsa numquam non $= \left(\frac{x_1}{x}\right)^{\mu}$ est, secundum (52

Coloph. His jam de logarithmis principalibus qualit que peractis commonere demum juvat, aequationem illam

(62) .... $l((x)) + l((x_1)) + ... + l((x_n)) = l((x x_1 .... x_n))$

ideoque hanc quoque ipsam

(63) . . . . . $l((x_1)) - l((x)) = l\left(\left(\frac{x_1}{x}\right)\right)$

nec non, in specie, istam

(63') . . . . . $l\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -l((x))$

legitimas quibuscumque ipsarum $x, x_1, ... x_n$ valoribus (cer adsolet, 0 excepto) permanere, id quod reverâ juxta lege experiri licebit.

§. 5.

Quid in Analysi valeat signum x^y x et y quibuscumque *).

1. Ex partibus Analyseos praecedentibus jam constat: 1⁰) titate x quâlibet $= \alpha + \beta\sqrt{-1}$ (α et β realibus), si modo f realis, semper haberi

(64) .... $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{\mu} = (\pm \varrho)^{\mu} e^{\mu\tau\sqrt{-1}} = e^{\mu l(\alpha+\beta\sqrt{-1})}$,

(scil. $-\varrho$, dum α negativa est; alioquin $+\varrho$),

atque 2⁰) x positivâ $= \varrho$, $y = \mu + \nu\sqrt{-1}$ (μ et ν realibus),

(65) .... $\varrho^{\mu+\nu\sqrt{-1}} = e^{(\mu+\nu\sqrt{-1})l\varrho} = \varrho^{\mu} . e^{\nu l\varrho\sqrt{-1}}$.

Quae quoniam ambae aequationes in unam hanc reverâ

(66) . . . . $x^y = e^{ylx}$,

nec aliud quodpiam in praecedentibus Analyseos partibus de illo (1), scil. x^y seu $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{\mu+\nu\sqrt{-1}}$, fuit statutum; jam apparet non solum jure esse licitum, sed re ipsa postulatum

---

*) Uti adsolet, x haud zéro esse putatur. De signo 0^y vid. no sub pag. 388.

ab hoc inde tempore (ex analogiâ) **habeatur aequatio illa** (66) **rata et universalis definitio signi** x^y **in Analysi Mathematica**: itaque, ut explicate eloquamur,

$$(66') \;\ldots\ldots\; (\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\mu+\nu\sqrt{-1}} = e^{(\mu+\nu\sqrt{-1})l(\alpha+\beta\sqrt{-1})}.$$

Praeterea (66) ista, positivâ ϱ quâlibet, suppeditat

$$(67) \;\ldots\ldots\; (\pm\varrho)^y = e^{yl(\pm\varrho)},$$

nec non, ϱ modulum ipsius x denotante,

$$(68) \;\ldots\ldots\; x^y = (\pm\varrho)^y e^{y\varepsilon\sqrt{-1}},$$

prout pars realis ipsius x haud negativa est aut negativa.

Eâdem insuper ex aequatione (66), quippe quâ indicatur ylx unus esse ex e-logarithmis ipsius x^y, consequitur, vi legis illius infra aequat. (42′) expositae, aequationem hancce

$$(69) \;\ldots\ldots\; l((x^y)) = e^{ylx} + l((1))$$

x et y quibuscumque manere legitimam. Generalis hujusce speciem quamdam aequatio illa (53) conficit.

2. Iis convenienter, quae jam antea diversis ipsarum x et y positionibus specialibus fuerunt admissa, quibuscumque abhinc x- et y-valoribus appellabitur x^y „**principalis ipsa** y**-potentia** *) **quantitatis** x“, ipsi autem y nomen cedet „**Exponentis.**“ Et quod ad idiomata potentiarum principalium (latissimo hoc sensu acceptarum) earumque logarithmorum naturalium praecipua attinet, sequentes hoc loco exponere juvabit leges universales, quarum equidem ditioni (ut per se patet) subditae sunt speciales eae, quae jam in pag. 400—403, 405, 410—414 expositae idiomata potentiarum principalium Exponentibus nonnisi realibus exhibuerunt:

1°) **Aequatio illa**

$$(70) \;\ldots\ldots\; x^y x^{y_1} \ldots x^{y_n} = x^{y+y_1+\cdots+y_n}$$

numquam non valet, ideoque non minus aequatio

$$(70') \;\ldots\ldots\; \frac{x^{y_1}}{x^y} = x^{y_1-y}$$

atque in specie haecce

$$(70'') \;\ldots\ldots\; \frac{1}{x^y} = x^{-y}.$$

---

*) Nihil equidem impedit, quominus Analysi item vindicetur signum ipsum $((x))^y$, etiamsi y imaginaria sit (caeteris, ut constat, in casibus omnibus hoc signum fuit acceptum et quidem eo, quem indicant aequ. (35) et (35′), sensu). Nihilominus tamen, donec Analysi forsitan usui cuidam fore videbitur, hoc signum supervacaneum (uti hactenus usque) censeri liceat.

Patet hoc quidem ex ipsa definitione (66) una cum aequ. (

2°) Quoties aequatio illa

$$(71) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad l(x^y) = ylx$$

obtineat, toties haec etiam rata est aequatio

$$(72) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (x^y)^{y_1} = x^{yy_1}.$$

Nam semper habetur

$$(x^y)^{y_1} = e^{y_1 l(x^y)}, \text{ secund. definitionem (66)},$$

ideoque

$$= e^{y_1 ylx}, \text{ quoties obtineat (71)},$$

quae quidem ipsa $e^{y_1 ylx}$ numquam non $= x^{yy_1}$ est, secund. nitionem (66).

Quibusnam autem casibus legitima sit (71), ut constet ali tenus, id juvat probari valere eam, certe

a) quoties, parte reali ipsius x haud negativâ, qu titas illa $\mu\tau + \nu l\varrho$ limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat, non

b) quoties, parte reali ipsius x negativâ, quanti $\mu(\tau+\pi) + \nu l\varrho$ limit. $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat.

Demonstr. Semper equidem ylx unum conficit ex $l((x^y))$, quippe quoniam x^y numquam non $= e^{ylx}$ est. Contendi autem hoc loco conficere eam ambobus, de quibus agitur, in bus principalem ipsum logarithmum $l(x^y)$.
Logarithmus ipsius x^y principalis, juxta definitionem, est

$$(73) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad l(x^y) = l(\pm R) + T\sqrt{-1},$$

R et T denotantibus (sicut in aequ. (56) immutatâ modo μ in et quidem, ab alterâ parte,

$$(74) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ylx = y[l(\pm\varrho) + \tau\sqrt{-1}].$$

Quod autem, secundum (68), habetur

$$x^y = (\pm\varrho)^y e^{y\tau\sqrt{-1}},$$

scilicet

$$= \varrho^y e^{y\tau\sqrt{-1}} = \varrho^{\mu+\nu\sqrt{-1}} \cdot e^{(\mu+\nu\sqrt{-1})\tau\sqrt{-1}},$$

α haud negativâ, et quidem

$$= (-\varrho)^y e^{y\tau\sqrt{-1}} = \varrho^{\mu+\nu\sqrt{-1}} \cdot e^{(\mu+\nu\sqrt{-1})(\tau+\pi)\sqrt{-1}},$$

α negativâ; propterea priori in casu obtinet

$$x^y = e^{\mu l\varrho - \nu\tau} \cdot e^{(\mu\tau + \nu l\varrho)\sqrt{-1}},$$

ideoque, quoties $\mu\tau + \nu l\varrho$ limitibus illis $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat, secundum (49) habetur

$$l(x^y) = \mu l\varrho - \nu\tau + (\mu\tau + \nu l\varrho)\sqrt{-1} = ylx \text{ casûs hujusce;}$$

atque in posteriori obtinet

$$x^y = e^{\mu l\varrho - \nu(\tau+\pi)} \cdot e^{[\mu(\tau+\pi)+\nu l\varrho]\sqrt{-1}},$$

ideoque, quoties $\mu(\tau+\pi)+\nu l\varrho$ hisce $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat (ex quo consequitur esse partem ipsius x^y realem haud negativam), habetur

$$l(x^y) = \mu l\varrho - \nu(\tau+\pi) + [\mu(\tau+\pi)+\nu l\varrho]\sqrt{-1} = ylx \text{ casûs hujusce.}$$

Q. E. D.

Quibusnam praeterea casibus rata sit ista aequatio (71) — ideoque etiam (72) — id (ubi forte sit opus) collatis inter se aequationibus (73) et (74) discerni licebit.

Nota. Ex allatis hoc loco patet, quoties obtineant ambae

$$l(x^y) = ylx, \quad l(x^{y_1}) = y_1 lx,$$

toties hanc quoque ratam esse aequationem

(75) . . . . $(x^y)^{y_1} = (x^{y_1})^y$:

et quidem rem ita se habere, certe

a) quoties, parte reali ipsius x haud negativâ, quantitatum illarum $\mu\tau+\nu l\varrho$ et $\mu_1\tau+\nu_1 l\varrho$ neutra limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ excedat, atque

b) quoties, negativâ ipsius x parte reali, quantitatum $\mu(\tau+\pi)+\nu l\varrho$ et $\mu_1(\tau+\pi)+\nu_1 l\varrho$ neutra ipsis $\pm\frac{\pi}{2}$ excedat,

scil. $y = \mu + \nu\sqrt{-1}$,

$y_1 = \mu_1 + \nu_1\sqrt{-1}$.

3°) Quoties aequatio illa

(58) . . . . $l(x) + l(x_1) + \ldots + l(x_n) = l(xx_1 \ldots x_n)$

obtinet, toties haec etiam rata est aequatio

(76) . . . . . . $x^y \cdot x_1^y \ldots x_n^y = (xx_1 \ldots x_n)^y$.

Nam semper habetur

$$x^y x_1{}^y \dots x_n{}^y = e^{y(lx + lx_1 + \dots + lx_n)},$$

secund. defin. (66) et aequ. (30), ideoque

$$= e^{yl(xx_1 \dots x_n)},$$

quoties obtineat (58), quae quidem ipsa numquam non $=(xx_1 \dots x)^y$ est, secund. definitionem (66).

De ipsâ autem legis (58) auctoritate, quantum hoc tempore satis esse videtur, in 2⁰) jam pag. 411. est allatum.

Sic ex. gr. valet aequatio

$$(76') \quad \dots \dots \quad x^y x_1{}^y = (xx_1)^y,$$

certe quoties, partibus realibus harum x et x_1 haud negativis, pars ipsa realis producti xx_1 haud negativa sit; nec non aequatio

$$(76'') \quad \dots \dots \quad x^y (-1)^y = (-x)^y,$$

quoties positiva fuerit x quâ partem realem.

4⁰). Quoties aequatio illa

$$(61) \quad \dots \dots \quad l(x_1) - l(x) = l\left(\frac{x_1}{x}\right)$$

obtineat, toties haec etiam rata est aequatio

$$(77) \quad \dots \dots \quad \frac{x_1{}^y}{x^y} = \left(\frac{x_1}{x}\right)^y.$$

(Id quod eâdem prorsus ratione ac in 2⁰) et 3⁰) probatur). De ipsâ autem legis (61) auctoritate, quantum hoc tempore satis esse videtur, in 3⁰) jam pag. 413. est allatum.

Sic ex. gr. valet aequatio

$$(77') \quad \dots \dots \quad \left(\frac{1}{x}\right)^y = x^{-y},$$

quoties haud negativa sit x quâ partem realem. Sin minus, neutiquam valet, nisi forte y realis fuerit ac numerice integra aut 0, id quod reverâ facillimo usque negotio eâdem, quem in pag. 403. secuti fuimus, viâ experiri licebit ratione habitâ relationum, quas secum fert (67), harum:

$$(67') \dots (-1)^y = e^{\pi y\sqrt{-1}} = e^{-\nu\pi}(\operatorname{Cos}\mu\pi + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\pi),$$

$$(-1)^{-y} = e^{-\pi y\sqrt{-1}} = e^{\nu\pi}(\operatorname{Cos}\mu\pi - \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\pi.$$

CAPUT II^{um}.

Quid in Analysi valeat signum

(1) . . . . $\mathrm{Log}_b(x)$.

1. Omnium primo juvabit, quod proxime antecedentibus intimo conjunctum est nexu, hoc solvi

Problema. Invenire quantitates eas z universas, quibus conditioni huic

(2) . . . . . $b^z = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ seu x (breviter)

fiat satis: b datam denotante quantitatem (0 atque 1 exceptis) *), α et β reales datas.

Definitioni (66) convenienter conditionem (2) sic licet describi

(2') . . . . $e^{zlb} = x$,

ex quâ patet extemplo, si fuerit x zéro, nullam omnino exsistere quantitatem (finitam) z, quâ fiat satis problemati **).

At ceteroquin semper aequatio (2') huic aequivalet, secund. §. 4. art. 1.,

$$z = \frac{l(x)}{lb},$$

quâ igitur ipsâ in genere solutum est problema.

Quantitatum, quibus aequationi (2) fiat satis, unaquaeque appellabitur „b-logarithmus quidam ipsius x“ nec non „logarithmus ipsius x quidam ex systemate baseos b“ ***):

---

*) Si foret $b=1$, ex relatione illâ $b^z = e^{zlb}$, i. e. heic $1^z = e^{zl(1)}$, patet tunc fore propositum ut invenirentur quantitates z universae eae, quibus conditioni fieret satis huic

$$e^{zl(1)} = x.$$

At talis quaepiam (ut plane apparet) inveniri non potest, nisi forte $x=1$ fuisset: et quidem satis tunc fit conditioni propositae z-valore quolibetcumque.

**) Etenim quis est, qui non videat nullam omnino exsistere quantitatem (finitam) $u+v\sqrt{-1}$ (u et v realibus), quâ conditioni huic $e^{u+v\sqrt{-1}} = 0$ fieret satis.

***) Omni absque negotio patet hanc definitionem ab iis, quae in partibus Analyseos praecedentibus de vocabulo „Logarithmo“ statuta sunt, minime discrepare; congruit e contrario iisdem perfecte.

et quidem formula universalis ea, quae in se cunctos hos con net ipsius x logarithmos, signo illo $\mathrm{Log}_b((x))$ nec non — du nullum adest erroris ex suppressâ baseos notulâ discrimen — levi hoc $\mathrm{Log}((x))$ *) erit intelligenda. Itaque, subjectâ quidem co ditione ut ne sit basis β zéro nec unitas (nec $x=0$), habetur

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{Log}_b((x)) = \frac{l((x))}{lb};$$

ex quâ patet, cunctos quantitatis cujusdam b-logarith mos eo modo comparari licere, ut eorum unico — quer potissimum eligi placuerit — addatur

$$(4) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{Log}_b((1)) = \frac{l((1))}{lb} = \pm\frac{2k\pi}{lb}\sqrt{-1},$$

i. e. addantur successive b-logarithmi omnes unitatis **)

Praeterea, ut patet, aequatio (3) suppeditat

$$(3') \quad \mathrm{Log}_b((x)) = \frac{l((\varrho)) + \theta\sqrt{-1}}{lb} = \mathrm{Log}_b((\varrho)) + \frac{\theta}{lb}\sqrt{-1},$$

θ denotante (uti adsolet).

Nota. Ex aequ. (3) consequitur, μ reali quâlibet (x haud zéro), semper obtinere

$$(5) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad b^{\mu \mathrm{Log}_b((x))} = ((x))^{\mu}.$$

Nam prius hoc membrum $= e^{\mu \mathrm{Log}((x)) . lb}$ est, secund. (66),
i. e. $= e^{\mu l((x))}$, secund. (3),
$= ((x))^{\mu}$, secund. (45).

2. Dum α (pars realis ipsius x) positiva est, quo niam tunc θ cooptari licet $\tau = \mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}$, aequatio (3) suppeditat

$$(6) \quad \mathrm{Log}_b((x)) = \frac{l((\varrho)) + \tau\sqrt{-1}}{lb} = \mathrm{Log}_b((\varrho)) + \frac{\tau}{lb}\sqrt{-1};$$

---

*) Itaque signum hoc $\mathrm{Log}_e((x))$ illi, quo antea usi fuimus, $l((x))$ aequi valet: id quod praeterea aequatio illa (3) proxime insequens commonstra

**) Nam unum recipe, quem potissimum valueris, ex b-logarithmis ipsius x: sit (breviter) $\mathfrak{L}(x)$. Qui huic respondet e-logarithmus ipsius x notul $\lambda(x)$ signetur. (Scilicet reverâ b-logarithmis quantitatis x suum cuique re spondere e-logarithmum ejusdem x, id ex aequ. (3) plane apparet). Ver convenienter iis, quae aequationem (42′) proxime insequuntur, haec obtine relatio

$$l((x)) = \lambda(x) + l((1)),$$

ideoque, secund. (3),

$$\mathrm{Log}_b((x)) = \frac{\lambda(x)}{lb} + \frac{l((1))}{lb} = \mathfrak{L}(x) + \mathrm{Log}_b((1)).$$

dum α negativa est, quoniam tunc θ cooptari licet $\tau+\pi$,

$$(6') \quad \mathrm{Log}_b((x)) = \frac{l((-\varrho)) + \tau\sqrt{-1}}{lb} = \mathrm{Log}_b((-\varrho)) + \frac{\tau}{lb}\sqrt{-1};$$

atque, dum $\alpha=0$ est, una valet aeque ac altera aequatio, quippe quoniam tunc θ cooptari licet ex arbitrio τ aeque ac $\tau+\pi$, salvo equidem pacto illo solito.

„Principali ipsius $\mathrm{Log}_b((x))$ valore" seu „b-logarithmo quantitatis x principali" ex iis, quas in se continet membrum posterius aequationis (3), quantitatibus eam ipsam, cui signum debetur $\frac{lx}{lb}$, intelligi juvabit: seu (aliter) unicum ex b-logarithmis eum, qui principali illi e-logarithmo $l(x)$ respondet. Hic ipse est cui signum illud $\mathrm{Log}_b(x)$ seu $\mathrm{Log}\,x$ erit reservatum *). Unde aequatio habetur ista

$$(7) \quad \mathrm{Log}_b(x) = \frac{lx}{lb} = \frac{l(\pm\varrho) + \tau\sqrt{-1}}{lb} = \mathrm{Log}_b(\pm\varrho) + \frac{\tau}{lb}\sqrt{-1},$$

scil. $-\varrho$, dum α negativa est, alioquin $+\varrho$; nec non, in specie,

$$(8) \; \ldots \ldots \begin{cases} \mathrm{Log}_b(1) = \dfrac{l(1)}{lb} = 0, \\ \mathrm{Log}_b(-1) = \dfrac{l(-1)}{lb} = \dfrac{\pi}{lb}\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Praeterea ex verbis aequationem (3) proxime insequentibus patet haberi semper

$$(9) \quad \ldots \quad \mathrm{Log}_b((x)) = \mathrm{Log}_b(x) + \mathrm{Log}_b((1));$$

atque ex aequ. ipsâ (7), dum α negativa est, obtinere istam

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{Log}_b(x) = \mathrm{Log}_b(-x) + \mathrm{Log}_b(-1),$$

nec tamen semper alioquin.

3. Quaestioni illi, „quibusnam in casibus realis sit datae cujusdam quantitatis logarithmus principalis", responsum jam facili negotio ab aequatione (7) ferri licebit, quippe quam (7), denotantibus

---

*) Nosmet hoc modo definitâ significatione notulae $\mathrm{Log}\,b(x)$ — quibuscumque ipsius x atque baseos b (praeter 0 et 1) valoribus — reverâ eum, quem huic signo utrâque harum x et b Numerum denotante in Elementis jam vindicarunt, sensum in integro reliquisse, id satis patet ex eo quod aequatio (7) in hoc casu singulari identica evadit. Principalis igitur Numeri cujusdam b-logarithmus, dum basis ipsa b Numerus est, is ipse est cui in Elementis nomen cessit „b-logarithmus Numeri." Et quidem „e-logarithmum principalem" definitionis jam nunc acceptae eam ipsam conficere quantitatem, cui in Cap. I. praecedente tributum fuit hoc nomen, id reverâ ex ipsâ patet definitione. Signum igitur $\mathrm{Log}\,e(x)$ huic lx aequivalet.

$\begin{cases} R \text{ modulum baseos,} \\ T \text{ ipsum Arc}\left(\mathrm{tg} = \dfrac{\text{Coëff. } \sqrt{-1} \text{ baseos}}{\text{parte baseos reali}}\right), \end{cases}$

sic licet describi

$$(7') \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{Log}_b(x) = \frac{lx}{lb} = \frac{l(\pm\varrho) + \tau\sqrt{-1}}{l(\pm R) + T\sqrt{-1}}$$

(denominatore semper finito nec $= 0$) **).

1⁰)

Parte reali ipsius x haud negativâ:

$$\mathrm{Log}_b(x) = \frac{l\varrho + \tau\sqrt{-1}}{l(\pm R) + T\sqrt{-1}}.$$

a) **Parte reali baseos haud negativâ**

habetur

$$\mathrm{Log}_b(x) = \frac{(l\varrho + \tau\sqrt{-1})(lR - T\sqrt{-1})}{(lR)^2 + T^2},$$

realis videlicet iis solis in casibus, quibus conditioni

$$\tau lR - Tl\varrho = 0,$$

seu huic

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad R^\tau = \varrho^T,$$

fuerit satisfactum. Et quidem tali in systemate unoquoque, cujus baseos R et T conditioni huic satisfaciant, haec ipsa

$$(12) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{lR . l\varrho + T . \tau}{lR . lR + T . T}$$

realem conficit $\mathrm{Log}_b(x)$ principalem.

b) **Parte reali baseos negativâ**

habetur

$$\mathrm{Log}_b(x) = \frac{(l\varrho + \tau\sqrt{-1})[lR - (T + \pi)\sqrt{-1}]}{(lR)^2 + (T + \pi)^2},$$

realis videlicet iis solis in casibus, quibus conditioni

$$\tau lR - (T + \pi)l\varrho = 0,$$

seu huic

$$R^\tau = \varrho^{T+\pi}, \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

fuerit satisfactum. Et quidem tali in systemate unoquoque, cujus baseos R et T conditioni huic satisfaciant, haec ipsa

$$\frac{lR . l\varrho + (T + \pi) . \tau}{lR . lR + (T + \pi) . (T + \pi)} \quad (14)$$

realem conficit $\mathrm{Log}_b(x)$ principalem.

Ex. gr. **Unitati systema quodlibet realem suppeditat, eundemque $= 0$, logarithmum principalem** (id quod jam supra aequatio illa (8) indicabat). **Alii cuique Numero ϱ**

**) Scilicet semper (uti supra est monitum) basis ipsa b haud $= 1$ (nec 0), ideoque lb semper quantitas finita haud $= 0$, esse putatur.

ea sola realem praebent logarithmum principalem systemata, quibus basis ipsa Numerus sit.

Nam posito $\tau=0$, conditio illa (11) in $Tl\varrho=0$, i. e. $T=0$, abit modulo R indeterminato relicto; at alteri (13), quippe quae (pos. $\tau=0$) in $(T+\pi)l\varrho=0$ abit, nullo modo satisfieri potest, dum ϱ haud $=1$ est.

20)

Parte reali ipsius x negativâ:

$$\mathrm{Log}_b(x)=\frac{l(\varrho)+(\tau+\pi)\sqrt{-1}}{l(\pm R)+T\sqrt{-1}}.$$

a) **Parte reali baseos haud negativâ**

habetur

$$\mathrm{Log}_b(x)=\frac{[l\varrho+(\tau+\pi)\sqrt{-1}][lR-T\sqrt{-1}]}{(lR)^2+T^2},$$

realis videlicet iis solis in casibus, quibus conditioni

$$(\tau+\pi)lR-Tl\varrho=0,$$

seu huic

$$(16)\ \ldots\ R^{\tau+\pi}=\varrho^T,$$

satis fuerit factum. Et quidem tali in systemate unoquoque, cujus baseos R et T conditioni huic satisfaciant, haec ipsa

b) **Parte reali baseos negativâ**

habetur

$$\mathrm{Log}_b(x)=\frac{[l\varrho+(\tau+\pi)\sqrt{-1}][lR-(T+\pi)\sqrt{-1}]}{(lR)^2+(T+\pi)^2},$$

realis videlicet iis solis in casibus, quibus conditioni

$$(\tau+\pi)lR-(R+\pi)l\varrho=0,$$

seu huic

$$R^{\tau+\pi}=\varrho^{T+\pi},\ \ldots\ (17)$$

satis fuerit factum. Et quidem tali in systemate unoquoque, cujus baseos R et T conditioni huic satisfaciant, haec ipsa

(16) ... $\dfrac{lR.l\varrho+T.(\tau+\pi)}{lR.lR+T.T}$ | $\dfrac{lR.l\varrho+(T+\pi).(\tau+\pi}{lR.lR+(T+\pi).(T+\pi}$

realem conficit $\mathrm{Log}_b(x)$ principalem. | realem conficit $\mathrm{Log}_b(x)$ palem.

Ex. gr. Quoniam, positâ $x=$ quant. negat. $-\varrho$ (id $\tau=0$), conditiones illae (15) et (17) in

$$(15') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \pi lR = Tl\varrho \text{ et } \pi lR = (T+\pi)l\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ($$

abeunt, facili exinde patent negotio *) sequentia:

Quantitati negativae $-\varrho$ (sive sit -1 sive alia piam) realem nullum aliud praebet logarithmum pr palem systema baseos realis, quam cui basis neg est ipsa illa quantitas $-\varrho$ (realis iste log. princi $=1$ est). Systematum vero basi imaginariae supers torum realem ipsi $-\varrho$ logarithmum principalem su ditat id unumquodque

a) cui basis, quâ partem realem haud negativa, ditioni satisfaciat huic

$$(15'') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad R^{\frac{1}{T}} = \varrho^{\frac{1}{\pi}},$$

nec non

b) cui basis, quâ partem realem negativa, condi satisfaciat huic

$$(17'') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad R^{\frac{1}{T+\pi}} = \varrho^{\frac{1}{\pi}}.$$

Quantitati igitur -1 realem ea sola, quibus mod baseos $=1$ sit, systemata praebent logarithmum cipalem: horum in unoquoque

$$\mathrm{Log}(-1) = \frac{\pi}{T} \text{ aut } \frac{\pi}{T+\pi}$$

---

*) Scilicet: 1°) Positâ $x=-1$, conditiones illae (15′) et (17′) in $\pi lR=0$, i. e. $R=1$, abeunt; — 2°) Sin vero x alia quaepiam quantitas negativa $-\varrho$,

tunc *A*) conditioni (15′) nullâ profecto basi reali satisfieri pote nam, posito $T=0$, conditio haec (15′) in $lR=0$ ($R=1$) quae quidem basin ipsam (quippe cui in (15′) haud ne cedere pars realis putatur) $=1$ postulat, quod autem gen seos jam antea semel omnino fuit abrogatum; — ideoque loco ipsius (15′) jure licet substitui (15″);

et quidem *B*) conditioni (17′) satisfieri aliter positione illâ $T=0$ (i. seos realis) nequire, nisi simul $R=\varrho$ (i. e. basis ipsa $=$ assumatur, patet per se: nec non licere loco ipsius (17′) stitui (17″).

est, prout haud negativa est aut negativa basis quâ partem realem.

Nota. Praeterea omnino non latet ex aequationibus hisce (11), (13), (15) et (17) ferri licere responsum quaestioni alteri huic, cujusnam sint generis quantitates, quibus realem datum quoddam systema suppeditet logarithmum principalem."

4. Quemadmodum basi e, secund. (52) universamque illam (66), sic quoque secund. definitionem (7) basi cuilibet b habetur in genere*)

$$(19) \quad \ldots\ldots \quad b^{y\,\mathrm{Log}\,b(x)} = x^y,$$

eamque ab caussam (verbis convenienter aequationem (3) proxime insequentibus) quemadmodum basi e, secund. (53) universamque illam (69), sic quoque in genere

$$(20) \quad \ldots \quad \mathrm{Log}\,b((x^y)) = y\,\mathrm{Log}\,b(x) + \mathrm{Log}\,b((1)).$$

Et quidem de caeteris principalium ex systemate quolibetcumque logarithmorum idiomatibus id rectâ ex definit. (7) consequitur, quoties ratae sint aequationes

$$\begin{cases} l(x^y) = ylx, \\ l(x)+l(x_1)+\ldots+l(x_n) = l(xx_1\ldots x_n),\ l(x)+l(-1) = l(-x), \\ l(x_1)-l(x) = l\left(\dfrac{x_1}{x}\right),\ l\left(\dfrac{1}{x}\right) = -lx \end{cases}$$

toties obtinere, quae ex iis mutato l in Log_b comparantur, aequationes.

Denique ex ipsâ definitione (2) patet tres illas, quae in pag. 414. commemorabantur, aequationes omni absque exceptione legitimas permanere, etiamsi in novas has immutantur:

$$\begin{cases} \mathrm{Log}_b((x)) + \mathrm{Log}_b((x_1)) + \ldots + \mathrm{Log}_b((x_n)) = \mathrm{Log}_b((xx_1\ldots x_n)), \\ \mathrm{Log}_b((x_1)) - \mathrm{Log}_b((x)) = \mathrm{Log}_b\left(\left(\dfrac{x_1}{x}\right)\right), \\ \mathrm{Log}_b\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = -\mathrm{Log}_b((x)). \end{cases}$$

*) Nam $b^{y\,\mathrm{Log}\,x} = e^{y\,\mathrm{Log}\,x\,.\,lb}$ est, secund. (66), i. e. $= e^{ylx}$ secund. (7), $= x^y$ secund. (66).

N O T A E.

Nota I.

(Vid. pag. 395.)

Ex hisce jam patet licere signum illud $(\beta\sqrt{-1})^\mu$, ubi occurrat, ex arbitrio interpretari per „principalem separatae illius quantitatis $\beta\sqrt{-1}$ potentiam" aut per „limitem, in quem $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ — (α positivâ) — convergit decrescente α indefinite", minime vero (μ quâlibet) per limitem, in quem $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ — α negativâ — convergit decrescente valore ipsius α numerico indefinite, certe dum β negativa est: qui quidem limes novissimus (ut supra monebatur in „Observ." pag. 393.) est

$$(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\sqrt{\beta^2})^\mu\left(\operatorname{Cos}\frac{3\mu\pi}{2}+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\frac{3\mu\pi}{2}\right),$$

at vero $(\beta\sqrt{-1})^\mu$, dum β negativa est, breviter denotaret

$$(b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\sqrt{\beta^2})^\mu\left(\operatorname{Cos}\frac{\mu\pi}{2}-\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\frac{\mu\pi}{2}\right),$$

quarum alteram ab alterâ, nisi forte μ integra numerice aut 0 fuerit, discrepare plane apparet.

Propterea, si cui nobiscum*) placuerit signo illi x^μ, etiamsi x negativa fuerit quâ partem realem, admisso notionem in hoc casu subjicere istam

$$(-\varrho)^\mu(\operatorname{Cos}\mu\tau+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\tau),$$

haud latet omnino oportere eum propositioni huic „Aequatio illa

$$(c) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu=(-\varrho)^\mu(\operatorname{Cos}\mu\tau+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\tau)$$

numquam non valet, dum α negativa est" nullam, nisi quae his ipsis verbis „α negativâ" fuit expressa, notionem intelligere subjectam.

Sin vero de $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$, α negativâ, nihil aliud statui liceret, quam quid in ipso etiam limite 0 (in quem α illa negativa, decrescente valore suo numerico indefinite, tendit) sibi constaret, vel potius (ut aperte loquamur): si Analysi hoc uti signo $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$, dum α negativa est, haud alio liceret pacto, nisi quantitas, cui hoc vindicaretur signum, decrescente valore ipsius α numerico indefinite in eundem ipsa convergeret limitem ac ea demum quantitas, cui, dum α positiva est, addictum fuerit hoc signum $\alpha+\beta\sqrt{-1}$; profecto inde Cauchyanum, necesse est conseque-

---

*) Vid. pag. 392. praecedentem.

tetur consilium hujus signi x^μ pro a negativâ ex Analysi plane tollendi *), certe donec placuerit hoc signo x^μ quampiam denotari quantitatum in formulâ

$$(d) \quad ((x))^\mu = \varrho^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\vartheta + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\vartheta)\,((1))^\mu$$

comprehensarum, quarum (ut patet) unicuique forma haecce

$$(e) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varrho^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\vartheta + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\vartheta),$$

ϑ denotante arcuum quemdam realium eorum, quorum Sin. et Cos. conditioni illi

$$(f) \quad \ldots\ldots \quad \varrho(\mathrm{Cos}\,\vartheta + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\vartheta) = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

satisfaciant **).

---

*) Cauchy (Exercices de Mathemat. T. I. pag. 2.) rem his fere verbis expediendam curavit: Admisimus nos quidem hoc signum x^μ, quo breviter exprimatur quantitatum illarum

$$((x))^\mu = \varrho^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau)\,((1))^\mu,$$
$$(x \text{ positivâ quà parti reali}),$$

ea, quae positioni $k=0$ in $((1))^\mu$ debetur, h. e.

$$x^\mu = \varrho^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau).$$

Jam vero si cui insuper hoc ipso signo x^μ, dum x negativâ gaudet parte reali, licere uti videretur, eum quidem in finem ut breviter exprimeretur quantitatum

$$((x))^\mu, \text{ i. e. (in hoc casu) } \varrho^\mu[\mathrm{Cos}\,\mu(\tau+\pi) + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu(\tau+\pi)]\,((1))^\mu,$$

ea, quae positioni illi $k=0$ in $((1))^\mu$ deberetur, h. e.

$$x^\mu = \varrho^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau)(\mathrm{Cos}\,\mu\pi + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi);$$

profecto, „quoniam harum utramque aequationum pro x tali, cui pars cedat realis $=0$ atque Coëfficiens ipsius $\sqrt{-1}$ negativa, sibi constare oporteret", concedendum illi esset necesse denotare signum $(-\sqrt{-1})^\mu$ non solum

$$\mathrm{Cos}\frac{\mu\pi}{2} - \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\frac{\mu\pi}{2},$$

sed etiam

$$(\mathrm{Cos}\frac{\mu\pi}{2} + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\frac{\mu\pi}{2})(\mathrm{Cos}\,\mu\pi + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi),$$

qua tamen ex ambiguitate, ut patet, Analysi sane „grave inconvénient" accideret.

Dissimulari non potest, hoc „quoniam harum utramque …… oporteret" sufficientem minime conficere rationem signi x^μ, dum x negativa gaudet parte reali, ex Analysi plane tollendi.

**) Hujuscemodi adesse necessitatem, siquidem ϑ cooptari placeat τ et $\tau+\pi$, pront positiva est aut negativa α, jam supra fuit expertum. At alios

Quandoquidem vero, ut tempora nunc sunt Analyseos severa, ita omnino adsit periculi, ne, si quis forte statuerit quempiam s

---

forsan arcus quospiam ϑ' et ϑ'' vel potius (ut accurate loquamur) $\vartheta'($ et $\vartheta''(\alpha,\beta)$, per quos fiat satis conditionibus illis

$$(\alpha)\begin{cases}\varrho[\operatorname{Cos}\vartheta'(\alpha,\beta)+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\vartheta'(\alpha,\beta)]=\alpha+\beta\sqrt{-1}, \text{ dum } \alpha \text{ positiv}\\ \text{et}\\ \varrho[\operatorname{Cos}\vartheta''(\alpha,\beta)+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\vartheta''(\alpha,\beta)]=\alpha+\beta\sqrt{-1}, \text{ dum } \alpha \text{ neg}\end{cases}$$

deprehendi liceat tales, quibus ratae reddantur aequationes

$$(\beta)\;\ldots\ldots\begin{cases}(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu=\varrho^\mu(\operatorname{Cos}\mu\vartheta'+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\vartheta'),\\ (\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu=\varrho^\mu(\operatorname{Cos}\mu\vartheta''+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\vartheta''),\end{cases}$$

illa, inquam, pro α positivâ, haec autem pro α negativâ, atque a m insuper pro $\alpha=0$, h. e.

$$\begin{aligned}(\gamma)\;\ldots\ (\beta\sqrt{-1})^\mu&=(\sqrt{\beta^2})^\mu.[\operatorname{Cos}\mu\vartheta'(0,\beta)+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\vartheta'(0,\beta)]\\ &=(\sqrt{\beta^2})^\mu.[\operatorname{Cos}\mu\vartheta''(0,\beta)+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\vartheta''(0,\beta)]\,?\end{aligned}$$

Qui, si tales forsitan exsistant, arcus ϑ' et ϑ'' ita demum comp sint necesse, secundum aequationes (γ), ut non solum

$$\begin{cases}\operatorname{Cos}\vartheta'(0,\beta)=\operatorname{Cos}\vartheta''(0,\beta),\\ \operatorname{Sin}\vartheta'(0,\beta)=\operatorname{Sin}\vartheta''(0,\beta),\end{cases}$$

sed etiam, μ reali quâlibet ac rationali,

$$\begin{cases}\operatorname{Cos}\mu\vartheta'(0,\beta)=\operatorname{Cos}\mu\vartheta''(0,\beta),\\ \operatorname{Sin}\mu\vartheta'(0,\beta)=\operatorname{Sin}\mu\vartheta''(0,\beta),\end{cases}$$

ideoque ut harum utrique differentiarum

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta'(0,\beta)-\vartheta''(0,\beta)\\ \text{et}\\ \mu[\vartheta'(0,\beta)-\vartheta''(0,\beta)]\end{array}\right\}$$

alterutra cedat formarum $\pm 2k\pi$ communis (k num. integ. 0 inclus.); qu equidem aliter fieri non posse apparet, nisi ita fuerint isti $\vartheta'(\alpha,\beta)$ et $\vartheta''(\alpha,$ comparati, ut pro $\alpha=0$ in plenam reducantur identitatem

$$(\delta)\;\ldots\ldots\ldots\ \vartheta'(0,\beta)=\vartheta''(0,\beta).$$

Constat autem solos, per quos satis demum fieri p o s s i t aequationibus (α arcus $\vartheta'(\alpha,\beta)$ et $\vartheta''(\alpha,\beta)$ comprehensos esse in

$$\begin{cases}\tau\pm 2k\pi, \text{ dum } \alpha \text{ positiva est aut } 0,\\ \text{et}\\ \tau+\pi\pm 2k'\pi, \text{ dum } \alpha \text{ negativa est aut } 0,\end{cases}$$

(k et k' num. int. 0 incl.)

$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ — (α negativa) — tribuendum esse sensum, injunctam illi esse videatur officium, ut de continuatione hujusce sensus in ipso etiam

---

scil. salvo, quod in Theoremate pag. 396. exposuimus, reservato de τ, dum

$$\alpha=0 \text{ est};$$

ideoque soli, quibus finem propositum assequi demum liceat, arcus $\vartheta'(\alpha,\beta)$ et $\vartheta''(\alpha,\beta)$ in his contineantur, necesse est,

$$1^\circ)\ \vartheta'(\alpha,\beta)=\tau+2k\pi,\ \vartheta''(\alpha,\beta) \text{ aut } =\tau+(2k'+1)\pi$$
$$\text{aut } =\tau-(2k'-1)\pi,$$

$$2^\circ)\ \vartheta'(\alpha,\beta)=\tau-2k\pi,\ \vartheta''(\alpha,\beta) \text{ aut } =\tau+(2k'+1)\pi$$
$$\text{aut } =\tau-(2k'-1)\pi,$$

denotantibus jam k et k' numeros integros (0 incl.) eos, quibus acceptis conditioni (δ) satisfaciant $\vartheta'(0,\beta)$ et $\vartheta''(0,\beta)$, praecedentibus debiti, isti:

$$1^\circ)\ \vartheta'(0,\beta)=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \vartheta''(0,\beta) \text{ aut } =\mp\frac{\pi}{2}+(2k'+1)\pi$$
$$\text{aut } =\mp\frac{\pi}{2}-(2k'-1)\pi,$$

$$2^\circ)\ \vartheta'(0,\beta)=\pm\frac{\pi}{2}-2k\pi,\ \vartheta''(0,\beta) \text{ aut } =\mp\frac{\pi}{2}+(2k'+1)\pi$$
$$\text{aut } =\mp\frac{\pi}{2}-(2k'-1)\pi$$

(scil. signis superioribus aut inferioribus, prout β positiva est aut negativa):

quod equidem reverâ novissimum de k et k' reservatum id efficit, ut in minorem contrahatur numerus arcuum $\vartheta'(\alpha,\beta)$ et $\vartheta''(\alpha,\beta)$ aptorum praecedentium: id quod jam facili negotio perspici licebit:

a) Quo finem propositum assequi liceat acceptis

$$\left\{\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau+2k\pi\\ \text{et}\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau+(2k+1)\pi,\end{array}\right.$$

id certe requiritur, vi conditionis illius (δ), ut accipiatur $k'=k$, dum β positiva est, et quidem $=k-1$, dum β negativa;

tum *b*) quo finem propositum assequi liceat acceptis

$$\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau+2k\pi$$
et
$$\vartheta''(\alpha,\beta)=\tau-(2k'-1)\pi,$$

id certe requiritur, ut accipiatur $k'=-k$ (i. e. utraque $=0$), dum β positiva est, et quidem $=-(k-1)$, dum β negativa; et sic porro.

Quae si jam colligantur experta atque deinceps ex quatuor illis combinationibus

Quandoquidem vero, ut tempora nunc sunt Analyseos severa, omnino absit periculum, ne, si quis forte statuerit quempia

---

formas [illegible] quosque ϑ' et ϑ'' vel potius (ut accurate loquamur) et $\vartheta''(\alpha,\beta)$, per [illegible] conditionibus illis

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{l}\rho[\mathrm{Cos}\,\vartheta'(\alpha,\beta)+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\vartheta'(\alpha,\beta)]=\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \text{dum } \alpha \text{ p}\\ \text{et}\\ \rho[\mathrm{Cos}\,\vartheta''(\alpha,\beta)+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\vartheta''(\alpha,\beta)]=\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \text{dum}\end{array}\right.$$

deprehendi [illegible] tales, quibus ratae reddantur aequationes

$$(\beta)\ \ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu=\rho^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\vartheta'+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\vartheta').\\ (\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu=\rho^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\vartheta''+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\vartheta''),\end{array}\right.$$

illa, inquam, pro α positivâ, haec autem pro α negativâ, atque insuper pro $\alpha=0$, h. e.

$$(\gamma)\ \ldots\ (\beta\sqrt{-1})^\mu=(\sqrt{\beta^2})^\mu.[\mathrm{Cos}\,\mu\vartheta'(0,\beta)+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\vartheta'(0,\beta)$$
$$=(\sqrt{\beta^2})^\mu.[\mathrm{Cos}\,\mu\vartheta''(0,\beta)+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\vartheta''(0,\beta)$$

Qui, si tales forsitan exsistant, arcus ϑ' et ϑ'' ita demum sint necesse, secundum aequationes (γ), ut non solum

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Cos}\,\vartheta'(0,\beta)=\mathrm{Cos}\,\vartheta''(0,\beta),\\ \mathrm{Sin}\,\vartheta'(0,\beta)=\mathrm{Sin}\,\vartheta''(0,\beta).\end{array}\right.$$

sed etiam, μ reali quâlibet ac rationali,

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Cos}\,\mu\vartheta'(0,\beta)=\mathrm{Cos}\,\mu\vartheta''(0,\beta),\\ \mathrm{Sin}\,\mu\vartheta'(0,\beta)=\mathrm{Sin}\,\mu\vartheta''(0,\beta);\end{array}\right.$$

ideoque ut harum utrique differentiarum

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta'(0,\beta)-\vartheta''(0,\beta)\\ \text{et}\\ \mu[\vartheta'(0,\beta)-\vartheta''(0,\beta)]\end{array}\right\}$$

alterutra cedat formarum $\pm 2k\pi$ communis (k num. integ. 0 inclus equidem aliter fieri non posse apparet, nisi ita fuerint isti $\vartheta'(\alpha,\beta)$ et comparati, ut pro $\alpha=0$ in plenam reducantur identitatem

$$(\delta)\ \ldots\ldots\ldots\ \vartheta'(0,\beta)=\vartheta''(0,\beta).$$

Constat autem solos, per quos satis demum fieri possit aequation arcus $\vartheta'(\alpha,\beta)$ et $\vartheta''(\alpha,\beta)$ comprehensos esse in

$$\left\{\begin{array}{l}\tau\pm 2k\pi,\ \text{dum } \alpha \text{ positiva est aut } 0,\\ \text{et}\\ \tau+\pi\pm 2k'\pi,\ \text{dum } \alpha \text{ negativa est aut } 0,\end{array}\right.$$
$$(k \text{ et } k' \text{ num. int. } 0 \text{ incl.})$$

ambiguum Analysis; e contrario emolumenta, quae hoc signo admisso contingant Analysi, totidem certe quot excluso incommodo percenseri licebit.

(*Ea, quae restant* *), *alio quodam tempore sequentur.*)

Nihiominus ea nobis permanet immota sententia, quae supra in contextu dicebatur, tollendum plane esse (uti placuit Cauchy) ex Analysi signum illud x^μ pro α negativâ, siquidem Analysi hoc uti signo tunc (i. e. α negativa) alio non liceret pacto, nisi quantitas, cui hoc vindicaretur signum, decrescente valore ipsius α numerico indefinite in eundem ipsa convergeret limitem ac ea demum quantitas, cui, dum α positiva est, addictum fuisset hoc signum x^μ. Nam sive (β') admissam fueris sive (β'') — solas, inquam, quibus admissis quem diximus novissime finem assequi demum liceat —; in aliud quoddam incidis majoris sane impedimenti incommodum: accidit nempe ut, cui (dum α negativa est) addictum fuit tali modo signum x^μ, quantitas decrescente valore ipsius β numerico indefinite in diversos ipsa tendat duos limites, prout ex plagâ positivâ aut negativâ in 0 contenderit haec β: adeo ut (A Numerum denotante), si forte (β') admitti placuerit, concedendum foret

$(-A)^\mu$ significare non solum

$$A^\mu(\mathrm{Cos}\,2k\mu\pi+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,2k\mu\pi)(\mathrm{Cos}\,\mu\pi+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi),$$

sed etiam

$$A^\mu(\mathrm{Cos}\,2k\mu\pi+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,2k\mu\pi)(\mathrm{Cos}\,\mu\pi-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi),$$

quippe quarum altera limitem conficit, in quem convergente β positivâ in 0, altera in quem convergente β negativâ in 0, tendit ipsa $(-A+\beta\sqrt{-1})^\mu$ ex formulâ (β') definita; et quidem si potius placuerit (β'') admitti, ejusdem plane generis incommodum adforet.

Quod quoniam incommodum, ut plane apparet, majoris admodum est impedimenti quam prius illud, ex acceptâ definitione istâ

$$x^\mu=(\pm\varrho)^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\tau+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau)$$

prout α haud negativa est aut negativa

oriundum; propterea nos hanc quidem ipsis (β') et (β'') praeferendam putavimus, opinati praeterea nec injunctum nobis esse officium nec veniam quidem datam ex Analysi, ob indicatum (si ita demum vocabitur) incommodum, signi x^μ pro α negativa tollendi.

*) Quae heic jam allata sunt, ea conficiunt omnia, quae de signis x^y et $\mathrm{Log}_b(x)$ in Actis Acad. Scient. Stockholm. et quidem Dissertatione tituli praecedentibus superscripti referenda nos quidem curavimus. Quae in hac Dissert. occurrunt caetera non nisi signa illa $\mathrm{Sin}\,x$ et $\mathrm{Cos}\,x$, $\mathrm{Arcsin}\,x$ et $\mathrm{Arccos}\,x$ spectant.

---

limite $\alpha=0$ spondeat; propterea nec sane est timendum, ne, quem a[...] visum fuit oportere signo x^μ (α negativâ) vindicari, sensu indicat[...]

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau+2k\pi,\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau+(2k'+1)\pi;\end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau+2k\pi,\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau-(2k'-1)\pi;\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau-2k\pi,\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau+(2k'+1)\pi;\end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau-2k\pi,\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau-(2k'-1)\pi\end{array}\right.$$

excludantur eae, quibus acceptis ut finem propositum assequi liceret, id requisitum ut acciperetur k' quantitas negativa; perfacili exinde pateb[...] gotio superesse, quibus finem hunc assequi liceat, nonnisi hasce:

dum β positiva est:

$$\text{aut}\left\{\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau+2k\pi,\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau+(2k+1)\pi,\end{array}\right\} \text{ aut } \left\{\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau-2k\pi,\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau-(2k-1)\pi\end{array}\right.$$

dum β negativa est:

$$\text{aut}\left\{\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau+2k\pi,\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau+(2k-1)\pi,\end{array}\right\} \text{ aut } \left\{\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau-2k\pi,\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau-(2k+1)\pi\end{array}\right.$$

Quod igitur soli hi sunt ϑ'- et ϑ''-valores, quibus ratae dem[...] **possint** aequationes (β), illa (inquam) pro α positivâ, haec autem negativâ, atque **ambae** simul pro $\alpha=0$; propterea sufficit,

(β')
dum α positiva est,
$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ cooptari $\rho^\mu\{\mathrm{Cos}\,\mu(\tau+2k\pi)+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu(\tau+2[...]$
dum α negativa est,
$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ cooptari
$\rho^\mu\{\mathrm{Cos}\,\mu[\tau+(2k\pm1)\pi]+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu[\tau+(2k\pm1)\pi]\}$
prout β positiva est aut negativa,

vel etiam

(β'')
dum α positiva est,
$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ cooptari $\rho^\mu\{\mathrm{Cos}\,\mu(\tau-2k\pi)+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu(\tau-[...]$
dum α negativa est,
$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ cooptari
$\rho^\mu\{\mathrm{Cos}\,\mu[\tau-(2k\mp1)\pi]+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu[\tau-(2k\mp1)\pi]\}$
prout β positiva est aut negativa,

quo cum assequaris finem ut, quae signo hoc $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ denota[...] quantitas decrescente valore ipsius α numerico indefinite ipsa in eunde[...] positiva fuerit sive negativa α, tendat limitem: et quidem (ut facile [...] pertu) nil refert, quemvis potissimum ipsi k tribueris numeri integri [...] clus.) valorem —; nec tamen ullis omnino aliis hunc assequi licet [...] [Accepto $k=0$ ambae, ut patet, in unam coëunt (β') et (β'')].

Dum in eo res vertitur, ut determinetur, cuinam potissimum ex μ-potentiis (μ reali) quantitatis illius $x(=\alpha+\beta\sqrt{-1})$ innumeris hisce

$$(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ((x))^\mu = \varrho^\mu(\text{Cos}\,\mu\theta + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\theta)$$

[θ **hoc loco**, salvis solummodo ambabus illis $\begin{pmatrix}\text{Cos}\,\theta=\alpha\\ \text{Sin}\,\theta=\beta\end{pmatrix}$, indeterminato relicto] singulare cedat signum x^μ nec non — uti nobis quidem visum fuit — nomen „μ-**potentia principalis**"; ex **praecedentibus** equidem Analyseos partibus arbitrio usque relicta est res *tota*, si modo ita definiatur haec notio

$$(b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^\mu = \varrho^\mu(\text{Cos}\,\mu\vartheta + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\vartheta)$$

(ϑ breviter **debitum** ipsum θ-valorem denotante), ut,

1) pro $x=$ Numero A, in A^μ ipsam Elementorum

atque,

2) pro $\left\{\begin{matrix}x=-1\\ \mu=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$, in $(-1)^{\frac{1}{2}}$ seu $\sqrt{-1}$

reducatur hoc membrum posterius (b). Admonere heic juvat ambabus his rite satisfieri conditionibus, sive Cauchyana (nova illa quidem) sive nostra cooptetur determinatio ipsius ϑ: et quidem multis praeterea, quin immo innumeris, aliis ipsius ϑ determinandi modis ita fieri posse.

Sin vero ad ea simul, quae **sequentibus** Analyseos partibus futura sint consectaria ex hac definitione, advertitur animus; primum id quidem sese offert optandum, ut quae demum cooptata fuerit quantitas (b) seu $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ talem confectura sit ipsarum α et β functionem, cui nulla accidat, variatis licet α et β quomodocumque, solutio continuitatis, quaequae sit μ forte quantitas realis. Talem vero nullum omnino inveniri posse ϑ-valorem, cujus beneficio compotes hujusce voti fiamus, id ut rationibus naturae rei debitis universis argui quidem liceat, tamen in praesenti sequentia solummodo, eademque ut per se manifesta ita ad rem dirimendam prae ceteris idonea, singularia attulisse argumenta sufficiet.

Valorem ipsius ϑ, si quis exsistat, cujus beneficio compotes nos fieri liceat voti jam nunc commemorati, duplici huic (ut jam caeteras praetermittamus) satisfacere oportebit conditioni ut (A et B **Numeros** denotantibus)

1°) α^μ **communis ambabus his** $(\alpha\pm B\sqrt{-1})^\mu$ **futura sit limes decrescente** B **in** 0 **indefinite**, atque

2°) $(\beta\sqrt{-1})^\mu$ **communis ambabus his** $(\pm A+\beta\sqrt{-1})^\mu$ **futura sit limes decrescente** A **in** 0 **indefinite**.

Verumenimvero in „Nota I" jam proxime praecedente evidenter nos quidem probavimus eo, quo **solo** finem illum 2°) assequi liceat, modo ipsius ϑ determinandi alterum illum 1°) — certe α negativâ — non posse attingi. Id quod reverâ sufficit, ut plane apparet.

Quod si, uti jam nunc constat perfecte, fieri non potest ut talem inveniri liceat ϑ-valorem, cujus beneficio compotes quod supra diximus voti fiamus; id deinceps sese praebet optandum, ut ϑ talis cooptetur, quo **alterutrum** certe propositorum illorum 1°) et 2°) attingi liceat, quippe quoniam ne haec quidem **ambo simul** consequi ullo modo pote-

Postscriptum.

Anno jam praecedente 1846 vix duas partes provecto, nondum in fin perducto negotio typis Suecanis exprimendae (in Actis Acad. Sci Stockholm.) Dissertationis, cujus ea, quae heic Latine reddita sunt, p tem explent majorem — (praeterlapso quidem post recitatam in Acade Dissertationem anni unius spatio) —, mirum id mihi contigit gaudii voluptatis, ut popularis quidam, Parisiis cum Cauchy ipso collocut redux inde mandatis convenienter, quae sibi ab eo data fuerant*), cert rem me fecerit, quod princeps ille Geometra vix bene praeterlapso te pore has ipsas Analyseos partes retractandas adgressus signorum int dictis, quorum in praecedentibus (pag. 383. et 384.) facta e mentio, haudquaquam opus esse Analysi, ipse quidem ja fuerat expertus. Mense demum Decembris vixdum elapso perscrip jam fere omnibus, quae huic „postscripto" praecedunt, schedulas cepi extremas Tomi IIIi operis praeclari „Exercices d'Analyse de phys. mathématique", quibus Cauchy perill. rem suo m tractatam in medium proferendam curavit. Quibus ex schedulis qu comperi non omnibus omnino numeris congruere definitiones, novas il quidem, Cauchyanas cum meis: at plurimum tamen referat, ut Ana seos inter cultores de rebus hujusce naturae, ipsis inquam quibus inni tur aedificium Analyseos fundamentis, perfecte conveniat; non poss quin breviter heic praecipua, quae discrepantiam istam constituunt, m menta exponam, sperans fore ut rem demum accurate explicatam ma festamque eo redditam perfacili tandem negotio dirimi in sempiter liceat.

Quâ tamen in expositione (ut decet) nonnisi iis, quae signa ill et Log $\delta(x)$ spectant, hoc loco propositis pauca, quae de signis illis sin x et Arccos x definiendis admonere voluerim, in aliud tempus — nempe data mihi fuerit occasio caeteras Dissertationis meae partes, tine quidem redditas huic „Archivo" offerendi — differo **).

---

*) Quorum videlicet mandatorum ansam dederat Nota quaedam pag. 12. Commentationis nostrae cujusdam titulo „Doctrinae seriei infinit. Exercitationes, P. Ima" subscriptae, cujus paullo ant lustrandae copia Illustr. Cauchy data fuerat. Quâ quidem in Nota n ter ea, quae in Dissertatione praesenti signa illa x^y et Log $\delta(x)$ spe paucis indicata feceramus.

**) Hoc tamen loco non possum quin obiter admoneam laborare partem Commentationis Cauchyanae et quidem nominatim pag. 385. gra quodam calami lapsu. Scilicet quoniam, dum $l=0$ atque s numeri ponuntur, formula illa S in $\sqrt{s^2}$ (nec semper, uti loco cit. contendit Ill Auctor, in s) abit, exinde consequitur loco formulae (37) substitui opo memorabilem istam

$$\operatorname{Arccos}\left(\frac{s}{\sqrt{s^2}}\right) \mp \sqrt{-1}\, l\left(\sqrt{s^2}+\sqrt{s^2-1}\right).$$

Dum in eo res vertitur, ut determinetur, cuinam potissimum ex
otentiis (μ reali) quantitatis illius $x (= \alpha + \beta \sqrt{-1})$ innumeris hisce

$$z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ((x))^{\mu} = \rho^{\mu} (\operatorname{Cos} \mu\theta + \sqrt{-1} \operatorname{Sin} \mu\theta)$$

hoc loco, salvis solummodo ambabus illis $\begin{pmatrix} \operatorname{Cos} \theta = \alpha \\ \operatorname{Sin} \theta = \beta \end{pmatrix}$, indetermi- relicto] singulare cedat signum x^{μ} nec non — uti nobis quidem visum — nomen „μ-potentia principalis"; ex praecedentibus idem Analyseos partibus arbitrio usque relicta est res tota, si modo definiatur haec notio

$$) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^{\mu} = \rho^{\mu} (\operatorname{Cos} \mu\vartheta + \sqrt{-1} \operatorname{Sin} \mu\vartheta)$$

breviter debitum ipsum θ-valorem denotante), ut,

1) pro $x =$ Numero A, in A^{μ} ipsam Elementorum

re,

2) pro $\left\{ \begin{matrix} x = -1 \\ \mu = \frac{1}{2} \end{matrix} \right\}$, in $(-1)^{\frac{1}{2}}$ seu $\sqrt{-1}$

catur hoc membrum posterius (b). Admonere heic juvat ambabus rite satisfieri conditionibus, sive Cauchyana (nova illa quidem) sive ra cooptetur determinatio ipsius ϑ: et quidem multis praeterea, quin o innumeris, aliis ipsius ϑ determinandi modis ita fieri posse.

Sin vero ad ea simul, quae sequentibus Analyseos partibus futura consectaria ex hac definitione, advertitur animus; primum id quisese offert optandum, ut quae demum cooptata fuerit quantitas (b) $(\alpha + \beta \sqrt{-1})^{\mu}$ talem confecturâ sit ipsarum α et β functionem, cui a accidat, variatis licet α et β quomodocumque, solutio continuitatis, quae sit μ forte quantitas realis. Talem vero nullum omnino inveposse ϑ-valorem, cujus beneficio compotes hujusce voti fiamus, id ationibus naturae rei debitis universis argui quidem liceat, tamen in senti sequentia solummodo, eademque ut per se manifesta ita ad rem mendam prae ceteris idonea, singularia attulisse argumenta sufficiet.

Valorem ipsius ϑ, si quis exsistat, cujus beneficio compotes nos liceat voti jam nunc commemorati, duplici huic (ut jam caeteras termittamus) satisfacere oportebit conditioni ut (A et B Numeros stantibus)

1°) α^{μ} communis ambabus his $(\alpha \pm B \sqrt{-1})^{\mu}$ futura sit es decrescente B in 0 indefinite, atque

2°) $(\beta \sqrt{-1})^{\mu}$ communis ambabus his $(\pm A + \beta \sqrt{-1})^{\mu}$ futura limes decrescente A in 0 indefinite.

Verumenimvero in „Nota I" jam proxime praecedente evidenter nos em probavimus eo, quo solo finem illum 2°) assequi liceat, modo is ϑ determinandi alterum illum 1°) — certe α negativâ — non posse agi. Id quod reverâ sufficit, ut plane apparet.

Quod si, uti jam nunc constat perfecte, fieri non potest ut talem inri liceat ϑ-valorem, cujus beneficio compotes quod supra diximus fiamus; id deinceps sese praebet optandum, ut ϑ talis cooptetur, alterutrum certe propositorum illorum 1°) et 2°) attingi liceat, pe quoniam ne haec quidem ambo simul consequi ullo modo pote-

ris. At, utrum potissimum? Tali de re ne ullum quidem ho pore relictum esse locum dubitandi, id jure nobis licitum esse dere videtur. Etenim quis est, cui non sit persuasum Analysi majora profectura esse emolumenta ex tali institutione, quá lice lem (plerumque) illam

$$\alpha^{\mu}$$

censeri limitem ambarum $(\alpha \pm B\sqrt{-1})^{\mu}$ communem, quam quae ill contingant ex venia imaginariam (longe plerumque)

$$(\beta\sqrt{-1})^{\mu}$$

censendi limitem ambarum $(\pm A + \beta\sqrt{-1})^{\mu}$? *)

Quid plura? In hoc tamen ipso momentum vertitur differentia Cauchyanam nostramque ϑ-valoris determinandi rationem, quod nostrá admissá definitione ipsius x^{μ} propositum illa attingatur, Cauchyaná vero non attingatur: id quod, maximi momenti rem, jam paucis explicare conabimur.

A) Nobis, prout α positiva aut negativa, erat (β reali quálib

$$(c) \ldots \quad (\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\mu} = (\pm\varrho)^{\mu}(\mathrm{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau),$$

$$\tau \text{ denot. } \mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\alpha},$$

ex quá patet extemplo

$$\alpha^{\mu}$$

conficere limitem, in quem tendit $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\mu}$ convergente β (p an negativá, nil refert) in 0 indefinite.

B) Cauchyaná ex definitione habetur

$$(d) \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\mu} = \varrho^{\mu}(\mathrm{Cos}\,\mu\vartheta + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\vartheta),$$

ϑ denotante unicum ex Argumentis θ ipsius $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ id, limitibus $+\pi$ atque (exclusive) $-\pi$ continetur; ideoqu

---

*) Sic Cauchy ipse (pag. 375. operis cit. „Exercices etc.") ipsius ϑ determinandi rationem repudiavit, ex quá profecturum i incommodi (verbum refero ipsius Auctoris Latine quidem redditum),

$$\alpha^{\mu}, \text{ dum } \alpha \text{ positiva est,}$$

communis non evaderet ambarum $(\alpha \pm B\sqrt{-1})^{\mu}$ limes. Eo magis miror sit quod Cauchy hoc ipso temporis momento talem hujus ϑ determ rationem proposuerit admittendum, ex quá necesse id consequatur i modi, ut

$$\alpha^{\mu}, \text{ dum } \alpha \text{ negativa est,}$$

communem non censeri liceat ambarum $(\alpha \pm B\sqrt{-1})^{\mu}$ limitem: quem et quidem nostrae definitionis beneficio, ambo simul evitari licet inco id quod praeterea paucis mox infra patebit verbis.

.... **dum α positiva** $=A$ **est**, habetur $\vartheta=\text{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}=\tau$, β reali quâlibet,

ide, secund. (d),

$$(A+\beta\sqrt{-1})^\mu=\varrho^\mu(\text{Cos}\,\mu\tau+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\tau),$$

eoque A^μ ex hac etiam definitione limes est ambarum $(A\pm\sqrt{\beta^2}.\sqrt{-1})^\mu$ mmunis, decrescente valore ipsius β numerico in 0 indefinite;

dum vero α negativa $=-A$ **est**, habetur

$$\vartheta=\text{Arctg}\frac{\beta}{-A}+\pi=\tau+\pi,\ \text{dum } \beta \text{ haud negativa est},$$

$$=-(\pi-\text{Arctg}\frac{\beta}{-A})=\tau-\pi,\ \text{dum } \beta \text{ negativa},$$

de, secundum (d),

$$(-A+\beta\sqrt{-1})^\mu=\varrho^\mu.[\text{Cos}\,\mu(\tau\pm\pi)+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu(\tau\pm\pi)],$$

prout β haud negativa est aut negativa,

eoque $(-A)^\mu$ *) ex hac definitione ipsius $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ limitem equim censeri licet ipsius $(-A+\beta\sqrt{-1})^\mu$ convergente β **positivâ** in 0, inime vero β **negativâ** in 0 convergente.

Observ. Reverâ **Cauchy** hoc modo ipsi x^μ eam ipsam, quae in „Nota I" proxime praecedente ocurrit, definitionem (β') pro $k=0$ [seu, quae idem valet, (β'') pro $k=0$], i. e.

α **positivâ** (0 inclusive)

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu=\varrho^\mu(\text{Cos}\mu\tau+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\tau),$$

α **negativâ** (0 inclus.)

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu=\varrho^\mu[\text{Cos}\mu(\tau\pm\pi)+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\mu(\tau\pm\pi)],$$

prout β positiva est aut negativa,

admisit, eo tamen insuper adjecto posteriori huic aequationi reservato — quo scilicet praetermisso anceps plerumque evaderet definitio ipsius α^μ (α negativâ) ut ne legem illam

$$„(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu=\varrho^\mu[\text{Cos}\,\mu(\tau-\pi)+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu(\tau-\pi)],$$

dum β negat. est,"

---

*) Obiter admonere hoc loco juvat, definitionem ipsius $(-A)^\mu$ Cauchyaneee

$$(-A)^\mu=A^\mu(\text{Cos}\,\mu\pi+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\pi)=A^\mu.(-1)^\mu$$

nostra omnimodo convenire. (Quâ de re vid. quae in nota infra pag. 399 eced. allata sunt.)

nitionem nostramque ipsorum $l(x)$ et $l(b)$, x et b imaginariis negativarum equidem partium realium, pendere. Quare, si umquam eo perventum fuerit, ut de principatu alterutrius modi horum $l(x)$ et $l(b)$ definiendorum conveniat, eodem demum temporis momento, uter potissimum generalibus illis x^y et $\mathrm{Log}_b(x)$ reservatus permaneat sensus, inter Geometras erit lege sancitum.

Illustrissimo Cauchy, si ei placuerit suam ipsius post haec promulgare sententiam, hujus aevi Geometrae aeque ac venturi plurimum se debere certissime confitebuntur. Quod ad nos attinet, tantâ jam dudum imbuti sumus assuetudine explicationis apud Cauchy in rebus dubiis petendae accipiendaeque, ut persuasum nobis hoc quoque tempore habere videamur, fore ut brevi ille quidem Geometras accepto quod diximus beneficio obligatos sibi sit devincturus.

XLV.

Ueber die Rektifikation und Quadratur der Toroide.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Die in Archiv Thl. VIII. S. 375. ff. betrachtete Kurve besteht wesentlich aus zwei Kurven, eine, welche ich die äussere, die andere, die ich die innere Toroide nennen will. Für die erstere gelten in den Gleichungen (17) des erwähnten Aufsatzes die obern Zeichen, für die andere die untern. Ich betrachte hier bloss die erste der zwei Kurven, denn die andere hat, je nach der Grösse von k, ganz andere Gestalten, indem — wie man durch Untersuchung findet — sie Rückkehr- und Doppelpunkte haben kann, der äussern aber gleicht, wenn $k \leqq \frac{b^2}{a}$, jedoch nur alsdann. In eine spezielle Untersuchung der einzelnen Gestalten will ich hier nicht eingehen, da dieselbe im Ganzen nicht schwer ist, auch es sich hier vorzüglich um Rektifikation und Quadratur handeln soll.

Die äussere Toroide ist eine vollkommen geschlossene Figur, sich in die vier Koordinatenwinkel vollkommen symmetrisch theilt, so dass, wenn man das ganze System um die Axe der dreht, die Kurventheile sich decken, und eben so, wenn man um die Axe der y dreht. Es genügt also den Quadranten im ordinatenwinkel der positiven x und y zu betrachten. Dieser adrant geht durch die Axe der x im Punkte $x=a+k$, $y=0$, durch die Axe der y im Punkte $x=0$, $y=b+k$, sonst trifft keine der Axen mehr.

Setzt man in den Gleichungen (17) a. a. O. $x_1=a\cos t$, $=b\sin t$, was man darf, da alsdann $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$, so ist

$$\left.\begin{aligned} x&=\Big(a+\frac{kb}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\Big)\cos t,\\ y&=\Big(b+\frac{ka}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\Big)\sin t;\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

nn x und y die laufenden Koordinaten der Kurve sind.

Man zieht aus den Formeln (1)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t}&=-a\sin t\Big[1+\frac{abk}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}\Big],\\ \frac{\partial y}{\partial t}&=b\cos t\Big[1+\frac{abk}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}\Big].\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

nun, von $t=0$ an gerechnet, s der Bogen, der zum Winkel $\left(\lesseqgtr\frac{\pi}{2}\right)$ gehört, so ist

$$s=\int_0^t\partial t\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}$$

$$=\int_0^t\Big(1+\frac{abk}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}\Big)\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}.\partial t.$$

ser Bogen fängt an bei dem Punkte $x=a+k$, $y=0$.

Führt man die Multiplikation aus, so ergiebt sich:

$$s=\int_0^t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}.\partial t+abk\int_0^t\frac{\partial t}{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}$$

$$=a\int_0^t\sqrt{1-e^2\cos^2 t}.\partial t+abk\int_0^t\frac{\partial t}{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t},$$

$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$.

Was nun zuerst das erste dieser Integrale anbelangt, so hat wenn man $t=\frac{\pi}{2}-\varphi$ setzt:

$$\int_0^t \sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,\partial t = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi$$

$$= \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi - \int_0^{\varphi} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi.$$

Bezeichnet man durch $E(\psi, m)$ wie gewöhnlich das elliptische Integr…

$$\int_0^{\psi} \sqrt{1-m^2\sin^2\psi}\,\partial\psi,$$

so findet sich:

$$\int_0^t \sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,\partial t = E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E(\varphi, e) = E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2} - t, \ldots\right.$$

Was das zweite Integral anbelangt, so ist es:

$$\frac{1}{a^2}\int_0^t \frac{\partial t}{1-e^2\cos^2 t} = \frac{1}{2a^2}\int_0^t \frac{\partial t}{1+e\cos t} + \frac{1}{2a^2}\int_0^t \frac{\partial t}{1-e\cos t}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{e+\cos t}{1+e\cos t}\right) + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{-e+\cos t}{1-e\cos t}\right.\right.$$

$$= \frac{1}{2ab}\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{(1-e^2)\cos^2 t - \sin^2 t}{1-e^2\cos^2 t}\right).$$

Also findet sich

$$\left.\begin{aligned} s = a\left[E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2} - t, e\right)\right] \\ + \frac{k}{2}\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{(1-e^2)\cos^2 t - \sin^2 t}{1-e^2\cos^2 t}\right). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Für $k=0$ ist die Toroide eine Ellipse, deren Halbaxen a und … sind; für $a=b$ ist sie ein Kreis vom Halbmesser $a+k$.

Setzt man $t=\frac{\pi}{2}$, so findet sich als Länge des Quadranten

$$aE\left(\frac{\pi}{2}, e\right) + \frac{k}{2}\pi,$$

also ist die Länge der ganzen Kurve:

$$4aE\left(\frac{\pi}{2}, e\right) + 2k\pi,$$

gleich der Länge der Ellipse + der des erzeugenden Kreises.

Für $a=b$ ist $E\left(\frac{\pi}{2},e\right)=E\left(\frac{\pi}{2},0\right)=\frac{\pi}{2}$, also die Länge der zen Toroide: $2(a+k)\pi$.

Wenden wir uns zur Berechnung der Fläche. Sie möge wie anfangen bei $y=0$, $x=a+k$, und ein Stück davon endigen den zu t gehörigen Ordinaten; ist dasselbe v, so hat man:

$$v=-\int_0^t y\frac{\partial x}{\partial t}\partial t$$

$$\int_0^t \sin^2t\left(1+\frac{abk}{\sqrt{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^3}}\right)\left(b+\frac{ak}{\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}}\right)\partial t,$$

$$\frac{v}{a}=b\int_0^t\sin^2t\partial t+ab^2k\int_0^t\frac{\sin^2t\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^3}}$$

$$+ak\int_0^t\frac{\sin^2t\partial t}{\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}}+a^2bk^2\int_0^t\frac{\sin^2t\partial t}{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^2}.$$

ist

$$\int_0^t\sin^2t\partial t=-\tfrac{1}{2}\sin t\cos t+\frac{t}{2}.$$

r findet man, wie oben:

$$\int_0^t\frac{\sin^2t\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^3}}$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\varphi\partial\varphi}{a^3\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}-\int_0^{\varphi}\frac{\cos^2\varphi\partial\varphi}{a^3\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}$$

$$=\frac{F\left(\frac{\pi}{2},e\right)-E\left(\frac{\pi}{2},e\right)}{a^3e^2}-\frac{F\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right)-E\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right)}{a^3e^2}$$

$$-\frac{\sin t\cos t}{a^3\sqrt{1-e^2\cos^2t}},$$

man, wie gewöhnlich, $\int_0^{\psi}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\psi}}=F(\psi,m)$ setzt, beachtet, dass

$$\int_0^{\psi}\frac{\cos^2\psi\partial\psi}{\sqrt{(1-m^2\sin^2\psi)^3}}=\frac{F(\psi,m)-E(\psi,m)}{m^2}+\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\psi}}.$$

so ist

$$\frac{\sin^2t\partial t}{\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\partial\varphi}{a\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}-\int_0^{\varphi}\frac{\cos^2\varphi\partial\varphi}{a\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$\frac{E\left(\frac{\pi}{2},e\right)-(1-e^2)F\left(\frac{\pi}{2},e\right)}{ae^2}-\frac{E\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right)-(1-e^2)F\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right)}{ae^2}.$$

Endlich ist

$$\int_0^t \frac{\sin^2 t \partial t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^2} = \int_0^t \frac{\operatorname{tg}^2 t . \partial t}{(b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 t)^2 \cos^2 t} = \int_0^x \frac{x^2 \partial}{(b^2 + a^{}}$$

wenn $\operatorname{tg} t = x$ gesetzt wird. Das letzte Integral ist aber

$$\frac{-x}{2a^2(b^2+a^2x^2)} + \frac{1}{2a^3b} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{ax}{b}\right).$$

Demnach ist:

$$\int_0^t \frac{\sin^2 t \partial t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^2} = \frac{-\operatorname{tg} t}{2a^2(b^2+a^2\operatorname{tg}^2 t)} + \frac{1}{2a^3b} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{a}{b}\right.$$

Fasst man die gewonnenen Resultate zusammen, so e sich:

$$v = -\frac{ab}{2}\sin t \cos t + \frac{abt}{2}$$

$$+ \frac{b^2k}{ae^2}\left\{F\left(\frac{\pi}{2},e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right) - E\left(\frac{\pi}{2},e\right) + E\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right.\right.$$

$$-\frac{b^2k}{a}\frac{\sin t \cos t}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}$$

$$+ \frac{ak}{e^2}\left\{E\left(\frac{\pi}{2},e\right) - E\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right) - \frac{b^2}{a^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right) + \frac{b^2}{a^2}F\left(\frac{\pi}{2}-t\right.\right.$$

$$-\frac{abk^2 \operatorname{tg} t}{2(b^2+a^2\operatorname{tg}^2 t)} + \frac{k^2}{2}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{a}{b}\operatorname{tg} t\right).$$

Um den Quadranten zu erhalten, hat man $t = \frac{\pi}{2}$ zu setzen. E

$$\frac{ab\pi}{4} + \frac{b^2k}{ae^2}\left\{F\left(\frac{\pi}{2},e\right) - E\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right\}$$

$$+ \frac{ak}{e^2}\left\{E\left(\frac{\pi}{2},e\right) - \frac{b^2}{a^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right\} + \frac{k^2\pi}{4},$$

mithin der von der ganzen Kurve umschlossene Raum:

$$ab\pi + \frac{4b^2k}{ae^2}\left\{F\left(\frac{\pi}{2},e\right) - E\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right\}$$

$$+ \frac{4ak}{e^2}\left\{E\left(\frac{\pi}{2},e\right) - \frac{b^2}{a^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right\} + k^2\pi.$$

Setzt man $k=0$, so erhält man den Raum, der von der lipse umschlossen ist. Der zwischen der Ellipse und der äu Toroide befindliche Raum ist:

$$\frac{k}{a}\left\{F\left(\frac{\pi}{2},e\right)-E\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right\}+\frac{4ak}{e^2}\left\{E\left(\frac{\pi}{2},e\right)-\frac{b^2}{a^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right\}+k^2\pi$$
$$=\frac{4k}{ae^2}(a^2-b^2)E\left(\frac{\pi}{2},e\right)+k^2\pi=4akE\left(\frac{\pi}{2},e\right)+k^2\pi.$$

Auf gleiche Art reduzirt sich die Formel (4), und man findet:

$$\left.\begin{array}{l} v=-\frac{ab}{2}\sin t\cos t+\frac{ab}{2}t+ak\left\{E\left(\frac{\pi}{2},e\right)-E\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right)\right\} \\ -\frac{b^2k}{a}\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}-\frac{abk^2\operatorname{tg} t}{2(b^2+a^2\operatorname{tg}^2 t)}+\frac{k^2}{2}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{a}{b}\operatorname{tg} t\right). \end{array}\right\} \quad (4')$$

Für $a=b$ ist $e=0$, $E\left(\frac{\pi}{2},e\right)-E\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right)=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=t$; setzt man ferner $t=\frac{\pi}{2}$ und nimmt das Resultat vierfach, so ergiebt sich:

$$\pi(a^2+2ak+k^2)=\pi(a+k)^2,$$

wie sich gehört.

Die Formel (5) ist:

$$ab\pi+4akE\left(\frac{\pi}{2},e\right)+k^2\pi. \quad (5')$$

Somit wäre nun die vorgelegte Aufgabe gelöst. Es dürfte jedoch nicht uninterressant sein, auch den Umdrehungskörper näher zu betrachten, der durch die äussere Toroide entsteht.

Es drehe sich also das ganze System um die Axe der x. Sei der Inhalt der Oberfläche, die von dem Bogen der Toroide, der dem Winkel t entspricht (von $t=0$ an gerechnet) beschrieben wird, so ist bekanntlich:

$$p=-2\pi\int_0^t y\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\,\partial t,$$

$$\frac{p}{2\pi}=\int_0 \left(b+\frac{\ldots}{\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}}\right)\sin t\left(1+\frac{\ldots}{\sqrt{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^3}}\right)\sqrt{a^2\sin \ldots}$$

$$=b\int_0^t \sin t\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\,\partial t+ab^2k\int_0^t\frac{\sin t dt}{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}+ak\int_0^t \sin t\partial t+a^2bk^2\int_0^t\frac{\sin t.\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^3}}.$$

Dadurch, dass man $\cos t=x$ setzt, erhält man:

$$\int_0^t \sin t\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\,\partial t=-\int_1^x\sqrt{a^2-(a^2-b^2)x^2}\,\partial x=a\int_0^1\sqrt{1-e^2x^2}\,\partial x-a\int_0^x\sqrt{1-e^2x^2}\,\partial x$$

$$=\frac{b}{2}-\frac{\cos t}{2}\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}+\frac{a}{2e}\operatorname{arc}(\sin=e\sqrt{1-e^2\cos^2t}-\frac{eb}{a}\cos t).$$

$$\int_0^t\frac{\sin t\partial t}{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}=\int_0^1\frac{\partial x}{a^2(1-e^2x^2)}-\int_0^x\frac{\partial x}{a^2(1-e^2x^2)}=\frac{1}{2a^2e}\log\left\{\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}\right\}.$$

$$\int_0^t\frac{\sin t.\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^3}}=\int_0^1\frac{\partial x}{a^3\sqrt{(1-e^2x^2)^3}}-\int_0^x\frac{\partial x}{a^3\sqrt{(1-e^2x^2)^3}}=\frac{1}{a^3\sqrt{1-e^2}}-\frac{\cos t}{a^3\sqrt{1-e^2\cos^2t}}.$$

$$\int_0^t \sin t.\partial t=-\cos t+1.$$

Fasst man diese Resultate zusammen, so ergiebt sich:

$$p=2\pi\left[\frac{b^2}{2}-\frac{b\cos t}{2}\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}+\frac{ab}{2e}\operatorname{arc}(\sin=e\sqrt{1-e^2\cos^2t}-e\frac{b}{a}\cos t)\right.$$
$$\left.+\frac{b^2k}{2ae}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}\right)-ak\cos t+ak+k^2-\frac{bk^2\cos t}{a\sqrt{1-e^2\cos^2t}}\right]. \qquad (6)$$

Diejenigen Glieder dieser Formel, die kein k enthalten, geben den prechenden Theil der von der Ellipse beschriebenen Oberfläche.

Für die Hälfte der erzeugten Oberfläche ist $t=\frac{\pi}{2}$, also die e Oberfläche:

$$2\pi\left[b^2+\frac{ab}{e}\operatorname{arc}(\sin=e)+\frac{b^2k}{ae}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\right)+2ak+2k^2\right].$$

Für $a=b$ ist $e=0$, also die Oberfläche der Kugel:

$$2\pi[a^2+a^2+2ak+2ak+2k^2]=4\pi(a+k)^2,$$

bekannt.

Suchen wir nun auch den körperlichen Inhalt zu bestimmen. sei q, so ist

$$q=\pi\int_0^t -y^2\frac{\partial x}{\partial t}\partial t=a\pi\int_0^t \sin^3 t\left(b+\frac{ak}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\right)^2\left(1+\frac{abk}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}\right)\partial t,$$

$$\frac{q}{a\pi}=b^2\int_0^t \sin^3 t\partial t+2abk\int_0^t\frac{\sin^3 t.\partial t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}+a^2k^2\int_0^t\frac{\sin^3 t\partial t}{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}$$

$$+akb^3\int_0^t\frac{\sin^3 t\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}+2a^2b^2k^2\int_0^t\frac{\sin^3 t\partial t}{(a^2\sin t^2+b^2\cos^2 t)^2}$$

$$+a^3bk^3\int_0^t\frac{\sin^3 t\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^5}}.$$

Durch die Substitution $\cos t = x$ werden diese Integrale auf bekannte zurückgeführt und man erhält folgende Formeln:

$$\int_0^t \sin^3 t \partial t = -\tfrac{1}{3}\sin^2 t \cos t - \tfrac{2}{3}\cos t + \tfrac{2}{3}.$$

$$\int_0^t \frac{\sin^3 t \partial t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} = \frac{b}{2a^2e^2} - \frac{\cos t \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}}{2ae^2}$$
$$+ \frac{2e^2-1}{2ae^3} \operatorname{arc}\left(\sin = e\sqrt{1-e^2\cos^2 t} - \frac{eb}{a}\cos t\right).$$

$$\int_0^t \frac{\sin^3 t \partial t}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = -\frac{b^2}{2a^4e^3}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}\right) + \frac{1}{a^2e^2} - \frac{\cos}{a^2}$$

$$\int_0^t \frac{\sin^3 t \partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^3}} = -\frac{b^2}{a^5e^2}\left(\frac{a}{b} - \frac{\cos t}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\right)$$
$$+ \frac{1}{a^3e^3}\operatorname{arc}\left(\sin = e\sqrt{1-e^2\cos^2 t} - \frac{eb}{a}\cos t\right).$$

$$\int_0^t \frac{\sin^3 t \partial t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^2} = -\frac{1}{2a^4e^2} - \frac{b^2\cos t}{2a^6e^2(1-e^2\cos^2 t)}$$
$$+ \frac{e^2+1}{4a^4e^3}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}\right).$$

$$\int_0^t \frac{\sin^3 t \partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^5}}$$
$$= \frac{1}{a^5}\left(-\frac{a}{3be^2} + \frac{b^2\cos t}{3a^2e^2\sqrt{(1-e^2\cos^2 t)^3}} + \frac{2e^2+1}{3e^2\sqrt{1-e^2}} - \frac{(2e^2+1)\cos t}{3e^2\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\right)$$

Substituirt man, so ergiebt sich:

$$q = a\pi\Big[-\frac{b^2}{3}\sin t\cos t - \frac{2b^2}{3}\cos t + \frac{2b^2}{3} + \frac{kb^2}{ae^2} - \frac{kb\cos t\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}{e^2}$$
$$+ \frac{(2e^2-1)kb}{e^3}\operatorname{arc}\left(\sin = e\sqrt{1-e^2\cos^2 t} - \frac{eb}{a}\cos t\right)$$
$$- \frac{b^2k^2}{2a^2e^3}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}\right) + \frac{k^2}{e^2} - \frac{k^2\cos t}{e^2} - \frac{kb^4}{a^3e^2}$$
$$- \frac{kb^5}{a^4e^2}\frac{\cos t}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}} + \frac{kb^3}{a^2e^3}\operatorname{arc}\left(\sin = e\sqrt{1-e^2\cos^2 t} - \frac{eb}{a}\cos t\right)$$
$$- \frac{b^2k^2}{e^2a^2} - \frac{b^4k^2\cos t}{a^4e^2(1-e^2\cos^2 t)} + \frac{(e^2+1)b^2k^2}{2a^2e^3}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}\right)$$
$$- \frac{k^3}{3ae^2} + \frac{b^3k^3\cos t}{3a^4e^2\sqrt{(1-e^2\cos^2 t)^3}} + \frac{(2e^2+1)k^3b}{3a^2e^2\sqrt{1-e^2}}$$
$$- \frac{(2e^2+1)k^3b\cos t}{3a^2e^2\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\Big]$$

$$\left.\begin{aligned}
&=a\pi\Big[-\frac{b^2}{3}\sin t\cos t-\frac{2b^2}{3}\cos t+\frac{2b^2}{3}+\frac{kb^2}{a}\\
&\frac{b\cos t\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}{e^2}+\frac{kb}{e}\operatorname{arc}\Big(\sin=e\sqrt{1-e^2\cos^2 t}-e\frac{b}{a}\cos t\Big)\\
&+\frac{b^2k^2}{2a^2e}\log\Big(\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}\Big)+k^2-\frac{k^2\cos t}{e^2}\\
&-\frac{kb^5}{a^4e^2}\cdot\frac{\cos t}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}+\frac{2k^3}{3a}+\frac{b^3k^3\cos t}{3a^4e^2\sqrt{(1-e^2\cos^2 t)^3}}\\
&-\frac{(2e^2+1)k^3b\cos t}{3a^2e^2\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\Big].
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

ür die Hälfte setzt man $t=\frac{\pi}{2}$, und somit ist der ganze Körper:

$$\Big[\frac{2b^2}{3}+\frac{kb^2}{a}+\frac{kb}{e}\operatorname{arc}(\sin=e)+\frac{b^2k^2}{2a^2e}\log\Big(\frac{1+e}{1-e}\Big)+k^2+\frac{2k^3}{3a}\Big].\quad(8)$$

ür $a=b$ ist $e=1$ und die Kugel:

$$\Big(\frac{2a^2}{3}+ka+ka+k^2+k^2+\frac{2k^3}{3a}\Big)=\frac{\pi}{3}(4a^3+12a^2k+12ak^2+4k^3)$$
$$=\frac{4\pi}{3}(a+k)^3,$$

ekannt.

ie von k freien Glieder in (7) und (8) geben den körperlichen des analogen, durch die Ellipse erzeugten Körpers; wäh- lie k enthaltenden zusammen den durch den Raum zwischen llipse und der Toroide erzeugten Körper ausdrücken.

s ist nun auch leicht, den Körper zu betrachten, der durch hung um die Axe der y entsteht; wir übergehen diese Be- ung jedoch.

Bezug auf die analogen Formeln für die innere Toroide, die halb des Kreises dieser Betrachtungen liegt, bemerken wir ch, dass, wenn $k\overset{=}{<}\frac{b^2}{a}$, alle obigen Formeln für dieselbe gel- renn man statt k setzt $-k$. Daraus folgt, dass unter dieser ssetzung hinsichtlich k:

er Unterschied der Längen beider Toroiden:

$$4k\pi;$$

äche zwischen beiden Toroiden:

$$8akE\Big(\frac{\pi}{2},e\Big);$$

nterschied der Oberflächen der beiden Umdrehungskörper, durch beide Kurven erzeugt werden, wenn das ganze System m die grosse Axe der Ellipse dreht:

$$4\pi\left(\frac{b^2k}{ae}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\right)+2ak\right);$$

und der körperliche Raum, der durch das Flächenstück zwisch beiden Kurven erzeugt wird:

$$4a\pi\left[\frac{kb^2}{a}+\frac{kb}{e}\operatorname{arc}(\sin=e)+\frac{2k^3}{3a}\right].$$

Anderweitige Resultate liessen sich noch leicht erhalten; w enthalten uns dessen aber hier, um nicht dem Gegenstande ei zu grosse Ausdehnung zu geben.*)

XLVI.

Eine geometrische Anwendung de Lehre vom Grössten und Kleinsten.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Vor schon langer Zeit stellte Hr. Prof. Steiner in Crelle Journal folgende interessante Aufgabe:

"Wenn drei Punkte ihrer Lage nach gegeben sind, ein vierten Punkt in der Ebene jener so zu bestimmen, da die Summe der μten Potenzen der Entfernungen d gesuchten Punktes von den gegebenen ein Minimum werd

und theilte zugleich zwei Bedingungen mit, welche zur Besti mung des fraglichen Punktes hinreichen, nämlich die folgend

$$x^{\mu-1}\sin(x,z)=y^{\mu-1}\sin(y,z),$$
$$x^{\mu-1}\sin(x,y)=z^{\mu-1}\sin(y,z);$$

worin x, y, z die Entfernungen des gesuchten Punktes von d drei gegebenen bezeichnen; den Beweis für diese Bedingun gleichungen hat er aber nicht geliefert. Es dürfte daher ni überflüssig sein, eine Bearbeitung dieses Problemes mitzutheil wobei dasselbe als eine sehr einfache Spezialisirung des folg den weit allgemeineren erscheint:

*) Ich würde den Herrn Vf. dieser recht gute Beispiele für die wendung der elliptischen Functionen enthaltenden Abhandlung doch ten, seine Betrachtungen gelegentlich fortzusetzen. G.

Man soll in der Ebene des gegebenen Dreiecks ABC (Taf. X. Fig. 13.) den Punkt O so bestimmen, dass für $AO=x$, $BO=y$, $CO=z$ die Summe

$$\varphi(x)+\psi(y)+\chi(z),$$

worin φ, ψ, χ drei völlig willkührliche Funktionen bezeichnen, ein Maximum oder Minimum werde.

Für die Lösung dieser Aufgabe ist zunächst die Bemerkung Gewicht, dass x, y, z nicht drei von einander unabhängige riabele sind; denn wenn wir die Winkel des Dreieckes ABC Reihe nach mit α, β, γ, die ihnen gegenüberliegenden Seiten a, b, c und den Winkel BAO mit t bezeichnen, so finden Gleichungen

$$y^2=c^2+x^2-2x\cos t, \qquad (1)$$

$$z^2=b^2+x^2-2bx\cos(\alpha-t) \qquad (2)$$

tt, und mithin bildet die Summe $\varphi(x)+\psi(y)+\chi(z)$ eine Funktion nur zwei unabhängigen Veränderlichen x und t.

Bezeichnet nun $f(x,t)$ irgend eine Funktion zweier unabhänen Variabelen, so findet man bekanntlich diejenigen Werthe x und t, welche $f(x,t)$ zu einem Maximum oder Minimum chen, dadurch, dass man die nach x und t genommenen parlen Differenzialquotienten von $f(x,t)$ entwickelt und hierauf aus Gleichungen

$$\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)=0,\ \left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right)=0$$

nd t eliminirt. Um nachher zu entscheiden, welche von den ndenen Werthen einem Maximum und welche einem Minimum $f(x,t)$ entsprechen, muss man die höheren Differenzialquotiendieser Funktion in Betracht ziehen; diese Diskussion ist aber den Fällen überflüssig, wo man aus der Natur von $f(x,t)$ untelbar ersieht, wann überhaupt ein Maximum oder Minimum in vorkommen kann.

In der Anwendung auf unser Problem ist

$$f(x,t)=\varphi(x)+\psi(y)+\chi(z), \qquad (3)$$

lich

$$\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)=\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+\frac{\partial\psi(y)}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+\frac{\partial\chi(z)}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad (4)$$

$$\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right)=\frac{\partial\psi(y)}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)+\frac{\partial\chi(z)}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right). \qquad (5)$$

Andererseits findet man aus den Gleichungen (1) und (2) leicht ch partielle Differenziation nach x:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{x-c\cos t}{y},\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{x-b\cos(\alpha-t)}{z},$$

und durch partielle Differenziation nach t

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)=\frac{cx\sin t}{y},\ \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)=-\frac{bx\sin(\alpha-t)}{z}.$$

Durch Substitution dieser Werthe gehen die Gleichungen (1) und (2) in die folgenden über:

$$\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)=\varphi'(x)+\psi'(y)\frac{x-c\cos t}{y}+\chi'(z)\frac{x-b\cos(\alpha-t)}{z},$$

$$\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right)=\psi'(y)\frac{cx\sin t}{y}-\chi'(z)\frac{bx\sin(\alpha-t)}{z};$$

und wenn jetzt die partiellen Differenzialquotienten links gleich Null gesetzt werden, so bleiben zur Bestimmung von x und t die beiden Gleichungen:

$$\varphi'(x)=\psi'(y)\,\frac{c\cos t-x}{y}+\chi'(z)\,\frac{b\cos(\alpha-t)-x}{z}, \tag{6}$$

$$0=\psi'(y)\frac{c\sin t}{y}-\chi'(z)\frac{b\sin(\alpha-t)}{z}, \tag{7}$$

welche eine sehr elegante Umformung zulassen, wenn man auf die geometrische Bedeutung der Coeffizienten von $\psi'(y)$ und $\chi'(z)$ eingeht. Wird nämlich AO über O hinaus unbestimmt verlängert, $\angle AOL=p$, $\angle BOL=q$ gesetzt, und werden ferner auf die verlängerte Gerade AO von B und C aus die Perpendikel BP und CQ herabgelassen, so ist

$$\frac{c\cos t-x}{y}=\frac{AP-AO}{BO}=\frac{PO}{BO}=\cos p,$$

$$\frac{b\cos(\alpha-t)-x}{z}=\frac{AQ-AO}{CO}=\frac{QO}{CO}=\cos q,$$

$$\frac{c\sin t}{y}=\frac{BP}{BO}=\sin p,$$

$$\frac{b\sin(\alpha-t)}{z}=\frac{CQ}{CO}=\sin q;$$

und hierdurch verwandeln sich die Gleichungen (6) und (7) in die folgenden:

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\psi'(y)\cos p+\chi'(z)\cos q,\\ 0&=\psi'(y)\sin p-\chi'(z)\sin q.\end{aligned}$$

Hieraus lässt sich einmal $\chi'(z)$ und dann $\psi'(y)$ eliminiren; man erhält ohne Schwierigkeit:

$$\varphi'(x)\sin q=\psi'(y)\sin(p+q),$$
$$\varphi'(x)\sin p=\chi'(z)\sin(p+q).$$

eichnen wir endlich die Winkel BOC, AOC, AOB mit , so ist $\sin q=\sin v$, $\sin p=\sin w$, $\sin(p+q)=\sin u$ und h gelangen die vorigen Gleichungen zu der sehr eleganten :

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(x)\sin v&=\psi'(y)\sin u,\\ \varphi'(x)\sin w&=\chi'(z)\sin u;\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Form von Proportionen:

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(x):\psi'(y)&=\sin u:\sin v,\\ \varphi'(x):\chi'(z)&=\sin u:\sin w.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

ist leicht zu sehen, dass implicite hierin die Auflösung unseblemes liegt; rechnen wir nämlich zu den zwei Gleichun-No. (8) noch die vier folgenden:

$$\left.\begin{aligned}u+v+w&=360^\circ,\\ a^2&=y^2+z^2-2yz\cos u,\\ b^2&=x^2+z^2-2xz\cos v,\\ c^2&=x^2+y^2-2xy\cos w;\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

n wir im Ganzen sechs Gleichungen zur Bestimmung der Jnbekannten x, y, z, u, v, w. Ein Theil dieser, wie es sehr weitläufigen Elimination lässt sich ungemein leicht en, wenn man berücksichtigt, dass die Proportionen in denen sehr ähnlich sehen, welche in einem Dreiecke mit ten $\varphi'(x)$, $\psi'(y)$, $\chi'(z)$ und den Winkeln u, v, w statt finrden; nur ist der Unterschied, dass in (9) die Summe w nicht 180° beträgt, wie in einem Dreiecke der Fall sein sondern 360°. Dieser Uebelstand hebt sich aber sehr wenn man statt der Winkel u, v, w ihre Supplemente einalso

$$u=180^\circ-u',\ v=180^\circ-v',\ w=180^\circ-w'$$

es wird dann

$$u'+v'+w'=180^\circ$$

h No. (9)

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(x):\psi'(y)&=\sin u':\sin v',\\ \varphi'(x):\chi'(z)&=\sin u':\sin w'.\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

eichnen wir zur Abkürzung wie folgt:

$$\xi=\varphi'(x),\ \eta=\psi'(y),\ \zeta=\chi'(z);\qquad(12)$$

nen wir uns ξ, η, ζ, oder diesen Grössen proportionale Ge-

rade, als Seiten eines Dreiecks, u', v', w' als die gegenüberstehenden Winkel denken und haben dann:

$$\cos u' = \frac{\eta^2+\zeta^2-\xi^2}{2\eta\zeta},$$
$$\cos v' = \frac{\xi^2+\zeta^2-\eta^2}{2\xi\zeta},$$
$$\cos w' = \frac{\xi^2+\eta^2-\zeta^2}{2\xi\eta};$$

und für $\cos u$, $\cos v$, $\cos w$ gelten die nämlichen Werthe, nur mit entgegengesetztem Zeichen. Die Gleichungen (10) gehen jetzt in die folgenden über:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= y^2+z^2+\frac{yz}{\eta\zeta}(\eta^2+\zeta^2-\xi^2),\\ b^2 &= x^2+z^2+\frac{xz}{\xi\zeta}(\xi^2+\zeta^2-\eta^2),\\ c^2 &= x^2+y^2+\frac{xy}{\xi\eta}(\xi^2+\eta^2-\zeta^2); \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

und hier giebt es blos noch drei Unbekannte, weil in ξ, η, ζ nur x, y und z vorkommen. Weiter lässt sich natürlich die Elimination nicht treiben, weil die ferneren Schritte der Rechnung durch die Natur der Funktionen ξ, η, ζ erst bestimmt werden müssen. Ein paar Beispiele für unsere allgemeinen Formeln sind die folgenden.

1) Sei $\varphi(x)=\alpha x, \psi(y)=\beta y$, $\chi(z)+\gamma z$; so wird

$$\varphi'(x)=\xi=\alpha,\ \psi'(y)=\eta=\beta,\ \chi'(z)=\zeta=\gamma;$$

und die Proportionen in (11) bestimmen dann unmittelbar die Winkel u', v', w'. Construirt man nämlich ein Dreieck, dessen Seiten die Grössen α, β, γ oder ihnen proportionale sind, so ist der Gegenwinkel zur Seite α gleich dem Winkel u', und ebenso sind v', w' die Gegenwinkel zu den Seiten β, γ. Beschreibt man jetzt über den Seiten a, b, c des gegebenen Dreiecks als Sehnen Kreisbögen, in welchen u', v', w' die Peripherienwinkel bilden, so giebt der gemeinschaftliche Durchschnitt der drei Kreisbögen den gesuchten Punkt O. Für $\alpha=\beta=\gamma=1$ werden u', v', w' einander gleich, nämlich $=120^0$, und man kommt dann auf einen sehr bekannten Fall zurück.

2) Für $\varphi(x)=x^2$, $\psi(y)=y^2$, $\chi(z)=z^2$ bestimmen die obigen Formeln den Schwerpunkt des Dreiecks; denn es wird dann

$$\xi=2x,\ \eta=2y,\ \zeta=2z;$$

und aus den Gleichungen (13) erhält man durch Elimination leicht:

$$x=\tfrac{1}{3}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},$$
$$y=\tfrac{1}{3}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2},$$
$$z=\tfrac{1}{3}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

Da diese Formeln mit denen zusammenfallen, welche für den Schwerpunkt des Dreiecks gelten, so folgt hieraus die Identität unseres Punktes mit jenem.

3) Setzt man $\varphi(x)=lx$, $\psi(y)=ly$, $\chi(z)=lz$; so würde

$$lx+ly+lz=l(xyz),$$

d. h. xyz zu einem Minimum zu machen sein. Es wird hier

$$\xi=\frac{1}{x},\ \eta=\frac{1}{y},\ \zeta=\frac{1}{z};$$

und die Gleichungen (13) gehen über in:

$$a^2=2(y^2+z^2)-\frac{y^2z^2}{x^2},$$

$$b^2=2(x^2+z^2)-\frac{x^2z^2}{y^2},$$

$$c^2=2(x^2+y^2)-\frac{x^2y^2}{z^2}.$$

Da hier nur die Quadrate der sechs Grössen x, y, z vorkommen, so kann man vorerst die Exponenten 2 sämmtlich streichen, wenn man am Ende der Rechnung wieder $a^2, b^2, c^2, x^2, y^2, z^2$ für a, b, c, x, y, z schreibt. Nach dieser Reduktion bleibt für x eine cubische Gleichung, nach deren Auflösung noch die Ausziehung einer Quadratwurzel nöthig wird. Vielleicht lässt sich das Endresultat auch durch Intersektionen von Kegelschnitten geometrisch construiren, doch hat dies der Verfasser nicht versucht.

XLVII.
Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Oskar Werner,
Schüler des polytechnischen Institutes zu Dresden.

(Fortsetzung von Nr. XXXIX.)

Folgendes ist zu beweisen:

Für jedes positive ganze n ist

$$2.\quad \begin{cases} \dfrac{\sin n\beta}{\sin\beta}\sec\alpha\sec(\alpha+n\beta)=\sec\alpha\sec(\alpha+\beta)+\sec(\alpha+\beta)\sec(\alpha+2\beta)+ \\ \qquad\qquad +\sec[\alpha+(n-1)\beta]\sec[\alpha+n\beta] \\ \dfrac{\sin n\beta}{\sin\beta}\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}(\alpha+n\beta)=\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}(\alpha+\beta) \\ \qquad\qquad +\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)\operatorname{cosec}(\alpha+2\beta)+\dots \\ \qquad\qquad +\operatorname{cosec}[\alpha+(n-1)\beta]\operatorname{cosec}[\alpha+n\beta] \end{cases}$$

$$3.\quad \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-1}\sin[\alpha+(n-1)\beta]\sin(\alpha+n\beta)+\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha}{2\cos\beta} \\ \qquad =\sin^2\alpha-\sin^2(\alpha+\beta)+\dots(-1)^{n-1}\sin^2[\alpha+(n-1)\beta], \\ \dfrac{(-1)^{n-1}\cos[\alpha+(n-1)\beta]\cos(\alpha+n\beta)+\cos(\alpha-\beta)\cos\alpha}{2\cos\beta} \\ \qquad =\cos^2\alpha-\cos^2(\alpha+\beta)+\dots(-1)^{n-1}\cos^2[\alpha+(n-1)\beta]; \end{cases}$$

$$4.\quad \operatorname{cotang}\alpha-2^n\operatorname{cotang}2^n\alpha$$
$$=\operatorname{tang}\alpha+2\operatorname{tang}2\alpha+4\operatorname{tang}4\alpha+\dots+2^{n-1}\operatorname{tang}2^{n-1}\alpha;$$

$$5.\quad \frac{1}{2^n}\operatorname{cotang}\frac{\alpha}{2^n}-\operatorname{cotang}\alpha$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{8}\operatorname{tang}\frac{1}{8}\alpha+\dots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tang}\frac{1}{2^n}\alpha;$$

$$6.\quad \operatorname{cotang}\frac{1}{2^n}\alpha-\operatorname{cotang}\alpha$$
$$=\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha+\operatorname{cosec}\frac{1}{4}\alpha+\dots+\operatorname{cosec}\frac{1}{2^{n-1}}\alpha.$$

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

I.

$$\frac{\cos(a\alpha)}{r^a}+\frac{\cos(a+b)\alpha}{r^{a+b}}+\frac{\cos(a+2b)\alpha}{r^{a+2b}}+\frac{\cos(a+3b)\alpha}{r^{a+3b}}+\dots \text{ in inf.}$$
$$=r^{b-a}.\frac{r^b\cos(a\alpha)-\cos(b-a)\alpha}{r^{2b}-2r^b\cos(b\alpha)+1},$$

$$\frac{\sin a\alpha}{r^a}+\frac{\sin(a+b)\alpha}{r^{a+b}}+\frac{\sin(a+2b)\alpha}{r^{a+2b}}+\frac{\sin(a+3b)\alpha}{r^{a+3b}}+\dots \text{ in inf.}$$
$$=r^{b-a}.\frac{r^b\sin(a\alpha)+\sin(b-a)\alpha}{r^{2b}-2r^b\cos b\beta+1}.$$

wenn $r>1$, $a>0$, $b>0$, α reell.

Hieraus folgt:

$$\frac{\cos\alpha}{r^a}+\frac{\cos 2\alpha}{r^{2a}}+\frac{\cos 3\alpha}{r^{3a}}+\ldots\ldots \text{ in inf.} = \frac{r^a\cos\alpha-1}{r^{2a}-2r^a\cos\alpha+1},$$

$$\frac{\sin\alpha}{r^a}+\frac{\sin 2\alpha}{r^{2a}}+\frac{\sin 3\alpha}{r^{3a}}+\ldots\ldots \text{ in inf.} = \frac{r^a\sin\alpha}{r^{2a}-2r^a\cos\alpha+1},$$

unter denselben Bedingungen.

II.

$$1-\tfrac{1}{2}\frac{r^2\cos 2\varphi}{1.2}+\tfrac{1}{3}\frac{r^4\cos 4\varphi}{1.2.3.4}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n+1}\cdot\frac{r^{2n}\cos 2n\varphi}{1.2\ldots 2n}+\ldots$$
$$=\frac{e^{-r\sin\varphi}+e^{r\sin\varphi}}{r^2}\cos(r\cos\varphi).\cos 2\varphi+\frac{e^{-r\sin\varphi}-e^{r\sin\varphi}}{r^2}\sin(r\cos\varphi).\sin 2\varphi$$
$$-\frac{2\cos 2\varphi}{r^2}+\frac{e^{-r\sin\varphi}+e^{r\sin\varphi}}{r}\sin(r\cos\varphi)\cos\varphi$$
$$+\frac{e^{r\sin\varphi}-e^{-r\sin\varphi}}{r}\cos(r\cos\varphi)\sin\varphi;$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{r^2\sin 2\varphi}{1.2}+\tfrac{1}{3}\frac{r^4\sin 4\varphi}{1.2.3.4}-\tfrac{1}{4}\frac{r^6\sin 6\varphi}{1.2\ldots 6}+\ldots \text{ in inf.}$$
$$=-\frac{e^{r\sin\varphi}+e^{-r\sin\varphi}}{r^2}\cos(r\cos\varphi)\sin 2\varphi$$
$$+\frac{e^{-r\sin\varphi}-e^{r\sin\varphi}}{r^2}\sin(r\cos\varphi)\cos 2\varphi+\frac{2\sin 2\varphi}{r^2}$$
$$-\frac{e^{r\sin\varphi}+e^{-r\sin\varphi}}{r}\sin(r\cos\varphi).\sin\varphi+\frac{e^{r\sin\varphi}-e^{-r\sin\varphi}}{r}\cos(r\cos\varphi).\cos\varphi,$$

wenn $r\geqq 0$ und φ beliebig ist.

III.

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1^2.3}{2^2.4^2}+\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}+\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}+\ldots+\frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2r-1)^2(2r+1)}{2^2.4^2.6^2\ldots(2r+2)^2}$$
$$=1-\frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2r+1)^2(2r+3)}{2^2.4^2.6^2\ldots(2r+2)^2}.$$

XLVIII.
Miscellen.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Als ein etwas frappantes Beispiel für die Lehre von den Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten benutzt man gewöhnlich die Aufgabe: zwei Zahlen zu finden, deren Summe Produkt und Quadratdifferenz gleich sind; und dieselbe ist auch in so fern instruktiv, als keine unmittelbar gegebenen Zahlen in den betreffenden Gleichungen vorkommen. Man scheint dagegen nicht bemerkt zu haben, dass die analoge Frage nach zwei Unbekannten, deren Differenz, Quotient und Quadratsumme gleich sein soll, ein nicht minder nettes Beispiel für die Gleichungen dritten Grades darbietet.

Aus

$$y-x=\frac{x}{y}=x^2+y^2$$

folgt nämlich zunächst

$$x=\frac{y^2}{y+1},$$

und für y die cubische Gleichung:

$$y^3+y^2=\tfrac{1}{2}.$$

Durch die Substitution $y=z-\frac{1}{3}$ erhält man hieraus die transformirte Gleichung

$$z^3=\tfrac{1}{3}z+\frac{23}{54},$$

auf welche sich die Cardansformel anwenden lässt; man findet nämlich

$$z=\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{23+\sqrt{513}}{4}\right)}+\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{23-\sqrt{513}}{4}\right)},$$

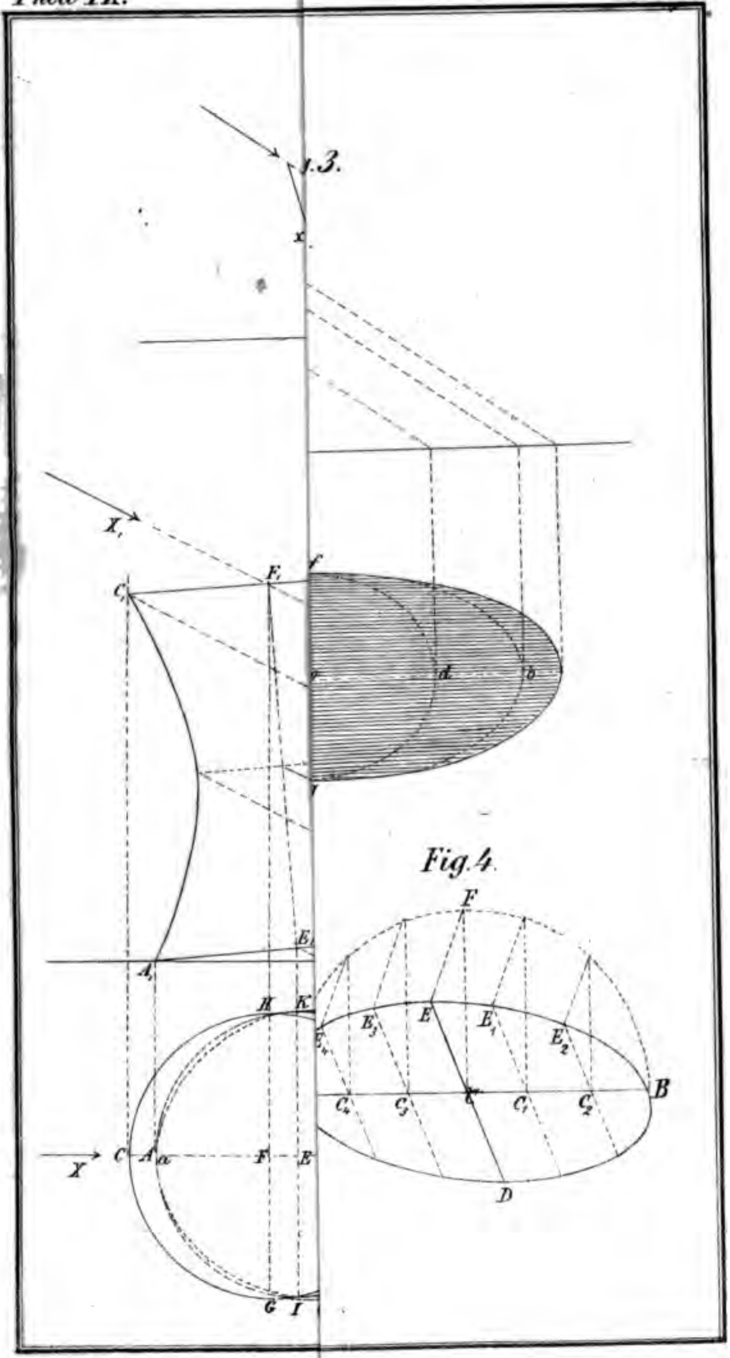
oder in Zahlen:

$$z=0{,}898530\ldots,$$

und hieraus:

$$y=0{,}565197\ldots,$$
$$x=0{,}204094\ldots.$$

Der gemeinschaftliche Betrag von $y-x$, $\frac{x}{y}$ und x^2+y^2 endlich ist 0,36110....


3.
x
X₁
C₁
F₁
f
o
d
b
E₁
A₁
H
K
Fig. 4.
F
E₄
E₃
E
E₁
E₂
C₄
C₃
C
C₁
C₂
B
D
X
C
A
a
F
E
G
I

Tum quod ad differentiam inter Cauchyanam nostramque definitionem ipsius, quem diximus nos quidem, „*e*-logarithmi principalis“

$$l(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

attinet, analoga ea est (nec inopinato id quidem) praecedenti, quae definitiones illas „potentiae principalis“

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\mu}$$

spectabat.

Nostra quidem definitione id contigit emolumenti, ut

$l(\alpha)$, sive positiva sit sive negat. α,

communis evadat limes amborum $l(\alpha\pm B\sqrt{-1})$ decrescente B in 0 indefinite; attamen hunc

$$l(\beta\sqrt{-1})$$

limitem equidem semper ipsius $l(A+\beta\sqrt{-1})$, decrescente A in 0 indefinite, nec tamen semper (scil. β negativâ haud licet) ipsius $l(-A+\beta\sqrt{-1})$ censeri licebit.

E contrario Cauchyanâ definitione id accidit incommodi, ut

$$l(\alpha)$$

communem non semper (scil. α negativâ $=-A$ haud semper licebit) censeri liceat amborum $l(\alpha\pm B\sqrt{-1})$ limitem decrescente B in 0 indefinite; — attamen hic

$l(\beta\sqrt{-1})$, sive positiva sit sive negat. β,

communis evadit limes amborum $l(\pm A+\beta\sqrt{-1})$ decrescente A in 0 indefinite.

Praeterea nostrûm utrique rata est haecce relatio

$$l(-A)=lA+l(-1)=lA+\pi\sqrt{-1}.$$

Denique de differentia inter Cauchyanam definitionem nostramque signorum universalium horum

$$x^y \text{ et } \mathrm{Log}\,b(x)$$

(x, y, b quantitatibus quibuscumque, realibus aeque ac imaginariis,)

nullâ sane post haec opus est explicatione aliâ quam hâc generali, quod nostrûm utrique cooptatae fuerint definitiones illae

$$(f) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^y=e^{ylx},\ \mathrm{Log}\,b(x)=\frac{lx}{lb}.$$

Quo scilicet ex facto patet omnino differentiam, de quâ quaeritur, ex solâ (cujus supra mentionem fecimus) differentiâ inter Cauchyanam defi-

Fig. 1.

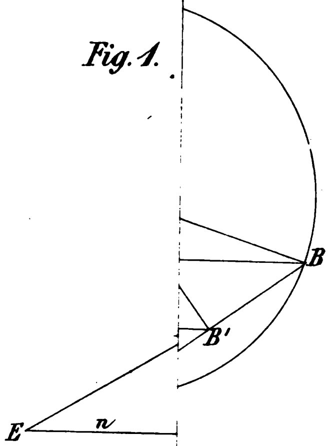
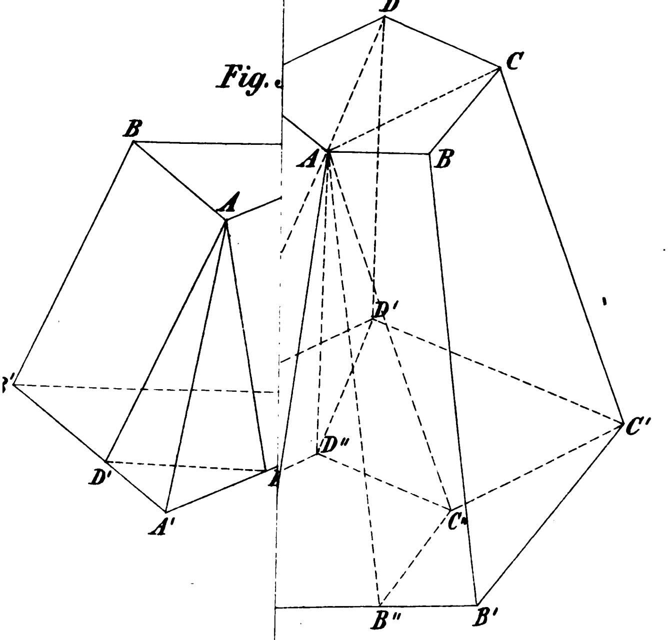


Fig. 5.

Fig.



Für $a=b$ ist $E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)=E\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)=\frac{\pi}{2}$, also die Länge der ganzen Toroide: $2(a+k)\pi$.

Wenden wir uns zur Berechnung der Fläche. Sie möge wieder anfangen bei $y=0$, $x=a+k$, und ein Stück davon endigen mit den zu t gehörigen Ordinaten; ist dasselbe v, so hat man:

$$v=-\int_0^t y\frac{\partial x}{\partial t}\partial t$$

$$=a\int_0^t \sin^2 t\left(1+\frac{abk}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}\right)\left(b+\frac{ak}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\right)\partial t,$$

$$\frac{v}{a}=b\int_0^t \sin^2 t\partial t+ab^2k\int_0^t \frac{\sin^2 t\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}$$

$$+ak\int_0^t \frac{\sin^2 t\partial t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}+a^2bk^2\int_0^t \frac{\sin^2 t\partial t}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2}.$$

Nun ist

$$\int_0^t \sin^2 t\partial t=-\tfrac{1}{2}\sin t\cos t+\frac{t}{2}.$$

Ferner findet man, wie oben:

$$\int_0^t \frac{\sin^2 t\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\partial\varphi}{a^3\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}-\int_0^{\varphi}\frac{\cos^2\varphi\partial\varphi}{a^3\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}$$

$$=\frac{F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)-E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)}{a^3e^2}-\frac{F\left(\frac{\pi}{2}-t, e\right)-E\left(\frac{\pi}{2}-t, e\right)}{a^3e^2}$$

$$-\frac{\sin t\cos t}{a^3\sqrt{1-e^2\cos^2 t}},$$

wenn man, wie gewöhnlich, $\int_0^{\psi}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\psi}}=F(\psi, m)$ setzt, und beachtet, dass

$$\int_0^{\psi}\frac{\cos^2\psi\partial\psi}{\sqrt{(1-m^2\sin^2\psi)^3}}=\frac{F(\psi, m)-E(\psi, m)}{m^2}+\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\psi}}.$$

Eben so ist

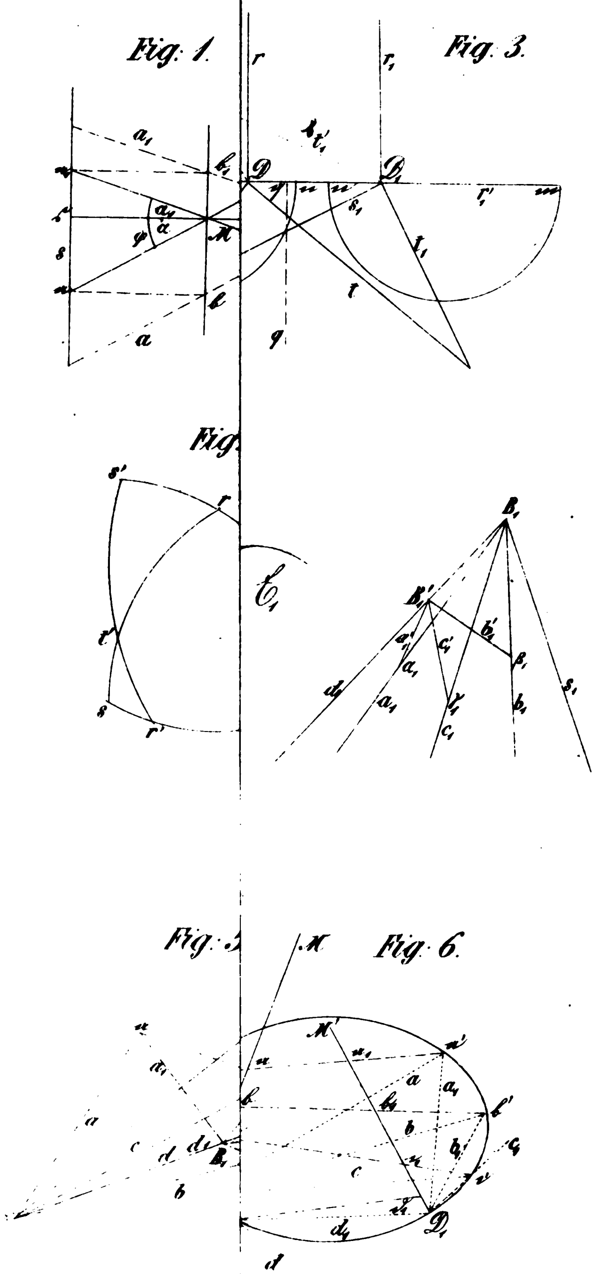
$$\int_0^t \frac{\sin^2 t\partial t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\partial\varphi}{a\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}-\int_0^{\varphi}\frac{\cos^2\varphi\partial\varphi}{a\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$=\frac{E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)-(1-e^2)F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)}{ae^2}-\frac{E\left(\frac{\pi}{2}-t, e\right)-(1-e^2)F\left(\frac{\pi}{2}-t, e\right)}{ae^2}.$$

Fig. 1. Fig. 3.

Fig.

Fig. 5 Fig. 6.



Diejenigen Glieder dieser Formel, die kein k enthalten, geben den
prechenden Theil der von der Ellipse beschriebenen Oberfläche.

Für die Hälfte der erzeugten Oberfläche ist $t=\frac{\pi}{2}$, also die
e Oberfläche:

$$2\pi[b^2+\frac{ab}{e}\text{arc}(\sin=e)+\frac{b^2k}{ae}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\right)+2ak+2k^2].$$

Für $a=b$ ist $e=0$, also die Oberfläche der Kugel:

$$2\pi[a^2+a^2+2ak+2ak+2k^2]=4\pi(a+k)^2,$$

bekannt.
Suchen wir nun auch den körperlichen Inhalt zu bestimmen.
ei q, so ist

$$q=\pi\int_0^t -y^2\frac{\partial x}{\partial t}\partial t=a\pi\int_0^t \sin^3 t\left(b+\frac{ak}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\right)^2\left(1+\frac{abk}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}\right)\partial t,$$

$$\frac{q}{a\pi}=b^2\int_0^t \sin^3 t\partial t+2abk\int_0^t\frac{\sin^3 t.\partial t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}+a^2k^2\int_0^t\frac{\sin^3 t\partial t}{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}$$

$$+akb^3\int_0^t\frac{\sin^3 t\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}+2a^2b^2k^2\int_0^t\frac{\sin^3 t\partial t}{(a^2\sin t^2+b^2\cos^2 t)^2}$$

$$+a^3bk^3\int_0^t\frac{\sin^3 t\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^5}}.$$

$$
\left.\begin{aligned}
&= a\pi\Big[-\frac{b^2}{3}\sin t\cos t - \frac{2b^2}{3}\cos t + \frac{2b^2}{3} + \frac{kb^2}{a} \\
&-\frac{kb\cos t\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}{e^2} + \frac{kb}{e}\operatorname{arc}\left(\sin = e\sqrt{1-e^2\cos^2 t} - e\frac{b}{a}\cos t\right) \\
&+\frac{b^2k^2}{2a^2e}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}\right) + k^2 - \frac{k^2\cos t}{e^2} \\
&-\frac{kb^5}{a^4e^2}\cdot\frac{\cos t}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}} + \frac{2k^3}{3a} + \frac{b^3k^3\cos t}{3a^4e^2\sqrt{(1-e^2\cos^2 t)^3}} \\
&-\frac{(2e^2+1)k^3b\cos t}{3a^2e^2\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\Big].
\end{aligned}\right\}\quad (7)
$$

Für die Hälfte setzt man $t=\frac{\pi}{2}$, und somit ist der ganze Körper:

$$2a\pi\left[\frac{2b^2}{3} + \frac{kb^2}{a} + \frac{kb}{e}\operatorname{arc}(\sin = e) + \frac{b^2k^2}{2a^2e}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\right) + k^2 + \frac{2k^3}{3a}\right]. \quad (8)$$

Für $a=b$ ist $e=1$ und die Kugel:

$$2a\pi\left(\frac{2a^2}{3} + ka + ka + k^2 + k^2 + \frac{2k^3}{3a}\right) = \frac{\pi}{3}(4a^3 + 12a^2k + 12ak^2 + 4k^3)$$

$$= \frac{4\pi}{3}(a+k)^3,$$

wie bekannt.

Die von k freien Glieder in (7) und (8) geben den körperlichen Inhalt des analogen, durch die Ellipse erzeugten Körpers; während die k enthaltenden zusammen den durch den Raum zwischen der Ellipse und der Toroide erzeugten Körper ausdrücken.

Es ist nun auch leicht, den Körper zu betrachten, der durch Umdrehung um die Axe der y entsteht; wir übergehen diese Betrachtung jedoch.

In Bezug auf die analogen Formeln für die innere Toroide, die ausserhalb des Kreises dieser Betrachtungen liegt, bemerken wir nur noch, dass, wenn $k \overline{\overline{<}} \frac{b^2}{a}$, alle obigen Formeln für dieselbe gelten, wenn man statt k setzt $-k$. Daraus folgt, dass unter dieser Voraussetzung hinsichtlich k:

Der Unterschied der Längen beider Toroiden:

$$4k\pi;$$

die Fläche zwischen beiden Toroiden:

$$8akE\left(\frac{\pi}{2}, e\right);$$

der Unterschied der Oberflächen der beiden Umdrehungskörper, welche durch beide Kurven erzeugt werden, wenn das ganze System sich um die grosse Axe der Ellipse dreht:

Fig: 1.

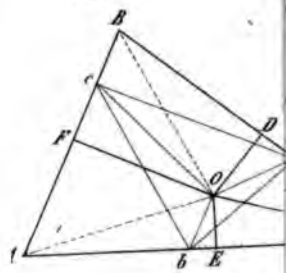


Fig: 3.

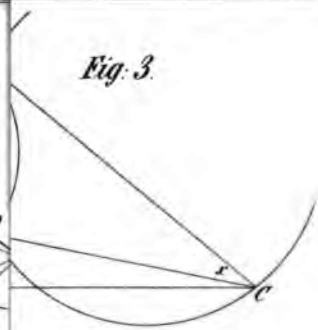


Fig: 4.

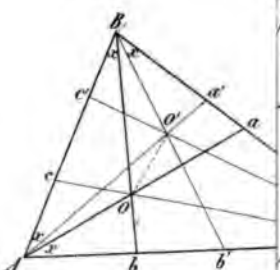


Fig: 6.

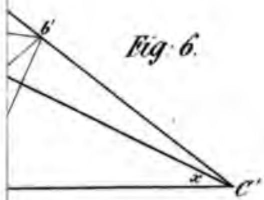


Fig: 7.

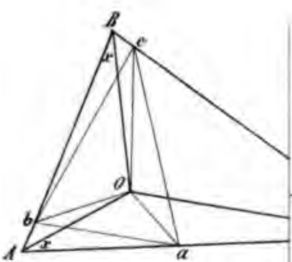
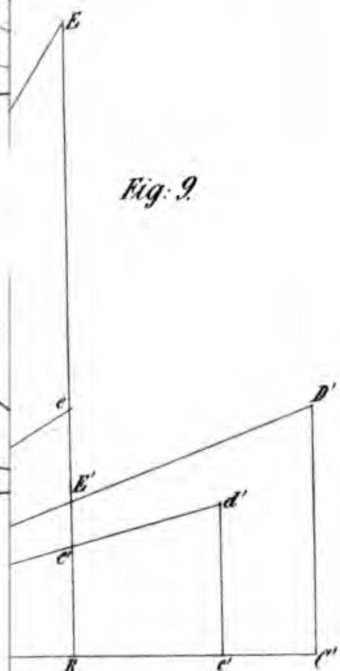


Fig: 9.



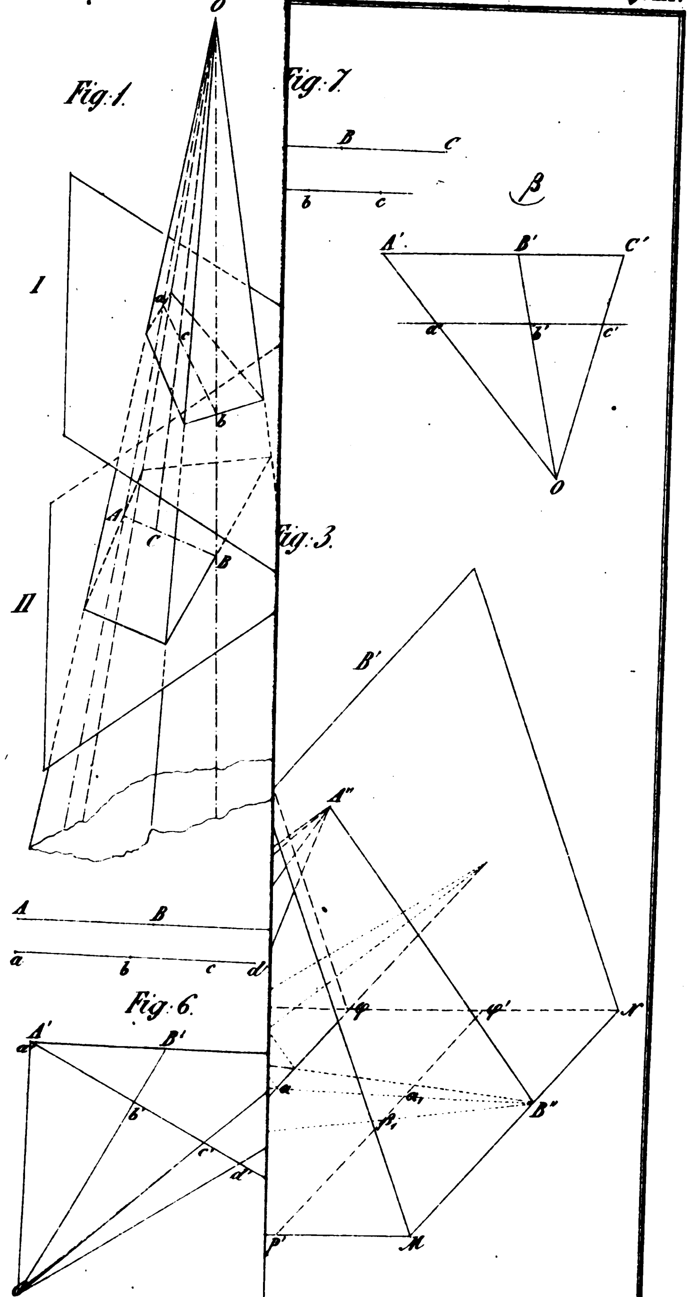


Fig. 1.

Fig. 7.

Fig. 3.

Fig. 6.

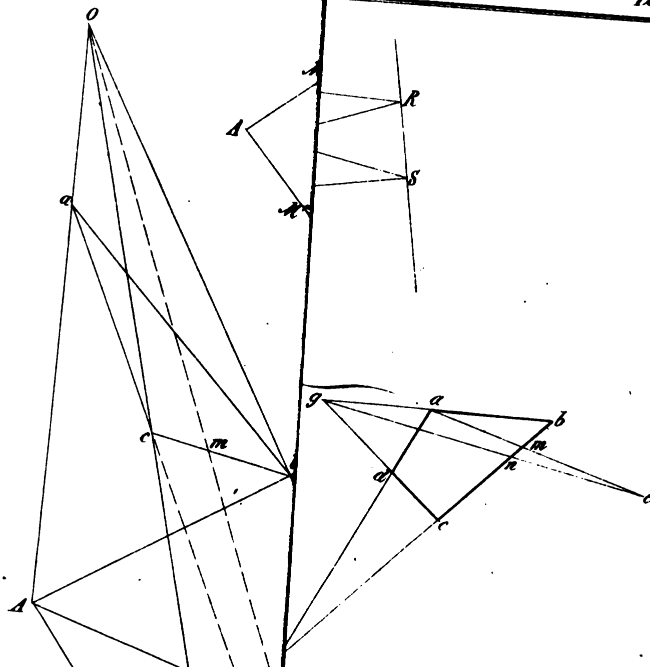


Fig. 9.

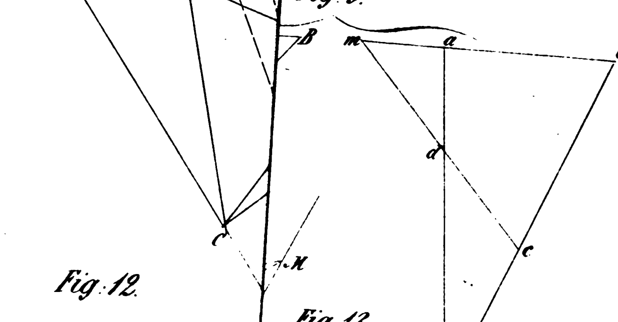


Fig. 12.

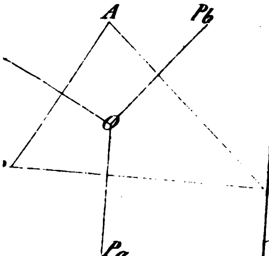


Fig. 13.